CELINA REPETTO

MANUAL DE ANALISIS MATEMATICO

Primera Parte:

CALCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE Y SUS APLICACIONES

1.200 EJERCICIOS

EDICIONES MACCHI

I.S.B.N.: 950-537-412-7

MACCHI GRUPO EDITOR S.A.
1997 © by EDICIONES MACCHI
Córdoba 2015 - (1120)
Tel. y Fax (54-1) 961-8355
Alsina 1535/37 - (1088)
Tel. (54-1) 375-1195
(líneas rotativas)
Fax (54-1) 375-1870
Buenos Aires - Argentina
http://www.macchi.com
E-Mail:info@macchi.com

Primera Edición	1981
Primera Reimpresión	1987
Segunda Reimpresión	1989
Segunda Edición	1997

EMPRESA ADHERIDA A LA CAMARA ARGENTINA DEL LIBRO

A mis alumnos, a los que tanto quiero
y de quienes tanto he recibido

INDICE

Sinopsis

Definiciones, signos y fórmulas que es necesario recordar

Operación cerrada en un conjunto

Una operación definida en un conjunto se dice **cerrada** en él, cuando al aplicarla a dos elementos de ese conjunto, da por resultado un elemento de ese mismo conjunto. Ejemplo: la adición es una operación cerrada en el conjunto de los números enteros, pues la suma de dos números enteros es también un número entero. En efecto:

$3 + 5 = 8 \qquad -9 + 7 = -2 \qquad$ etc.

En cambio, la división no es cerrada en el conjunto de los números enteros, pues el cociente de dos de ellos no siempre es entero, ejemplo 2 dividido 3, no da un número entero.

Elemento neutro de una operación

Se llama **elemento neutro** de una operación definida en un conjunto, al elemento del mismo tal que, al aplicarlo mediante esa operación a uno cualquiera del conjunto lo deja invariable. Así: el elemento neutro de la suma de números es el 0, pues al sumar 0 a cualquier número, se obtiene el mismo número, en efecto:

$8 + 0 = 8 \qquad -\frac{3}{4} + 0 = -\frac{3}{4} \qquad$ etc.

El elemento neutro de la multiplicación de números es el 1, en efecto:

$6 \times 1 = 6 \qquad (-7) . 1 = -7 \qquad \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2} \qquad$ etc.

Obsérvese que: si existe el elemento neutro con respecto a una operación definida en un conjunto es único; así en los ejemplos anteriores para la suma de números el elemento neutro es únicamente 0; para la multiplicación es solamente 1.

Elemento inverso de una operación

Definida una operación en un conjunto, se llama elemento inverso de cada elemento de ese conjunto, al elemento del mismo tal que, al aplicarlo al primero mediante esa operación, da como resultado el elemento neutro de dicha operación. Así: el elemento inverso de 3 en la suma de números enteros es -3, pues $3 + (-3) = 0$ que es el elemento neutro de la suma. El elemento inverso de $-\frac{5}{2}$ en la multiplicación de números racionales es $-\frac{2}{5}$ pues:

$\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = 1$ que es el elemento neutro de la multiplicación.

Obsérvese que: mientras el elemento neutro si existe es único para todos los elementos del conjunto; el elemento inverso si existe, es uno distinto para cada elemento del conjunto.

Signos

$\Longrightarrow$ implicación; $p \Longrightarrow q$ se lee p implica q.

$\Longleftrightarrow$ doble implicación $p \Longleftrightarrow q$ se lee p implica q y q implica p; o bien se verifica p si y solo si se verifica q; se suele decir que p y q son equivalentes.

Ejemplo: los tres ángulos del $\overset{\triangle}{ABC}$ son iguales $\Longleftrightarrow$ el $\overset{\triangle}{ABC}$ es equilátero

$\forall$ Cuantificador universal, se lee "para todo".

Ejemplo $\forall x$ natural se lee: para todo x natural.

$\exists$ Cuantificador existencial; se lee: "existe por lo menos uno".

Ejemplo $\exists x$ par se lee: existe por lo menos un x que es par.

Signo factorial !

Si n es un número natural, la factorial de n que se indica con la notación $n\,!$, significa:

Ejemplos:

$5\,! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ $\qquad 8\,! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Se define $1\,! = 1$ y $0\,! = 1$

Signo sumatoria Σ

De acuerdo con su nombre, es una suma de términos, que significa:

$$\sum_{i=1}^{3} 2^{i} = 2^1 + 2^2 + 2^3$$

$$\sum_{n=1}^{6} 5n = 5\times 1 + 5\times 2 + 5\times 3 + 5\times 4 + 5\times 5 + 5\times 6$$

$$\sum_{n=0}^{4} n! = 0!+1!+2!+3!+4!$$

En general, $\sum_{i=1}^{n} a_i$ que se lee: sumatoria de a_i desde i igual a ´ hasta n, es:

$$\Sigma\, a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Número combinatorio $\binom{m}{n}$

Se lee número combinatorio m sobre n, e indica el número de grupos de n elementos cada uno, elegidos entre los m y tales que dos grupos tienen por lo menos, algún elemento distinto. El número de grupos es:

$$\binom{m}{n} = \frac{\overbrace{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,\ldots\ldots\ldots\,(m-n+1)}^{n \text{ factores decrecientes a partir de } m}}{n\,!}$$

...mbién se puede expresar:

$$\Big) = \frac{m\,!}{(m-n)\,!\;n\,!}$$

...los:

$$= \frac{\overbrace{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}^{5}}{5\,!} = 56 \qquad \text{o bien} \quad \binom{8}{5} = \frac{8\,!}{3\,!\,5\,!} = 56$$

$$= \frac{\overbrace{9 \times 8 \times 7}^{3}}{3\,!} = 84 \qquad \text{o bien} \quad \binom{9}{3} = \frac{9\,!}{6\,!\,3\,!} = 84$$

$$\Big) = 1 \qquad \binom{m}{1} = m \qquad \binom{m}{m} = 1$$

$$\Big) = \binom{8}{3} \;;\quad \binom{9}{3} = \binom{9}{6} \qquad \text{en general} \quad \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$ que se llaman números

...inatorios complementarios.

Fórmula de Newton para la potencia de un binomio

$$b)^n = a^n + n\,a^{n-1}\,b + \frac{n\,(n-1)}{2\,!}\,a^{n-2}\,b^2 + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3\,!}\,a^{n-3}\,b^3 + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\ldots}{(n-1)\,!}\,a\,b^{n-1} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots 2\,.\,1}{n\,!}\,b^n$$

El número de términos es $n+1$; los coeficientes que equidistan de los extremos son iguales porque son números combinatorios complementarios, luego si el número de términos es par basta calcular la mitad de los coeficientes, si es impar, la mitad más el término central.

Ejemplos:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5\,a^4\,b + \underbrace{\frac{5 \times 4}{2\,!}}_{10}\,a^3\,b^2 + 10\,a^2\,b^3 + 5\,a\,b^4 + b^5$$

$$(x+z)^8 = x^8 + 8\,x^7\,z + \underbrace{\frac{8 \times 7}{2\,!}}_{28}\,x^6\,z^2 + \underbrace{\frac{8 \times 7 \times 6}{3\,!}}_{56}\,x^5\,z^3 + \underbrace{\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4\,!}}_{70}\,x^4\,z^4 + 56\,x^3\,z^5 +$$

$$+ 28\,x^2\,z^6 + 8\,x\,z^7 + z^8$$

Ecuaciones algebraicas

Si una ecuación es de grado n, tiene n raíces que pueden ser reales y distintas, reales e iguales, o complejas; las complejas en número par, pues deben ser números complejos conjugados.

La ecuación de segundo grado: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

tiene las dos raíces dadas por $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$

Ejemplos

1°) $2\,x^2 + 5\,x - 3 = 0 \qquad x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \dfrac{-5 \pm 7}{4} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{2} \\ \alpha_2 = -3 \end{cases}$ Dos raíces reales distintas

2°) $9\,x^2 - 6\,x + 1 = 0 \qquad x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-36}}{18} = \dfrac{6 \pm 0}{18} \quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ Dos raíces reales iguales

3°) $x^2 - 2x + 5 = 0 \qquad x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2} \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{2+4i}{2} = 1 + 2i \\ \alpha_2 = \dfrac{2-4i}{2} = 1 - 2i \end{cases}$ Dos raíces complejos conjugados

Si se trata de ecuaciones de grado superior, a veces por factoreo se pueden calcular sus raíces.

Ejemplos:

4°) $4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ Se saca $4x^2$ factor común de los dos primeros términos

$4x^2(x-1) - x + 1 = 4x^2(x-1) - (x-1) = (x-1)(4x^2-1)$ luego

$$4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0 \Longrightarrow (x-1)(4x^2-1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1 \\ 4x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow 4x^2 = 1 \Longrightarrow \end{cases}$$

$$\Longrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto, la ecuación de tercer grado $4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ tiene las raíces reales y distintas:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{2} \\ \alpha_3 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

5°) Sea la ecuación de 5° grado:

$$x^5 - 12x^4 - 57x^3 - 134x^2 + 156x - 72 = 0$$

Se puede verificar que el primer miembro es posible expresarlo como el producto de dos polinomios, así:

$$x^5 - 12x^4 - 57x^3 - 134x^2 + 156x - 72 = (x^2 - 6x + 9)(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$$

luego, la ecuación se puede indicar:

$$(x^2 - 6x + 9)(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \Longrightarrow (x-3)^2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = 3 \end{cases} \\ x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \Longrightarrow (x-2)^3 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 2 \\ \alpha_4 = 2 \\ \alpha_5 = 2 \end{cases} \end{cases}$$

Por lo tanto, la ecuación de 5° grado

$x^5 - 12x^4 - 57x^3 - 134x^2 + 156x - 72 = 0$ tiene 5 raíces $\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 2 \end{cases}$

es decir que 3 es una raíz doble o múltiple de segundo orden y 2 es una raíz triple o múltiple de tercer orden.

Descomposición factorial de un polinomio

En cada ecuación, el primer miembro se puede factorear como el producto del coeficiente del término de más alto grado por los binomios, que son cada uno la diferencia entre x y cada una de las raíces, así; en los ejemplos dados:

1°) $2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x + 3)$

2°) $9x^2 - 6x + 6 = 9\left(x - \dfrac{1}{3}\right)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = 9\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2$

3°) $x^2 - 2x + 5 = 1\,[x - (1 + 2i)]\cdot[x - (1 - 2i)]$

4°) $4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 4(x-1)\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$

°) $x^5 - 12x^4 + 57x^3 - 134x^2 + 156x - 72 = (x-3)^2 (x-2)^3$

Se observa que el binomio en que figura una raíz múltiple, está elevado al exponente igual al orden de multiplicidad de la raíz.

En general:

$$\text{Si } a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots\dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 \\ \alpha_5 = \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{cases}$$

$$\dots^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots + a_{n-1} x + a_n = a_0 (x-\alpha_1)^4 (x-\alpha_5)^2 (x-\alpha_7)(x-\alpha_8)\dots\dots(x-\alpha_n)$$

Regla de Ruffini: un polinomio completo y ordenado en x dividido por un binomio de la forma $x + a$ donde a es un número cualquiera, da por cociente un polinomio de grado menor en una unidad que el dividendo y cuyos coeficientes son: el primero es el primero del dividendo; el segundo es igual al producto del primer coeficiente por a cambiado de signo, más el segundo del dividendo; y así siguiendo en la misma forma se obtienen los restantes:

Ejemplo: $3x^5 + 10x^4 - 15x^2 + 5 \;\; \lfloor x + 2$

Hay que completar el dividendo:

$$3x^5 + 10x^4 + 0x^3 - 15x^2 + 0x + 5 \;\; \lfloor x + 2$$

Como el dividendo es de quinto grado, el cociente es de cuarto, y su primer coeficiente es el primer coeficiente del dividendo o sea 3; como $a = 2$ cambiado de signo es -2; se multiplica $3(-2) = -6$ se agrega al segundo coeficiente 10 del dividendo y se tiene $-6 + 10 = 4$ que es el segundo coeficiente del cociente y así se continúa. Conviene la conocida distribución práctica: en un renglón se escriben los coeficientes del dividendo completo y ordenado, se hacen los dos trazos perpendiculares que se indican; en el ángulo se escribe a cambiado de signo, en este caso -2, debajo del trazo horizontal se escriben los coeficientes del cociente, que se obtienen como se dijo:

	3	10	0	-15	0	5
-2		$3(-2) = -6$	$4(-2) = -8$	$(-8)(-2) = 16$	$1(-2) = -2$	$(-2)(-2) = 4$
	3	$10 - 6 = 4$	-8	$-15 + 16 = 1$	$0 - 2 = -2$	$5 + 4 = \boxed{9}$

es decir que los coeficientes del cociente son: $3; 4; -8; 1; -2$ y el resto que se obtiene con el mismo procedimiento es 9, que se recuadra para destacarlo. Luego:

$$3x^5 + 10x^4 - 15x^2 + 5 \;\; \lfloor x + 2$$

$$R = 9 \qquad 3x^4 + 4x^3 - 8x^2 + x - 2$$

Ejemplo 2°): $2x^6 - 7x^2 - 10 \;\; \lfloor x - 1$

2 + 3 = 5

	2	0	0	0	-7	0	-10
1		2	2	2	2	-5	-5
	2	2	2	2	-5	-5	$\boxed{-15}$

Luego: $2x^6 - 7x^2 - 10 \;\; \lfloor x - 1$

$$R = -15 \qquad 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 5x - 5$$

Teorema del resto: el resto de la división de un polinomio en x por un binomio de la forma $x + a$; es igual al valor numérico del dividendo $D(x)$ cuando se atribuye a x el valor de a cambiado de signo. Así, en el ejemplo anterior, como $a = -1$, si en el dividendo se da a x el valor 1, se obtiene el resto -15. En efecto:

$$D(1) = 2 \cdot 1^6 - 7 \cdot 1^2 - 10 = 2 - 7 - 10 = -15$$

Este teorema permite fácilmente averiguar si un número es raíz de una ecuación.

Ejemplo: se quiere saber si -3 es raíz de la ecuación: $x^4 + 5x^3 + 9x^2 - x - 30 = 0$. Se divide el polinomio que es el primer miembro de la ecuación por $x + 3$, si el resto es 0 quiere decir que dicho polinomio se anula para $x = -3$, luego -3 es raíz de la ecuación. Distribución práctica:

	1	5	9	-1	-30
-3		-3	-6	-9	30
	1	2	3	-10	$\boxed{0}$

$$\Longrightarrow \quad x^4 + 5x^3 + 9x^2 - x - 30 \;\Big|\; x + 3 \qquad R = 0 \qquad x^3 + 2x^2 + 3x - 10$$

quiere decir que el dividendo se anula para $x = -3$, luego -3 es raíz de la ecuación.

Ejemplo: averiguar si los números $-\frac{1}{2}$ y 2 son raíces de la ecuación $2x^3 + 5x^2 - 14x - 8 = 0$.

Verifiquemos primero si $-\frac{1}{2}$ es raíz.

	2	5	-14	-8
$-\frac{1}{2}$		-1	-2	8
	2	4	-16	$\boxed{0}$
2		4	16	
	2	8	$\boxed{0}$	

Luego $-\frac{1}{2}$ es raíz. Para ver si 2 también es raíz basta verificar en la ecuación $2x^2 + 4x - 16 = 0$ cuyos coeficientes ya están escritos, luego:

Por lo tanto, también 2 es raíz de la ecuación dada.

NOTA: una vez que se verificó que $-\frac{1}{2}$ es raíz, las otras dos raíces de la ecuación dada, que es de tercer grado, son las de la ecuación de segundo grado, cuyos coeficientes, según ya se ha dicho son 2; 4; -16. En efecto:

$$2x^2 + 4x - 16 = 0 \iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 128}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{144}}{4} = \frac{-4 \pm 12}{4} \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

Así se tienen las tres raíces de la ecuación:

$$2x^3 + 5x^2 - 14x - 8 = 0 \qquad \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{2} \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = -4 \end{cases}$$

Ejemplo:

Averiguar si $\frac{1}{3}$ y 4 son raíces de la ecuación $3x^4 - 10x^3 - 27x^2 + 82x - 24 = 0$.

	3	-10	-27	82	-24
$\frac{1}{3}$		1	-3	-10	24
	3	-9	-30	72	$\boxed{0}$ $\Longrightarrow$ $\frac{1}{3}$ es raíz.
4		12	12	-72	
	3	3	-18	$\boxed{0}$ $\Longrightarrow$ 4 es raíz.	

Como la ecuación es de cuarto grado tiene otras dos raíces, que son las de la ecuación de segundo grado

$$3x^2 + 3x - 18 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 216}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{225}}{6} = \frac{-3 \pm 15}{6} \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Luego, las cuatro raíces de la ecuación dada son:

$\alpha_1 = \frac{1}{3}$; $\alpha_2 = 4$; $\alpha_3 = 2$; $\alpha_4 = -3$.

Logaritmos

Si b es un número positivo y distinto de 1, es decir $b > 0$ y $b \neq 1$ se puede elegir como base de logaritmos; si N es un número positivo, otro número x se llama logaritmo de N en base b si $N = b^x$. Simbólicamente:

$_b\ N = x$ que se lee: logaritmo de N en base b es $x \Longleftrightarrow N = b^x \Longrightarrow N = b^{\log_b N}$

Con la notación $\log$ se indica el logaritmo en base 10.

mplo:

$1000 = 3$ pues $1000 = 10^3$

Con la notación ln se indica el logaritmo en base e, es decir:

$V = 5$ si $N = e^5$

Si se trata del logaritmo en base 2, se indica $\log_2$, así:

$_2\ 16 = 4$ pues $16 = 2^4$

En cualquier base el logaritmo de 1 es 0; en efecto:

$_2\ 1 = 0$ pues $1 = 2^0$; $\log 1 = 0$, pues $1 = 10^0$ etc.

El logaritmo del número base, es siempre 1, en efecto:

$10 = 1$ pues $10 = 10^1$; $\ln e = 1$ pues $e = e^1$; $\log_2 2 = 1$ pues $2 = 2^1$

El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores, así:

$_b\ (M \cdot N) = \log_b M + \log_b N$

mplo: $\log_2 (4 \times 8) = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$

efecto: $\log_2 (32) = 5$ pues $32 = 2^5$

El logaritmo del cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo l divisor, así:

$_b\ (M : N) = \log_b M - \log_b N$

mplo:

$_2\ (64 : 4) = \log_2 64 - \log_2 4 = 6 - 2 = 4$, en efecto:

$_2\ (16) = 4.$

El logaritmo de una potencia:

$M^p = p \log_b M$

Ejemplo:

$\log 100^3 = 3 . \log 100 = 3 \times 2 = 6.$

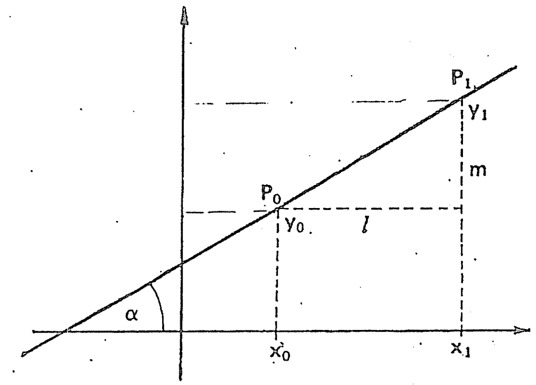
En efecto: $\log 100^3 = \log 1000000 = 6$

Ecuaciones de la recta de la recta y de las cónicas

Recta:

La ecuación de la recta determinada por los puntos $P_0 (x_0 ; y_0)$ y $P(x_1 ; y_1)$.

es $$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$



Al número $x_1 - x_0$ se lo designa con l y a $y_1 - y_0$ con m a los que se llama coeficientes directos, luego:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \text{ ; por otra parte } \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{m}{l} = tg\ \alpha,$$ que se llama pendiente de la recta y la designamos con la letra p.

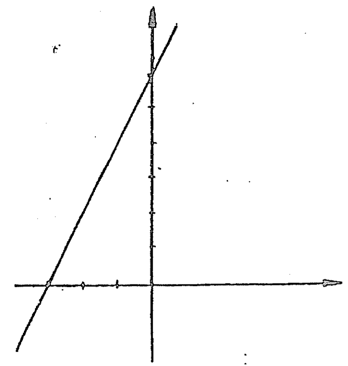
De la ecuación dada de la recta, por trasposición de términos y factores se pasa a la que se llama ecuación explícita de la recta, que es:

$$y = px + b$$

donde como ya se dijo, p es la pendiente y b es la ordenada del punto en que la recta corta al eje y.

Ejemplo:

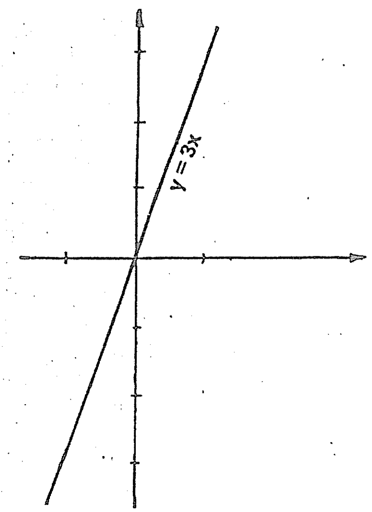
$y = 2x + 6$, corta al eje y en el punto 6 y la pendiente es 2.

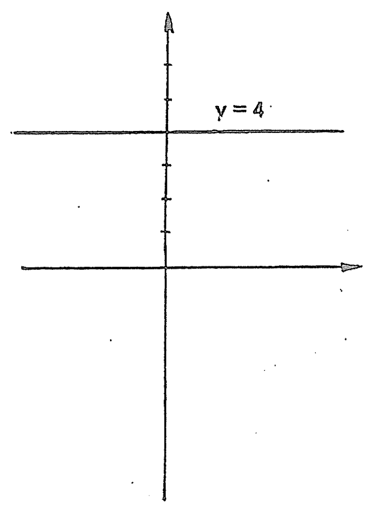


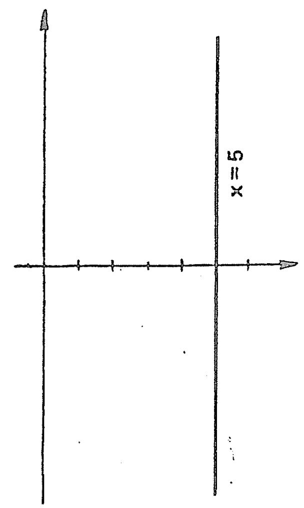
Si b es 0, la recta pasa por el origen, ejemplo $y = 3x$.

Si la ecuación es $y = k$ ejemplo $y = 4$, la recta es paralela al eje x.

Si la ecuación es $x = k$ ejemplo $x = 5$, la recta es paralela al eje y.







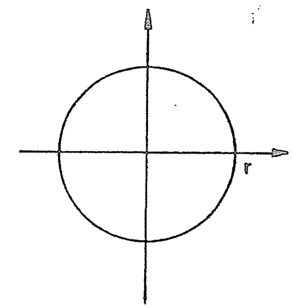
$$\left.\begin{array}{l}\text{Si la recta } r_1 \text{ es } y = p_1 x + b_1 \\ \text{y la recta } r_2 \text{ es } y = p_2 x + b_2\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} r_1 \parallel r_2 \iff p_1 = p_2 \\ r_1 \perp r_2 \iff p_1 = -\dfrac{1}{p_2}\end{array}$$

CONICAS

Circunferencia

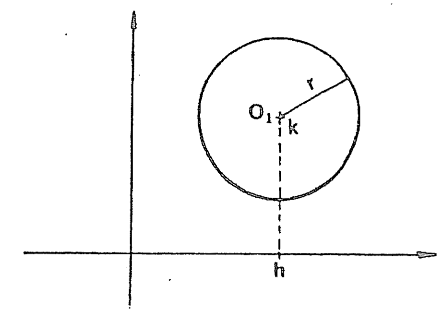
La de centro en el origen y radio r tiene por ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



La de centro en O_1 $(h\,;k)$ y radio r tiene por ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

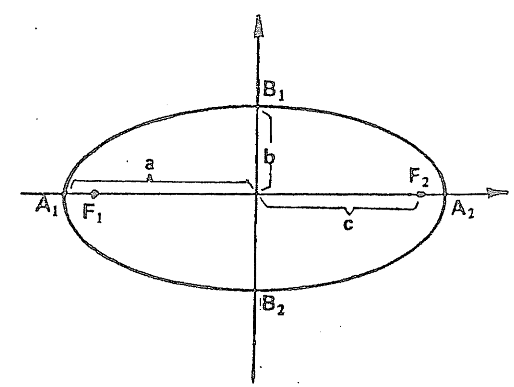


Elipse

Es el conjunto de puntos del plano tales que la suma de sus distancias a 2 puntos fijos F_1 y F_2 llamados focos es constante e igual a $2a$ = diámetro $\overline{A_1 A_2}$.

Si el centro coincide con el origen y los diámetros pertenecen a los ejes, la ecuación es:

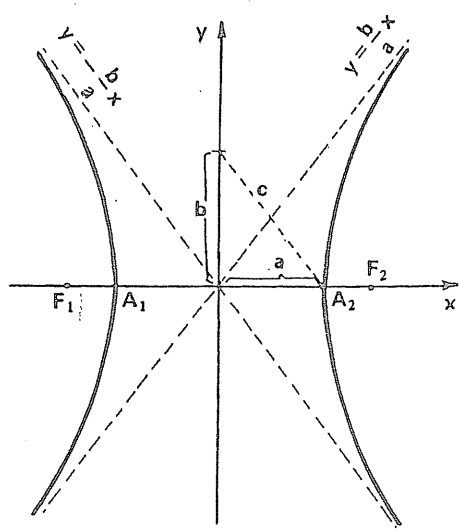
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$



Hipérbola

Es el conjunto de puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a 2 puntos fijos llamados focos F_1 y F_2 es constante e igual a $2a = \overline{A_1 A_2}$.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



La ecuación, en las condiciones de la figura es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Las asíntotas de la hipérbola son las rectas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

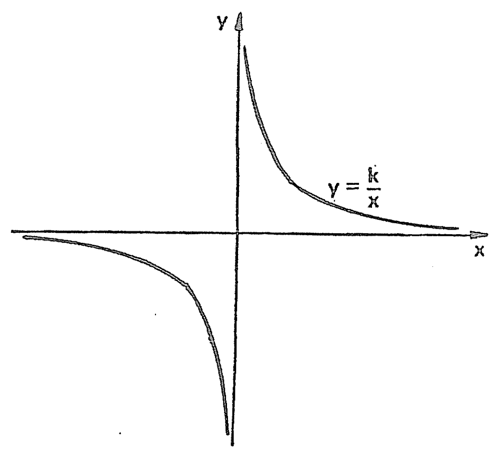
La hipérbola se llama equilátera, cuando $a = b$, la ecuación se transforma en

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \implies x^2 - y^2 = a^2.$$

Las asíntotas resultan perpendiculares, en consecuencia se pueden adoptar como ejes coordenados y en tal caso la ecuación de la hipérbola equilátera es:

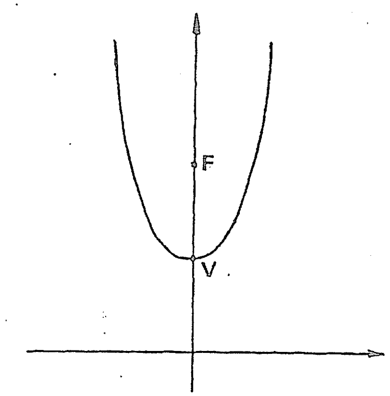
$$y = \frac{k}{x}$$

donde k es un número.

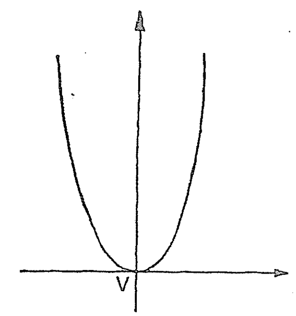


Parábola

Es el conjunto de puntos del plano que equidistan de una recta d que se llama directriz y de un punto F exterior a ella que se llama foco. El punto medio del segmento que determina la distancia del foco a la directriz, es el punto de la parábola que se llama vértice de la misma y se designa con V. El eje de la parábola es la recta perpendicular a la directriz trazada por el foco.

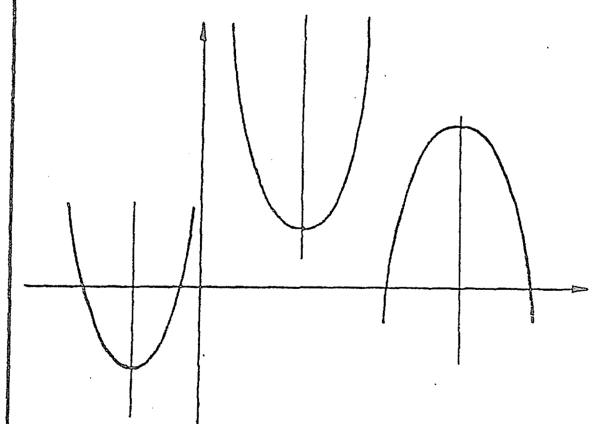


Si se adopta el vértice como origen y el eje como eje de ordenadas:



la ecuación de la parábola es: $y = a\,x^2$

Si el eje de coordenadas es paralelo al eje de la parábola:



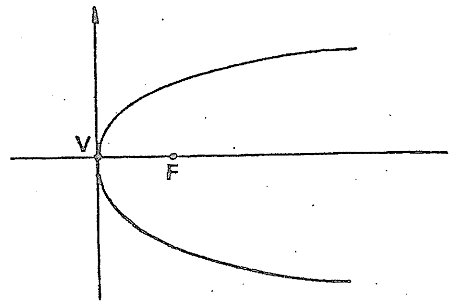
la ecuación es $y = a\,x^2 + b\,x + c$

y la abscisa del vértice es $x_V = \dfrac{b}{-2a}$

Si $a > 0$ la concavidad es hacia arriba.
Si $a < 0$ la concavidad es hacia abajo.

Si el eje de la parábola es el eje de abscisas x y el vértice V es el origen, la ecuación de la parábola es:

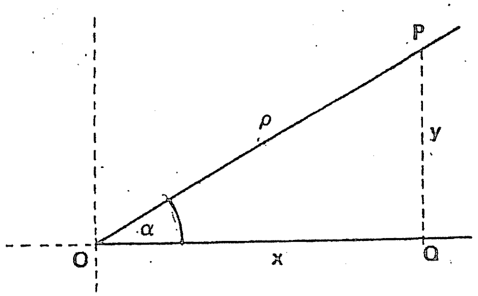
$$y^2 = k\,x$$



Elementos de trigonometría

Dado un ángulo α las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, están definidas:

$$sen.\alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{y}{\rho} \qquad cos\,\alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{x}{\rho}$$



$$tg\ \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{y}{x}$$

Las otras tres funciones, cosecante, secante y cotangente se pueden obtener:

$$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} \quad ; \quad sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha} \quad ; \quad cotg\ \alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

Las funciones cosecante y secante se utilizan muy poco. Otras relaciones fundamentales son:

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \Longrightarrow sen\ \alpha = \sqrt{1 - cos^2\ \alpha} \qquad cos\ \alpha = \sqrt{1 - sen^2\ \alpha}$$

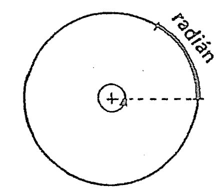
$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \ ; \quad 1 + tg^2\ \alpha = \frac{1}{cos^2\ \alpha} = sec^2\ \alpha \ ; \quad 1 + cotg^2\ \alpha = \frac{1}{sen^2\ \alpha} = cosec^2\ \alpha \ ; \quad \frac{tg^2\ \alpha}{1 + tg^2\ \alpha} = sen^2\ \alpha$$

Signos de las funciones en los cuatro cuadrantes:

- primer cuadrante: $sen +$; $cos +$; $tg +$
- segundo cuadrante: $sen +$; $cos -$; $tg -$
- tercer cuadrante: $sen -$; $cos -$; $tg +$
- cuarto cuadrante: $sen -$; $cos +$; $tg -$

Radián y grado sexagesimal

Un radián es el arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma, por lo tanto la longitud de la circunferencia que es $2\,\pi\,r$ es de $2\,\pi$ radianes.



Como el ángulo central de la circunferencia es de 360° resulta que:

a 360° corresponden $2\,\pi$ radianes.

a 180° ________ π radianes a 90° ________ $\frac{\pi}{2}$ radianes a 60° ________ $\frac{\pi}{3}$ radianes.

$$a\,1^\circ \text{ corresponden } \frac{\pi}{180} \simeq \frac{3{,}1416}{180} \simeq 0{,}0174 \text{ radianes.}$$

$$a\ 1 \text{ radián corresponden } \frac{180}{\pi} \simeq 57{,}29 \text{ grados.}$$

Funciones trigonométricas de suma y resta de ángulos

$$sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta + cos\ \alpha\ sen\ \beta \Longrightarrow sen\ 2\ \alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$$

$$cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta \Longrightarrow cos\ 2\ \alpha = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha$$

$$tg\ (\alpha + \beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ tg\ \beta} \Longrightarrow tg\ 2\ \alpha = \frac{2\ tg\ \alpha}{1 - tg^2\ \alpha}$$

$$sen\ (\alpha - \beta) = sen\ \alpha\ cos\ \beta - cos\ \alpha\ sen\ \beta$$

$$cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha\ cos\ \beta + sen\ \alpha\ sen\ \beta =$$ seno de la suma

$$tg\ (\alpha - \beta) = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha\ tg\ \beta}$$

'ransformación de sumas y diferencias de senos y cosenos en productos

$$\text{'n } p + sen\, q = 2\, sen \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \qquad sen\, p - sen\, q = 2 \cos \frac{p+q}{2}\, sen \frac{p-q}{2}$$

$$\text{)s } p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \qquad \cos p - \cos q = 2\, sen \frac{p+q}{2}\, sen \frac{p-q}{2}$$

1 Números Reales

El concepto de número real es uno de los fundamentales en la Matemática. Se puede definir axiomáticamente y demostrar como teoremas las propiedades del conjunto de los números reales, pero dado lo elemental de este texto, aceptaremos el concepto de número real, definiremos las operaciones de adición y multiplicación con un reducido número de axiomas, de los cuales se pueden deducir las operaciones y propiedades restantes.

Haremos previamente algunas consideraciones generales, para llegar a la necesidad de la creación de los números reales.

Los primeros números que el hombre considera históricamente y de los que el niño tiene idea en su evolución mental, son los números naturales: 1; 2; 3; 4; 5; . . ., tal es así, que el matemático Leopoldo Kronecker que vivió entre los años 1823-1891, dijo: "El buen Dios hizo los números naturales, todo lo demás es creación del hombre". Estos números naturales constituyen un conjunto infinito que se designa con N.

Al sumar o multiplicar los números naturales, el resultado es otro número natural, pero al restar, puede ocurrir que el minuendo sea menor que el sustraendo, por ejemplo $2 - 5$ o que el minuendo sea igual al sustraendo, por ejemplo $9 - 9$. Es preciso entonces, considerar otros números para interpretar estos resultados, para los del primer ejemplo:
Los números enteros negativos: $-1; -2; -3; -4; \ldots\ldots$
para los del segundo ejemplo: el número cero **0**.

El conjunto formado por los números naturales, por el 0 y por los enteros negativos, se llama el conjunto de los números enteros $\ldots . -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \ldots\ldots$

A los números naturales se los llama también números enteros positivos.

Adición o suma, sustracción o resta y multiplicación son operaciones cerradas en el conjunto de los números enteros, es decir, el resultado es siempre un número entero, pero cuando se aplica a dos de ellos la operación de división, si el dividendo no es múltiplo del divisor, el resultado no es un número entero, por ejemplo 2 : 3, esta operación se indica $\frac{2}{3}$, aparecen así los números fraccionarios como cociente indicado de dos números enteros, otros ejemplos de números fraccionarios son: $\frac{-5}{4}$; $\frac{-1}{-7}$, etcétera.

Todo número entero se puede expresar también como fracción, así el número 2 puede expresarse como $\frac{10}{5}$; $\frac{-6}{-3}$; $\frac{8}{4}$, etc. y como una fracción indica la razón entre el numerador y el denominador, es que a los números enteros y fraccionarios se los llama números racionales, es decir que el conjunto de los números racionales está constituido por los números enteros y los fraccionarios.

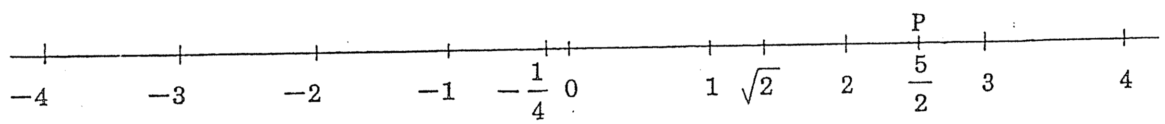
Las raíces cuadradas de números cuadrados perfectos, dan por resultados números racionales, ej.: $\sqrt{9} = \pm 3$, $\sqrt{\frac{4}{25}} = \pm \frac{2}{5}$, pero si el radicando, aún siendo positivo, no es cuadrado perfecto, por ejemplo $\sqrt{2}$ el resultado no es un número racional, pues ningún número entero ni fraccionario elevado al cuadrado da por resultado 2.

Se crean entonces los números irracionales, que se llaman así, porque no se pueden expresar mediante la razón entre dos números enteros.

Obsérvese que hay más números irracionales que racionales; pues cada número racional positivo da origen a todos los irracionales que resultan al extraer de él las raíces de índices de los cuales no es potencia exacta, ejemplo las raíces cuartas de los números positivos que no son cuartas potencias. Además existen otros números irracionales, entre los más comunes el número π y el número e que es la base de los logaritmos naturales.

Tanto a los números racionales como a los irracionales se los llama números reales, es decir, el conjunto de los números reales que se lo designa por R ó $\mathbb{R}$, está constituido por los números racionales y por los números irracionales.

Dada una recta, en ella un punto origen al que se le hace corresponder el número 0 y una unidad de medida, se demuestra que a todo número real le corresponde un punto en la recta, y a todo punto de la recta un número real que es su abscisa al origen, precedido por el signo + si está en la semirrecta de los números naturales, precedido por el signo − si está en la semirrecta opuesta.



Esta correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y el conjunto de los números reales, hace que hablemos indistintamente de número o de punto, así es indistinto hablar del punto P o del número $\frac{5}{2}$.

Representación en forma decimal de un número real

Todo número racional no entero se puede expresar en forma decimal; en algunos casos por un número finito de cifras decimales, ej.: $\frac{1}{8} = 0{,}125$, en otros por una expresión periódica de infinitas

cifras decimales, ej.: $\frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots\ldots.$ en el que se repite indefinidamente el número 45, es decir se sabe cuáles son todas las infinitas cifras decimales.

Si el número es irracional, las cifras decimales son infinitas, pero de ellas solamente se conocen las primeras que han sido obtenidas por algún procedimiento, así:

$$\sqrt{2} = 1{,}41423\ldots\ldots$$
$$\pi = 3{,}141592\ldots\ldots$$
$$e = 2{,}718281\ldots\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1{,}732\ldots\ldots$$

en estos casos no se conocen las cifras decimales siguientes si no se han calculado, por ejemplo no podemos decir cuál es la cifra del milésimo lugar decimal. Cuando es necesario aplicar estos números en el cálculo, se considera un valor aproximado de los mismos, por ejemplo para $\sqrt{2}$, se acepta aproximadamente 1,4 o bien 1,41.

RESEÑA HISTORICA

Los números son los elementos con que trabaja la Aritmética, e históricamente el concepto de número nace con el de número natural; algunos números naturales ya aparecen en la prehistoria. También hay papiros de la época anterior a Cristo, que ratifican el conocimiento de algunos números fraccionarios, pues los números fraccionarios positivos, se conocen antes que los enteros negativos, ya que las antiguas civilizaciones necesitaron conocer: la mitad, la cuarta parte de un total para aplicarlos en el comercio y en el trueque de mercaderías en general. Pero recién es Diofanto de Alejandría, que se cree vivió en el siglo III, quien estudió con más detalle los números fraccionarios para aplicarlos a la resolución de ecuaciones.

El número 0 según parece, lo crearon los hindúes.

Los números negativos aparecen en el Renacimiento y su interpretación resultó tan extraña en un principio que se los llamó números *sordos*; la expresión del concepto de estos números negativos y el manejo de los mismos fue muy lento, llevó mucho tiempo.

En lo que respecta a los números irracionales, ya a Pitágoras se le presentó la necesidad de los mismos, al resolver el simple problema de la determinación de la longitud de la diagonal de un cuadrado como raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la longitud de dos lados.

Pero la aceptación de los números irracionales resultó más lenta aún y resistida que la de los números negativos.

El estudio axiomático de la Teoría de Números, se intensifica aproximadamente a partir del año 1840 y se destacan, entre otros, los matemáticos: Karl Weierstrass, George Cantor, Richard Dedekind, Bertrand Russell, Giusseppe Peano.

Adición y multiplicación con números reales

En el conjunto de los números reales se pueden definir dos operaciones: la adición o suma y la multiplicación, que tienen las siguientes propiedades:

1°) El resultado de cada operación aplicada a dos números reales es único y pertenece al conjunto de los números reales, por lo tanto, la adición y la multiplicación son operaciones cerradas en R.
El resultado de la adición se llama suma y el resultado de la multiplicación producto.
Es decir, dados los números reales a y b existe uno y solo un número real s llamado suma, que se indica $a + b = s$ y uno y solo un número real p llamado producto que se indica $a \times b = p$ o bien $a \, . \, b = p$.

2°) Son operaciones conmutativas:

$a + b = b + a$

$a \, . \, b = b \, . \, a$

3°) Son asociativas:

$a + b + c = a + (b + c)$

$a \, . \, b \, . \, c = a \, . \, (b \, . \, c)$

4°) La multiplicación es distributiva con respecto a la adición:

$(a + b) \, . \, c = a\,c + b\,c$

5°) La adición tiene un elemento neutro que es el 0,

$\forall a$ es $a + 0 = a$

La multiplicación tiene un elemento neutro que es el 1,

$\forall a$ es $a \, . \, 1 = a$

6°) Para cada número real a existe otro número real $-a$ que su inverso con respecto a la suma, es decir $a + (-a) = 0$

El inverso de un número con respecto a la suma se llama también su opuesto o simétrico, este nombre se debe a que los puntos que los representan son simétricos con respecto al origen.

Ejemplo: el opuesto de 3 es -3, pues $3 + (-3) = 0$

el opuesto o simétrico de $-\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{2}$, pues $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

Para cada número real a distinto de 0, existe el número $\frac{1}{a}$ que es su inverso con respecto a la multiplicación, es decir $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Este inverso $\frac{1}{a}$ se indica también a^{-1}.

Ejemplo:

El inverso de 4 con respecto a la multiplicación es $\frac{1}{4} = 4^{-1}$ pues $4 \times \frac{1}{4} = 1$

El inverso de $-\frac{2}{3}$ con respecto a la multiplicación es $-\frac{3}{2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$ pues $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 1$

El conjunto de los números reales con las operaciones de adición y multiplicación que gozan de las propiedades indicadas, tiene estructura o cuerpo conmutativo.

Sustracción o resta

Para restar de un número real a otro b, se le suma al 1° el opuesto del 2°: Restar de a el número $b \Longrightarrow a + (-b)$.

Ejemplo: Restar de 5 el número 2 o sea $5 - 2 = 5 + (-2) = 3$

División

Para dividir el número real a por otro $b \neq 0$, se multiplica el 1° a por $\frac{1}{b}$:
$a : b = a \times \frac{1}{b}$ el resultado se llama cociente.

Ejemplo:

$8 : 4 = 8 \times \frac{1}{4} = 2$

Números reales positivos

Los números reales positivos constituyen un subconjunto de los números reales, y son tales que:
Si un número real es positivo, su opuesto no lo es y se lo llama negativo. Ej.: 3 es positivo, su opuesto -3 es negativo.

La suma y el producto de dos números positivos es positivo:

$5 + 3 = 8 \qquad \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$

Un número real es positivo, o es negativo o es 0.

Aceptamos que el producto de dos números negativos es positivo y el producto de un positivo por un negativo es negativo.

Desigualdades

Si $a - b$ es positivo se dice que a es mayor que b y se indica con el símbolo $>$

$a > b \qquad$ Ej.: $6 > 2 \qquad -4 > -7$

Si $c - d$ es negativo se dice que c es menor que d y se indica con el símbolo $<$

$c < d \qquad$ Ej.: $3 < 8 \qquad -5 < -3$

Todos los números reales mayores que 0 son positivos y todos los números reales menores que 0 son negativos.

Las reglas más usuales para operar con desigualdades son:

1°) $a > b \iff b < a$

2°) Cada relación es transitiva, es decir:

$$\left.\begin{matrix} a > b \\ \wedge \\ b > c \end{matrix}\right\} \Longrightarrow a > c \qquad \Bigg\| \qquad \left.\begin{matrix} x < y \\ \wedge \\ y < z \end{matrix}\right\} \Longrightarrow x < z$$

3°) Si a ambos miembros de una desigualdad se les suma un mismo número el sentido de la desigualdad subsiste

$a > b \Longrightarrow a + c > b + c \qquad x < y \Longrightarrow x + z < y + z$

Ej.:

$7 > 5 \Longrightarrow 7 + 3 > 5 + 3$, en efecto: $10 > 8$

$2 < 6 \Longrightarrow 2 + 5 < 6 + 5$, en efecto: $7 < 11$

4°) Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican por un número positivo el sentido de la desigualdad no cambia, si el factor es un número negativo la desigualdad cambia de sentido.

Ejemplos:

$8 > 5 \Longrightarrow 8 \times 2 > 5 \times 2$, en efecto: $16 > 10$

$8 > 5 \Longrightarrow 8\,(-2) < 5\,(-2)$, en efecto: $-16 < -10$

$3 < 7 \Longrightarrow 3 \times 4 < 7 \times 4$, en efecto $12 < 28$

$3 < 7 \Longrightarrow 3\,(-4) > 7\,(-4)$, en efecto: $-12 > -28$

Ley de tricotomía

Dados dos números a y b debe verificarse una y solo una de las tres relaciones siguientes; o son iguales, o el primero es mayor que el segundo o el primero es menor que el segundo, o sea

$a = b \quad$ o bien $\quad a > b \quad$ o bien $\quad a < b$

los signos $\geqslant$ y $\leqslant$ se leen respectivamente mayor o igual que y menor o igual que:

$a \geqslant b$ se lee a es mayor o igual que b.

$x \leqslant z$ se lee x es menor o igual que z.

Ej.:

$x \geqslant 0$ significa que x es positivo o nulo, o en otros términos que x no es negativo.

Un par de desigualdades simultáneas, por ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} x > 2 \\ \text{y} \quad x < 9 \end{matrix}\right\}$$ se pueden escribir más brevemente $2 < x < 9$

Valor absoluto de un número real

El valor absoluto de un número real a se indica $|a|$

Ejemplos.

el valor absoluto de 5 es $|5| = 5$

el valor absoluto de -4 es $|-4| = 4$

el valor absoluto de 0 es 0.

En general $|a| = a$ si a es positivo.

$|a| = -a$ si a es negativo.

en otros términos el valor absoluto de un número es el número prescindiendo del signo.

1°) Dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto

jemplo:

$|8| = |-8|$

2°) El valor absoluto de la suma de dos números es menor o igual que la suma de los valores absolutos en cada uno de los sumandos.

jemplo: Sean los números de distinto signo 7 y − 3

$$\left.\begin{array}{l} |7+(-3)| = |4| = 4 \\ |7|+|-3| = 7+3 = 10 \end{array}\right\} \Longrightarrow |7+(-3)| < |7| + |-3| \quad \text{pues } 4 < 10$$

jemplo: Sean los números de igual signo − 6 y − 2

$$\left.\begin{array}{l} |(-6)+(-2)| = |-8| = 8 \\ |-6| + |-2| = 6+2 = 8 \end{array}\right\} \Longrightarrow |(-6)+(-2)| = |-6|+|-2| \quad \text{pues } 8 = 8$$

es decir que si los sumandos tienen el mismo signo resulta la igualdad, si tienen distinto signo la desigualdad.

En general

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

3°) El valor absoluto del producto de dos factores es igual al producto de los valores absolutos de los factores

jemplo: Sean los números de distinto signo − 5 y 4

$$\left.\begin{array}{l} |(-5)\,.\,4| = |-20| = 20 \\ |-5|\,.\,|4| = 5 \times 4 = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow |(-5)\,.\,4| = |-5|\,.\,|4| \quad \text{pues } 20 = 20$$

Ejemplo: Sean los números de igual signo − 2 y − 6

$$\left.\begin{array}{l} |(-2)\,.\,(-6)| = |12| = 12 \\ |-2|\,.\,|-6| = 2 \times 6 = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow |(-2)\,.\,(-6)| = |-2|\,.\,|-6| \quad \text{pues } 12 = 12$$

En general

$$|a\,.\,b| = |a|\,.\,|b|$$

4°) Si $b \neq 0$

$$|a : b| = |a| : |b|$$

5°) Sean por ejemplo los números − 3 y 8

se verifica

$|-3| < 8$ observemos que $-3 < 8$ y que $-3 > -8$

que se puede escribir:

$$|-3| < 8 \iff -8 < -3 < 8$$

Análogamente, si los dos números son positivos:

$$|2| < 5 \iff -5 < 2 < 5$$

En general

$$|a| < b \iff -b < a < b$$

Conjuntos lineales

Se llama así a todo conjunto de números reales. El nombre lineal se debe a que todos los puntos que representan a los elementos del conjunto están sobre una recta, es decir alineados.

Ejemplos de conjuntos lineales:

$$A = \left\{ 1; -\frac{1}{2}; 3; 8 \right\}$$

$B = \{x / x \in R \wedge x > 0\}$

$C = \{x / x = 2\}$

Se los llama también conjuntos unidimensionales.

Conjunto lineal acotado superiormente

Un conjunto de números reales se dice que está acotado superiormente, si y solo si, todos sus elementos no superan a un cierto k llamado cota superior. Es decir:

C está acotado superiormente $\Longleftrightarrow \forall x \in C$ es $x \leqslant k$

Ejemplos:

1°) El conjunto de los números negativos está acotado superiormente, pues ningún número negativo supera a 0 ni a ningún número positivo, es decir son cotas superiores de ese conjunto $0;\ 2;\ \frac{8}{3};\ 19;$ etcétera.

2°) El conjunto constituido por todos los números $\frac{1}{n}$ donde n es natural, es decir:

$$A = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots\ldots\right\}$$

está acotado superiormente pues todos sus elementos son números menores o iguales que: $1;\ \frac{7}{3};\ \pi;\ 4{,}2;$ etc., que son cotas superiores.

Obsérvese:

1°) que la cota superior puede pertenecer o no al conjunto
2°) que si el conjunto está acotado superiormente hay infinitas cotas superiores

Extremo superior o supremo

En un conjunto acotado superiormente, se llama extremo superior o supremo a la menor de todas las cotas superiores.

Ejemplos:

Para el conjunto de los números negativos, el extremo superior es el número 0, pues es la menor de todas las cotas.

Para el conjunto $A = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\ldots\right\}$ el extremo superior es 1.

En general, si C es un conjunto acotado superiormente, E es su extremo superior o supremo, si y solo si:

1°) E es una cota superior de C.
2°) Si k es una cota superior cualquiera de C, debe ser $E \leqslant k$.

Todo conjunto de números reales que está acotado superiormente, tiene extremo superior que es un número real.

Máximo

Si el extremo superior o supremo pertenece al conjunto, se llama máximo de ese conjunto.

Así es el conjunto $A = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\ldots\right\}$ el extremo superior 1 pertenece al conjunto, por lo tanto 1 es el máximo del conjunto A.

En el conjunto de los números negativos el extremo superior ya hemos dicho que es 0 pero no pertenece al conjunto, por lo tanto el conjunto de los números negativos está acotado, pero no tiene máximo.

Conjunto acotado inferiormente

Un conjunto de números reales, se dice que está acotado inferiormente, cuando existe algún número real que no supera a ningún número del conjunto. Dicho número se llama cota inferior del conjunto.

Ejemplos:

1°) El conjunto de los números positivos está acotado inferiormente, pues 0 y todos los números negativos no superan a ninguno de los números del conjunto que son positivos.

2°) El conjunto ya considerado $A = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots\ldots\right.$ está acotado inferiormente, pues 0 y cualquier otro número negativo no superan a ningún número del conjunto.

En general:
C está acotado inferiormente $\Longleftrightarrow \forall x \in C$ es $x \geqslant h$ donde h es una cota inferior.

Si un conjunto está acotado inferiormente, existen infinitas cotas inferiores.

Extremo inferior o ínfimo

Es la mayor de todas las cotas inferiores.

mplo: en el conjunto de los números positivos el extremo inferior o ínfimo es el número 0. Tam-
n en el conjunto A el extremo inferior es 0.

En general:

Si C es un conjunto acotado inferiormente, s es el extremo inferior o ín-
fimo, si y solo si:

1°) s es una cota inferior de C
2°) si h es una cota inferior cualquiera de C debe ser $s \geqslant h$

Mínimo

Si el extremo inferior o ínfimo pertenece al conjunto se llama mínimo del conjunto.

emplo:

El conjunto $B = \{x / x \in R \ \text{ y } \ x \geqslant 2\}$ tiene mínimo que es el número 2.

En cambio, ni el conjunto de los números positivos, ni el conjunto A tienen mínimo, pues el extremo inferior de cada uno de ellos es 0 y no pertenece a ninguno de los dos conjuntos.

Ejercicios de aplicación

Decir si cada uno de los siguientes conjuntos de números reales está acotado superior o inferiormente; cuál es el extremo superior, el extremo inferior; y si existe cuál es el máximo y cuál el mínimo.

El conjunto de los números naturales de una cifra, es decir

el conjunto $C = \{x / x \in N \wedge x \leqslant 9\}$

Rta.: acotado superior e inferiormente. El extremo superior que es a la vez máximo es el número 9.
El extremo inferior que es a la vez mínimo es el número 1.

El conjunto $B = \{x / |x| \leqslant \dfrac{1}{n} \ ; n \in N\}$

Rta.: acotado superior e inferiormente. El supremo que es a la vez máximo es 1.
El ínfimo que es a la vez mínimo es -1.

3°) El conjunto $D = \{x / x = \dot{3} \ \wedge \ x > 0\}$
Rta.: acotado inferiormente. El extremo inferior es 3 que es mínimo.

4°) El conjunto $E = \{x / x \in R \ \wedge \ x > 10\}$
Rta.: acotado inferiormente. El extremo inferior es 10. No hay mínimo.

5°) El conjunto $F = \{x / x \in R \ \wedge \ x \leqslant -1\}$
Rta.: acotado superiormente. El extremo superior es -1, que es máximo.

6°) El conjunto $G = \{x / x$ número primo $\wedge \ 1 < x \leqslant 13\}$
Rta.: acotado superior e inferiormente. El extremo superior que es a la vez máximo es 13.
El extremo inferior es 1. No hay mínimo.

Intervalo

Dados dos números reales a y b tales que $a < b$ se llama intervalo cerrado $a \ ; b$ al conjunto de los números reales mayores o iguales que a y a la vez menores o iguales que b. Es decir, el número a el número b y todos los comprendidos entre a y b.

Gráficamente:

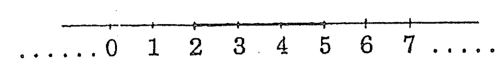
La notación que se suele usar es: $[a \ ; b]$ por lo tanto

$[a \ ; b] = \{x / x \in R \ \wedge \ a \leqslant x \leqslant b\}$

Los números a y b se llaman extremos del intervalo, y los otros: números o puntos interiores. La amplitud del intervalo es la diferencia $b - a$.

Ejemplo: $[2 \ ; 5]$. Los extremos son 2 y 5. Algunos puntos o números interiores son:

2,1 ; e ; 3 ; π ; 4,75 ; etcétera.



La amplitud es $5 - 2 = 3$.

Se llama *intervalo abierto*, cuando se excluyen los extremos, e intervalo semiabierto cuando se excluye uno de los extremos.
Algunos para el intervalo abierto utilizan la notación $(a \ ; b)$ otros $]a \ ; b[$ y otros $[\ a^+ \ ; b^-]$ que indica que se consideran los números a la derecha de a y a la izquierda de b.

Para los intervalos semiabiertos:

suelen utilizar $(a\ ;\ b]$ para indicar que se excluye a, o bien $]a\ ;\ b]$ o $[a^+\ ;\ b]$
suelen utilizar $[a\ ;\ b)$ para indicar que se excluye b, o bien $[a\ ;\ b^-]$ o $[a\ ;\ b[$

Gráficamente:

abierto	semiabierto excluye a	semiabierto excluye b
$a < x < b$	$a < x \leqslant b$	$a \leqslant x < b$
$[a^+\ ;\ b^-]$	$[a^+\ ;\ b]$	$[a\ ;\ b^-]$
o bien $(a\ ;\ b)$	o bien $(a\ ;\ b]$	o bien $[a\ ;\ b)$
o bien $]a\ ;\ b[$	o bien $]a\ ;\ b]$	o bien $[a\ ;\ b[$

Ejemplos:

-2 0 4	0 7	0 1 5
abierto	semiabierto se excluye 0	semiabierto se excluye 5
$-2 < x < 4$	$0 < x \leqslant 7$	$1 \leqslant x < 5$
$[-2^+;\ 4^-]$	$[0^+\ ;\ 7]$	$[1\ ;\ 5^-]$
o bien $(-2\ ;\ 4)$	o bien $(0\ ;\ 7]$	o bien $[1\ ;\ 5)$

Cuando digamos intervalo nos referimos al intervalo cerrado; en caso contrario "intervalo abierto", o cual de los extremos se excluye.

Símbolos $+\infty$ y $-\infty$

Agregaremos al conjunto de los números reales, los símbolos $+\infty$ y $-\infty$, que se leen respectivamente más infinito y menos infinito.

Se generaliza el concepto de intervalo así:

Toda la recta, o sea el conjunto de todos los números reales es el intervalo $(-\infty;+\infty)$

0

El conjunto de los números reales $x\ /\ x \geqslant a$ que constituyen una semirrecta de origen a es el intervalo $[a\ ;+\infty)$

a

Si en el conjunto anterior se excluye el extremo a, los números son $x\ /\ x > a$ el intervalos es $[a^+;+\infty)$.

a

El conjunto de los números reales $x\ /\ x \leqslant a$, constituyen la semirrecta de la izquierda

a el intervalo es $(-\infty;\ a]$

Si en el conjunto anterior se excluye el extremo a, es decir $x\ /\ x < a$ el intervalo es $(-\infty;\ a)$

a

Considerados los símbolos $+\infty$ y $-\infty$, aceptaremos que se satisfacen los siguientes resultados:

$$\forall x \text{ número real} \begin{cases} x + (+\infty) = +\infty \\ x + (-\infty) = -\infty \\ x - (+\infty) = -\infty \\ x - (-\infty) = +\infty \end{cases}$$

$$\forall x \text{ positivo} \begin{cases} x\ .\ (+\infty) = +\infty \\ x\ .\ (-\infty) = -\infty \end{cases}$$

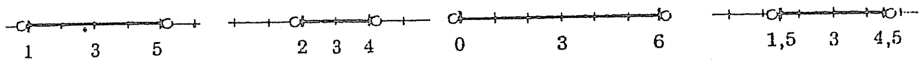
$$\forall x \text{ negativo} \begin{cases} x\ .\ (+\infty) = -\infty \\ x\ .\ (-\infty) = +\infty \end{cases}$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$
$$(+\infty)\ .\ (+\infty) = +\infty$$
$$(+\infty)\ .\ (-\infty) = -\infty$$
$$(-\infty)\ .\ (-\infty) = +\infty$$
$$(-\infty)\ .\ (+\infty) = -\infty$$

Entorno de un punto

Dado un punto, se llama entorno del mismo, a todo intervalo abierto que tiene ese punto, como punto medio.

Ejemplo: son entornos del punto 3

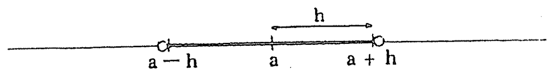


(1 ; 5) (2 ; 4) (0 ; 6) (1,5 ; 4,5)

Es decir que dado un punto, existen infinitos entornos del mismo, depende de la amplitud que se adopte.

Un entorno de a se indica con la notación: E_a; así en el ejemplo anterior uno cualquiera de los entornos de 3 que se han considerado se indica E_3.

En general:



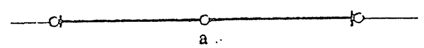
$E_a = (a-h\,;a+h)$ es un entorno de a de amplitud $2h$.

Entorno reducido de un punto

Cuando se excluye el punto a el entorno se dice entorno reducido de a.

Un entorno reducido de a se indica con la notación E'_a.

Gráficamente:



Ejemplo: (0,5 ; 3,5) excluido el número 2 es un E'_2.

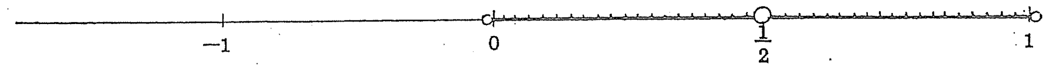
Punto de acumulación de un conjunto lineal

Un punto x_0 se dice de acumulación de un conjunto lineal C, cuando todo entorno reducido de x_0 tiene infinitos puntos de C. El punto x_0 puede pertenecer o no al conjunto.

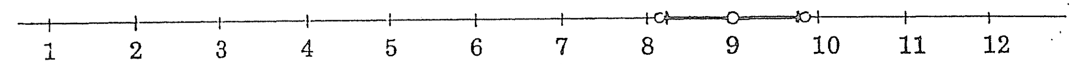
NOTA: En verdad, basta con exigir en la definición que exista un punto de C en todo entorno reducido de x_0 y luego se demuestra que existen infinitos.

Ejemplos:

1°) En el conjunto R de los números reales todos los puntos son de acumulación. En efecto, dado un número real cualquiera por ejemplo $\frac{1}{2}$ en todo entorno reducido de $\frac{1}{2}$ hay infinitos números reales por ejemplo $E'_{\frac{1}{2}} = (0\,;1)$ excluido $\frac{1}{2}$ existen infinitos números reales 0,2 ; 0,45 ; $\frac{3}{4}$; 0,8, etcétera.



2°) El conjunto de los números naturales no tiene puntos de acumulación. En efecto, dado un número natural por ejemplo 9 hay entornos reducidos de él en que no hay otro número natural.



Ejemplo de un entorno reducido de 9 E'_9 que se marca en la figura no hay ningún número natural.

Punto aislado de un conjunto lineal

Un punto x_1 que pertenece a un conjunto C, se llama aislado, cuando existe un entorno reducido de x_1 al cual no pertenece ningún elemento de C.

Simbólicamente:

x_1 es aislado de C $\iff x_1 \in C \;\wedge\; \exists E'_{x_1} \,/\, E'_{x_1} \cap C = \phi$

Ejemplo: el número 2 en el conjunto de los números naturales es aislado pues existe E_2' de amplitud menor que uno, en el que no hay ningún número natural.

También se puede definir: un punto x_1 que pertenece a un conjunto C, se llama aislado, cuando existe un entorno de x_1 al que no pertenece ningún otro punto.

2 Funciones

RESEÑA HISTORICA

El concepto de función fue evolucionando a través del tiempo. En un principio faltaron incluso simbolismos apropiados y cada matemático tenía nombres y abreviaturas propias, que dificultaban el intercambio de ideas. La primera vez que figura explícitamente la palabra función es en un trabajo del filósofo, matemático y economista Gottfreed Leibniz en 1962. Posteriormente se fue ajustando el concepto, hasta que: Peter Gustav Dirichlet establece el concepto de función como una correspondencia entre dos conjuntos de variables.

El Algebra estudia y resuelve problemas que determinan cantidades fijas, números, expresados por las incógnitas de las ecuaciones que plantean los problemas, así en $2x - 1 = x + 5$ la incógnita x representa únicamente el número 6 que es el que satisface la ecuación. Pero en la actividad comercial, en los laboratorios, en el dinamismo de la vida en sí, se presentan valores que cambian con el tiempo y con las condiciones; es preciso entonces, establecer relaciones entre entes variables vinculados entre sí. Ejemplos:

La relación que establece cómo varía la ganancia de una empresa, cuándo varía el precio de los productos que fabrica.

Cómo varía el número de los que miran un programa de televisión, al variar la hora en que éste se trasmite.

Cómo varía el franqueo de las encomiendas a determinado lugar, cuándo varía el peso de las mismas.

Un tipo particular de las relaciones entre variables son las funciones. Ejemplos:

A un plazo fijo de 30 días se da el 71%; el interés que recibe un inversor depende del capital que coloque; pues varía el capital y como consecuencia varía el interés; a cada capital corresponde un interés.

Para fabricar una medalla se necesita un cierto número de gramos de oro. Para fabricar distintas cantidades de medallas de ese tipo, se necesitan correspondientemente, distintas cantidades de oro. Es decir a cada número de medallas de ese tipo, corresponde un determinado número de gramos de oro.

Así como la Aritmética trabaja con números y resuelve problemas mediante operaciones como la adición, multiplicación, etc. que aplica a esos números; el Análisis Matemático trabaja en general, con funciones y resuelve problemas mediante operaciones que aplica a esas funciones.

Relaciones

1°) Si en el conjunto de los números reales, se hace corresponder a cada número el que es su duplo, es decir: a 1 le corresponde 2, a 5 le corresponde 10; a -2 le corresponde -4; a $-\frac{1}{3}$ le corresponde $-\frac{2}{3}$, etc., que se puede indicar:

$$1 \mapsto 2$$
$$5 \mapsto 10$$
$$-2 \mapsto -4$$
$$-\frac{1}{3} \mapsto -\frac{2}{3}$$

etc.

se dice que en el conjunto de los números reales, se ha establecido la **relación duplo de**. A cada número real le corresponde otro único número real que es su duplo. El número correspondiente se llama imagen del primero, así en esta relación duplo de, el número 2 es imagen de 1, el número 10 es imagen de 5, etcétera.

2°) Si en el conjunto de los números naturales, a cada número natural se le hace corresponder un múltiplo de él, por ejemplo a 3 le corresponden 6; 9; 15; 21; etc.; a 2 le corresponden los números pares, y así siguiendo se puede indicar algunos:

$$3 \mapsto \begin{cases} 6 \\ 9 \\ 15 \\ 21 \\ \text{etc.} \end{cases} \qquad 2 \mapsto \begin{cases} 4 \\ 6 \\ 8 \\ 12 \\ 20 \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Se dice que en el conjunto de los números naturales se ha establecido la **relación múltiplo de**. A cada uno de los números naturales le corresponden varios otros, todos aquellos son sus múltiplos. Es decir que en esta relación a cada número le corresponde más de una imagen, así:

3 tiene como imágenes 6; 9; 12; 15; 18; 21; etc.
2 tiene como imágenes 4; 6; 8; 10; 12; 14; 20; etc.

3°) Si en el conjunto C de los números enteros de una cifra:

$\{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

se le hace corresponder a cada número el que es su raíz cuadrada, se tiene

$$0 \mapsto \sqrt{0} = 0$$
$$1 \mapsto \sqrt{1} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$
$$4 \mapsto \sqrt{4} = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$$
$$9 \mapsto \sqrt{9} = \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases}$$

Se dice que en el conjunto C se ha establecido la **relación raíz cuadrada de**. Se observa que solamente a algunos números del conjunto, que son 0; 1; 4 y 9 les corresponden los que son sus raíces cuadradas.

4°) Si en el conjunto de los números enteros a cada número se le hace corresponder el que es su raíz cúbica, es decir:

$$1 \mapsto \sqrt[3]{1} = 1$$
$$-1 \mapsto \sqrt[3]{-1} = -1$$
$$8 \mapsto \sqrt[3]{8} = 2$$
$$0 \mapsto \sqrt[3]{0} = 0$$
$$-27 \mapsto \sqrt[3]{-27} = -3$$

etc.

Se dice que en el conjunto de los números se ha establecido la **relación raíz cúbica de**. Se observa que, solamente a aquellos números enteros que son cubos perfectos como 0; -1; 8; -8; etc. les corresponde otro número entero que es su raíz cúbica.

En estos ejemplos se observa que:

En algunos casos como en el 1° y en el 2° ejemplos a todos los elementos del conjunto les corresponde mediante la relación, una o más imágenes; en cambio, en el 3° y 4° ejemplos solamente a algunos elementos del conjunto les corresponden imágenes mediante la relación.

El conjunto formado por todos aquellos elementos que tienen correspondiente o imagen mediante la relación, constituye el dominio, o conjunto de definición, o conjunto existencial de la relación. En el primer ejemplo el dominio es el conjunto de todos los números reales, en el 2° es el conjunto de todos los números naturales; en el 3° es el conjunto formado por los números 0; 1; 4; 9; en el 4° es el conjunto formado por los números enteros que son cubos perfectos.

También se observa que en ciertos casos, como en el 1° ejemplo, todos los elementos del conjunto son imágenes de alguno, en cambio en otros, como en el 3° ejemplo solamente algunos: 0; 1; — 1; 2; — 2; 3; — 3 son imágenes. El conjunto formado por todas las imágenes se llama codominio, contradominio, o recorrido de la relación.

Dar una relación en un conjunto numérico, o de un conjunto de números en otro conjunto, es dar pares ordenados de números $(a\ ;\ b)$ tales que: a pertenece al dominio y b es imagen de a.

Así, en el 3° ejemplo, dar la relación raíz cuadrada en el conjunto C es equivalente a dar los pares ordenados (0 ; 0) (1 ; 1) (1 ; — 1) (4 ; 2) (9 ; 3) (9 ; — 3).

Entre los casos de relaciones que acabamos de ver hay una diferencia fundamental; en algunos de ellos, como en el ejemplo primero, relación duplo de, a cada elemento del dominio le corresponde una sola imagen, en efecto: a 1 le corresponde únicamente el número 2; a 5 le corresponde solamente 10 y así siguiendo; del mismo modo en el 4° ejemplo de raíz cúbica de: a 1 le corresponde solamente 1; a 8 le corresponde únicamente 2, etcétera.

A cada una de estas relaciones particulares en que a cada elemento del dominio le corresponde una sola imagen, un solo elemento del codominio, se la llama función.

En cambio, el 3° ejemplo $\sqrt{}$ no es función pues a un elemento del dominio, por ejemplo 9, le corresponden dos imágenes que son 3 y — 3.

FUNCIONES

Estudiaremos funciones en el conjunto de los números reales; se les dice funciones de R en R.

A los elementos del dominio, se los designa en general con x, es decir, x es una variable que puede tomar uno cualquiera de los valores del dominio.

A los elementos del codominio se los representa en general con y, vale decir que y es una variable que puede tomar uno cualquiera de los valores del codominio.

La función o sea las operaciones o reglas que hay que aplicar a cada valor de x del dominio, para obtener el valor único o imagen que le corresponde en el codominio, se designa en general con f; es decir con f se representa la ley aritmética, trigonométrica o arbitrariamente establecida pero tal que a cada valor de x le hace corresponder un solo valor de y.

Las notaciones más definidas para indicar que al aplicar la función f a un valor de x queda determinado el valor correspondiente de y son:

$x \mapsto f(x) \qquad y = f(x) \qquad f : x \mapsto f(x)$

Ejemplo, para la función $\sqrt[3]{}$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad x \mapsto \sqrt[3]{x} \qquad y = \sqrt[3]{x} \qquad f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$

La notación $y = f(x)$ que en un momento dado cayó en desuso establece claramente que al aplicar f a cada elemento x del dominio queda determinado el valor y que le corresponde en el codominio.

Entiéndase que f representa las operaciones o leyes que expresa la función, así en:

$f(x) = \sqrt[3]{x}$	la función es $\sqrt[3]{}$
$x \mapsto ln\ x$	la función es ln
$f(x) = x^2$	la función es la segunda potencia

Si al aplicar la función al número x_1 del dominio resulta el número y_1 del codominio queda determinado el par ordenado $(x_1\ ;\ y_1)$. De tal forma que en cada par ordenado que determina la función, el primer elemento tiene como imagen el segundo elemento.

Ejemplo en la función $\sqrt[3]{}$, como

$\sqrt[3]{8} = 2$ resulta el par ordenado (8 ; 2) que expresa que a 8 le corresponde la imagen 2.

Si dos pares ordenados que determina la función tienen la misma primera componente, las segundas componentes deben ser iguales.

Es decir, si un par es $(3\ ;\ y_1)$ y otro es $(3\ ;\ y_2)$ debe ser forzosamente $y_1 = y_2$ pues a cada elemento del dominio le corresponde una sola imagen.

La recíproca no es cierta, pueden ser iguales las segundas componentes y no las primeras.

Ejemplo 1°:

$f(x) = x^2$	
$f(2) = 4$	determina el par ordenado (2 ; 4)
$f(-2) = 4$	determina el par ordenado (— 2 ; 4)

Ejemplo 2°:

$f(x) = sen\ x$

$sen\ 0 = 0$	determina el par ordenado (0 ; 0)
$sen\ \pi = 0$	determina el par ordenado (π ; 0)
$sen\ 2\pi = 0$	determina el par ordenado (2π ; 0)

Vale decir que en algunas funciones, a distintos elementos del dominio, les corresponde la misma imagen, el mismo número del codominio.

Incluso hay funciones tales que a todos los números del dominio les corresponde el mismo número imagen.

Ejemplo:

$f(x) = 8 \Rightarrow$ a todo número real le corresponde el número 8, quedan así determinados los pares ordenados $(0\ ;8)\ (-1\ ;8)\ \left(\frac{3}{4}\ ;\ 8\right)$, etcétera.

Estas funciones reciben el nombre de **función constante.**

Como se elige arbitrariamente el número x_1 del dominio y queda determinado el número y_1 que le corresponde es que a x se le llama variable independiente y a y variable dependiente, pues su valor depende del elegido para x. Es obvio que a la función se la puede representar por cualquier otra letra distinta de f, las usadas más comúnmente son $\varphi\ ;g\ ;u\ ;v$. A la variable independiente x se la puede representar por otra ejemplo $t\ ;z$ y así se indica.

$f(x)\ ;\ \varphi(t)\ ;\ g(x)\ ;\ u(z)\ ;\ v(x)\ ;\ f(t)\ ;$ etcétera.

A veces se tabula la función, para ello se escriben en una columna los valores de x y en la otra los correspondientes de y de tal forma, que el valor de x y el de su imagen quedan en el mismo renglón.

Ejemplo $f(x) = x^3$

x	$f(x) = x^3$	
0	0	establece que a 0 le corresponde 0 o sea el par ordenado $(0\ ;0)$
2	8	establece que a 2 le corresponde 8 o sea el par ordenado $(2\ ;8)$
-1	-1	establece que a -1 le corresponde -1 o sea el par ordenado $(-1\ ;-1)$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{27}$	establece que a $\frac{1}{3}$ le corresponde $\frac{1}{27}$ o sea el par ordenado $\left(\frac{1}{3}\ ;\frac{1}{27}\right)$
.	.	
.	.	
.	.	
.	.	

En general

x	$y = f(x)$	
x_0	y_0	establece que a x_0 le corresponde y_0 o sea el par ordenado $(x_0\ ;y_0)$
x_1	y_1	establece que a x_1 le corresponde y_1 o sea el par ordenado $(x_1\ ;y_1)$
.	.	
.	.	
.	.	
x_n	y_n	establece que a x_n le corresponde y_n o sea el par ordenado $(x_n\ ;y_n)$
.	.	

que x_0 tiene como imagen y_0 se expresa diciendo que la función a x_0 le atribuye el valor y_0 o le hace corresponder el valor y_0. Así en el ejemplo $f(x) = x^3$ se dice que a 2 la función le atribuye el valor 8 o le hace corresponder el valor 8, o con menos precisión que en 2 la función toma el valor 8.

Determinación del dominio o conjunto existencial de una función

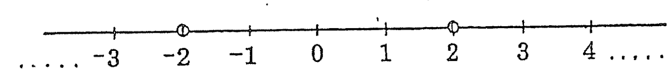
Como consideramos funciones de R en R es decir que los elementos x del dominio como los y del codominio son números reales, es fácil, en general, en cada caso determinar cuál es el dominio.

Ejemplo 1°:

$f(x) = 2x + 1$ El dominio es el conjunto de todos los números reales, pues cualquier número real que se lo multiplique por 2 y se le sume 1, da por resultado otro número real. Al dominio se le suele designar con la letra D, en este ejemplo $D = R$.

Ejemplo 2°:

$f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$ Como no es posible dividir por 0, x no puede tomar el valor 2 ni el valor -2, pues en esos casos el denominador resulta 0; en consecuencia para esta función el dominio es el conjunto de todos los números reales excluidos 2 y -2.

Gráficamente: 

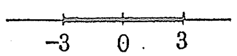
En símbolos $D = \{x/x \neq 2\ \wedge\ x \neq -2\}$ no indicamos que x es real, pues ya lo establecemos en general.

Ejemplo 3°

$\varphi(x) = +\sqrt{9 - x^2}$ Observe que es función pues para cada x se acepta como única imagen el resultado positivo de la raíz cuadrada. Para que la raíz cuadrada tenga resultado en el conjunto de los números reales, el radicando debe ser positivo o nulo, es decir: $9 \geqslant x^2$, así:

$$x = -1 \mapsto +\sqrt{9-1} = +\sqrt{8}$$
$$x = -2 \mapsto +\sqrt{9-4} = +\sqrt{5}$$
$$x = 3 \mapsto +\sqrt{9-9} = +\sqrt{0} = 0$$

Por lo tanto; el dominio es el conjunto de los números reales x que satisfacen $-3 \leqslant x \leqslant 3$. Gráficamente:



En símbolos: $D = \{x / -3 \leqslant x \leqslant 3\}$

De aquí en adelante, para evitar colocar el signo cada vez, cuando figure $\sqrt{\ }$ se considera solamente el resultado positivo.

Ejercicios de aplicación propuestos

Determinar el dominio de cada una de las siguientes funciones:

1°) $f(x) = x^2 - 9x + 10$ — Rta.: El conjunto de los números reales

2°) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ — Rta.: Todos los números reales excepto 0

3°) $f(x) = \left\{ (x\,;y) \,/\, y = \dfrac{3x+2}{1-x^2} \right\}$ — Rta.: Todos los números reales excepto 1 y -1

4°) $f : x \mapsto +\sqrt{1-x}$ — Rta.: $D = \{x/x \leqslant 1\}$

5°) $g(x) = 2\sqrt{x^2 - 9}$ — Rta.: $D = \{x/-3 \geqslant x \geqslant 3\}$

6°) $\varphi(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ — Rta.: $D = \{x/x \leqslant -4 \;\wedge\; x \geqslant 4\}$

7°) $\left(x\,; \dfrac{1}{2x-1}\right) \in f$ — Rta.: Todos los números reales, excepto $\dfrac{1}{2}$

8°) $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ — Rta.: Todos los números reales, excepto 1

9°) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$ — Rta.: Todos los números reales $x > 2$

10°) $f(x) = 2^{x+1}$ — Rta.: $D = R$

11°) $\varphi(x) = 3\,e^{2x}$ — Rta.: $D = R$

12°) $f : y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ — Rta.: El conjunto R, excepto el intervalo abierto $(2\,;3)$

13°) $f(x) = \sqrt{x^2 + 7x - 18}$ — Rta.: El conjunto R, excepto el intervalo abierto $(-9;2)$

14°) $\varphi(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 2x}$ — Rta.: El conjunto R, excepto 0 y 2

15°) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 5x + 4}}$ — Rta.: El conjunto de los números reales, excepto el intervalo $[-4\,; -1]$

16°) $y = \dfrac{2-x}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$ — Rta.: El conjunto R excepto el intervalo $[3\,;4]$

17°) $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x^2 + 5x - 3}$ — Rta.: El conjunto R excepto -3 y $\dfrac{1}{2}$

18°) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 6x + 5}$ — Rta.: El conjunto R, excepto 1 y 5

19°) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x-1}} - \sqrt{1-x^2}$ — Rta.: $\forall x/ \dfrac{1}{4} < x \leqslant 1$

20°) $\varphi(x) = \sqrt{4-x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ — Rta.: $\forall x/ \dfrac{1}{2} < x \leqslant 2$

21°) $f(z) = \sqrt{(1+3z)(2-z)}$ — Rta.: Los números reales del intervalo $\left[-\dfrac{1}{3}\,;\,2\right]$

22°) $f(x) = \sqrt{(1-x)(3+x)}$ — Rta.: El intervalo $[-3\,;1]$

23°) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ Rta.: $\forall x / -1 \leqslant x < 1$

24°) $\varphi(t) = \sqrt{\dfrac{2-t}{2+t}}$ Rta.: $\forall t / -2 < t \leqslant 2$

Según las expresiones que determinan a las funciones, éstas se clasifican en **algebraicas y trascendentes.**

Una función se dice algebraica, cuando está expresada por un número finito de operaciones algebraicas; sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potenciaciones, extracción de raíces.

Ejemplo de función algebraica:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 4x + \sqrt[3]{x}}{3x - 2}$$

Un caso particular de las funciones algebraicas, son las **funciones polinómicas**, que se llaman así porque están expresadas por un polinomio.

Ejemplo de función polinómica:

$$f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 7x - 6$$

En general:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

donde $a_0 ; a_1 ; \ldots ; a_n$ son números y se pone comúnmente P en vez de f para indicar que es polinómica.

Como veremos más adelante, con estas funciones polinómicas, se opera muy fácilmente.

Otro caso particular de las funciones algebraicas son las **funciones racionales**, que se llaman así porque se pueden expresar como el cociente o razón de dos funciones polinómicas.

Ejemplo de función racional:

$$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + x - 4}{2x^2 - 5x + 3}$$

En general se indica $f(x) = \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$ donde se indica con $P_1(x)$ y $P_2(x)$ **funciones polinómicas.**

Las funciones no algebraicas, se llaman **funciones trascendentes**; por ejemplo: la función logarítmica:

$f(x) = \ln x$ $\varphi(x) = \log x$ $g(x) = \log_2 (x)$

la función exponencial:

$f(x) = 2^x$ $\varphi(x) = e^{x^2+1}$ $u(x) = 3^{\frac{x+2}{x+1}}$ $g(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{5x}$

funciones trigonométricas

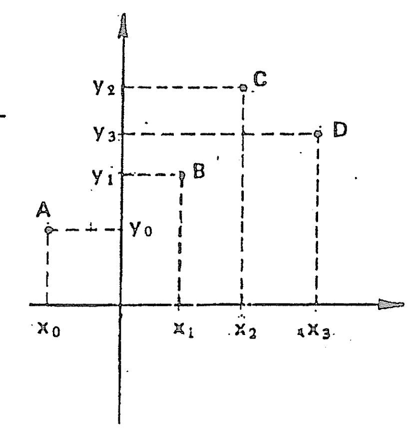
$f(x) = sen\, x$ $y = \cos x$ $\varphi(x) = tg\, \alpha$

Gráfica o Grafo de funciones

Como ya hemos dicho otras veces, se podría desarrollar cualquier capítulo de la Matemática, incluso en este caso el de Análisis sin hacer gráficos, pero las figuras ayudan mucho a la interpretación, por eso es que se recurre a ellas.

Dada una función $f(x)$ con la tabla correspondiente para algunos valores $x_0 ; x_1 ; x_2 ; x_3$ del dominio y un par de ejes coordenados ortogonales, se determinan los puntos que tienen por coordenadas los pares ordenados $(x_0 ; y_0)$ $(x_1 ; y_1)$ $(x_2 ; y_2)$ $(x_3 ; y_3)$. Estos puntos A; B, C; D pertenecen a la gráfica de la función.

x	$y = f(x)$
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3



bserve que es función pues para cada x se acepta como única imagen el resul-.do positivo de la raíz cuadrada. Para que la raíz cuadrada tenga resultado en el onjunto de los números reales, el radicando debe ser positivo o nulo, es decir: $\geqslant x^2$, así:

$= -1 \mapsto +\sqrt{9-1} = +\sqrt{8}$
$= -2 \mapsto +\sqrt{9-4} = +\sqrt{5}$
$= 3 \mapsto +\sqrt{9-9} = +\sqrt{0} = 0$

or lo tanto; el dominio es el conjunto de los números reales x que satisfacen $3 \leqslant x \leqslant 3$. Gráficamente:

$$D = \{x/-3 \leqslant x \leqslant 3\}$$

e aquí en adelante, para evitar colocar el signo cada vez, cuando figure $\sqrt{\ }$ se nsidera solamente el resultado positivo.

n propuestos

minio de cada una de las siguientes funciones:

$+ 10$ Rta.: El conjunto de los números reales

Rta.: Todos los números reales excepto 0

$y = \dfrac{3x+2}{1-x^2}$ Rta.: Todos los números reales excepto 1 y -1

x Rta.: $D = \{x/x \leqslant 1\}$

-9 Rta.: $D = \{x/-3 \geqslant x \geqslant 3\}$

6 Rta.: $D = \{x/x \leqslant -4 \ \wedge \ x \geqslant 4\}$

Rta.: Todos los números reales, excepto $\dfrac{1}{2}$

8°) $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ Rta.: Todos los números reales, excepto 1

9°) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$ Rta.: Todos los números reales $x > 2$

10°) $f(x) = 2^{x+1}$ Rta.: $D = R$

11°) $\varphi(x) = 3\,e^{2x}$ Rta.: $D = R$

12°) $f: y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ Rta.: El conjunto R, excepto el intervalo abierto $(2 ; 3)$

13°) $f(x) = \sqrt{x^2 + 7x - 18}$ Rta.: El conjunto R, excepto el intervalo abierto $(-9;2)$

14°) $\varphi(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 2x}$ Rta.: El conjunto R, excepto 0 y 2

15°) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + 5x + 4}}$ Rta.: El conjunto de los números reales, excepto el intervalo $[-4 ; -1]$

16°) $y = \dfrac{2-x}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$ Rta.: El conjunto R excepto el intervalo $[3 ; 4]$

17°) $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x^2 + 5x - 3}$ Rta.: El conjunto R excepto -3 y $\dfrac{1}{2}$

18°) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 6x + 5}$ Rta.: El conjunto R, excepto 1 y 5

19°) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x-1}} - \sqrt{1-x^2}$ Rta.: $\forall x / \dfrac{1}{4} < x \leqslant 1$

20°) $\varphi(x) = \sqrt{4-x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ Rta.: $\forall x / \dfrac{1}{2} < x \leqslant 2$

21°) $f(z) = \sqrt{(1+3z)(2-z)}$ Rta.: Los números reales del intervalo $\left[-\dfrac{1}{3} ; 2\right]$

22°) $f(x) = \sqrt{(1-x)(3+x)}$ Rta.: El intervalo $[-3 ; 1]$

Rta.: $\forall x / -1 \leqslant x < 1$

Rta.: $\forall t / -2 < t \leqslant 2$

expresiones que determinan a las funciones, éstas se clasifican en
trascendentes.

ión se dice algebraica, cuando está expresada por un número finito algebraicas; sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potenciacio- de raíces.

particular de las funciones algebraicas, son las **funciones polinómi-** ıan así porque están expresadas por un polinomio.

$$\cdot a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

$: \ldots ; a_n$ son números y se pone comúnmente P en vez de f para polinómica.

:emos más adelante, con estas funciones polinómicas, se opera muy

particular de las funciones algebraicas son las **funciones racionales,** así porque se pueden expresar como el cociente o razón de dos ıómicas.

En general se indica $f(x) = \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$ donde se indica con $P_1(x)$ y $P_2(x)$ **funciones polinómicas.**

Las funciones no algebraicas, se llaman **funciones trascendentes;** por ejemplo: la función logarítmica:

$f(x) = \ln x \qquad \varphi(x) = \log x \qquad g(x) = \log_2(x)$

la función exponencial:

$f(x) = 2^x \qquad \varphi(x) = e^{x^2+1} \qquad u(x) = 3^{\frac{x+2}{x+1}} \qquad g(x) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{5x}$

funciones trigonométricas

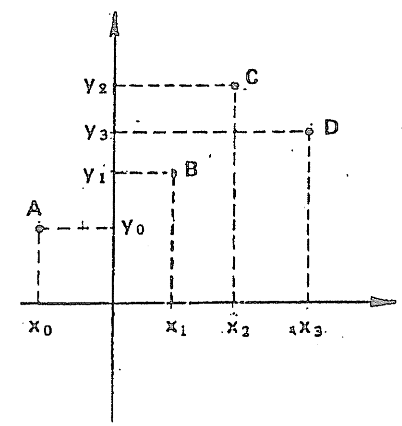
$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad y = \cos x \qquad \varphi(x) = \operatorname{tg} \alpha$

Gráfica o Grafo de funciones

Como ya hemos dicho otras veces, se podría desarrollar cualquier capítulo de la Matemática, incluso en este caso el de Análisis sin hacer gráficos, pero las figuras ayudan mucho a la interpretación, por eso es que se recurre a ellas.

Dada una función $f(x)$ con la tabla correspondiente para algunos valores $x_0 ; x_1 ; x_2 ; x_3$ del dominio y un par de ejes coordenados ortogonales, se determinan los puntos que tienen por coordenadas los pares ordenados $(x_0 ; y_0)$ $(x_1 ; y_1)$ $(x_2 ; y_2)$ $(x_3 ; y_3)$. Estos puntos A; B; C; D pertenecen a la gráfica de la función.

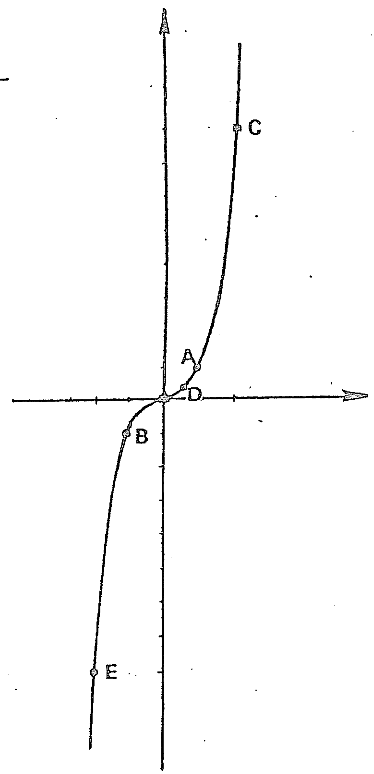
x	$y = f(x)$
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3



Pero estos son puntos aislados, y con este procedimiento es imposible obtener todos los puntos cuyas coordenadas están vinculadas por la función; por ello para lograr la gráfica o grafo de la función se procede así: primero se dibujan algunos puntos aislados según se ha indicado, y luego el estudio de las propiedades o características de la función, permite determinar cuál es la gráfica total.

Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^3$ llamada parábola cúbica. Se observa que:

x	$y = x^3$
0	0
1	1
-1	-1
2	8
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
-2	-8
.	.
.	.
.	.



1°) Como a $x = 0$ le corresponde $y = 0$ la gráfica pasa por el origen.

2°) $\forall x > 0$ es $x^3 = y > 0$, abscisa y ordenada positiva quiere decir que hay puntos de la gráfica en el primer cuadrante.

3°) $\forall x < 0$ es $x^3 = y < 0$, abscisa y ordenada negativa quiere decir que hay puntos de la gráfica en el tercer cuadrante.

4°) A valores opuestos de x, corresponde valores opuestos de y, en efecto: $x = 2 \quad y = 8$; $x = -2 \quad y = -8$ esto implica que la gráfica es simétrica con respecto al origen.

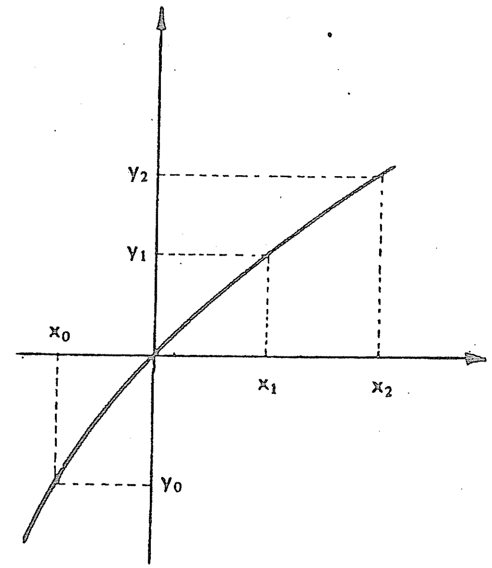
5°) A medida que se hacen mayores los valores absolutos de x, también se hacen mayores los valores absolutos de los correspondientes de y.

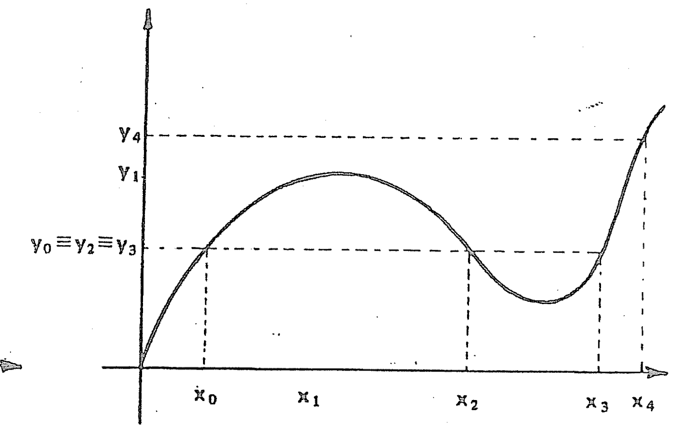
Teniendo en cuenta estas consideraciones y marcando los puntos aislados 0 (0 ; 0) A (1 ; 1) B (−1 ; −1) C (2 ; 8) D $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$ E (−2 ; −8) se dibuja la gráfica de la función

$y = x^3$ que es la de la figura.

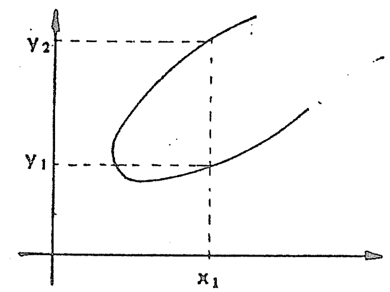
Nota: De acuerdo con la definición de función, toda perpendicular al eje x trazada por un punto del dominio, debe cortar a la gráfica de la función en un solo punto.

Ejemplos:





En cambio, la siguiente gráfica no corresponde a una función, pues a algunos valores del dominio, por ejemplo x_1, le corresponden 2 imágenes y_1 e y_2.

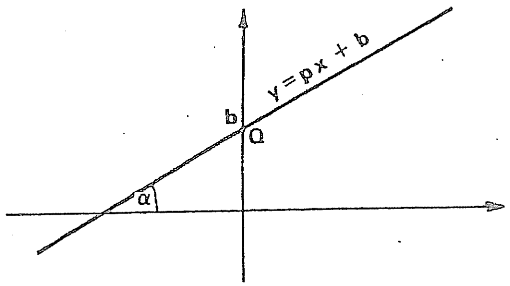


Gráficas de las funciones polinómicas de 1° y 2° grado

La **función polinómica de 1° grado**, se llama también *función lineal*, es de la forma

$$\boxed{y = px + b}$$

Como se recuerda en la sinopsis de este texto la gráfica de esta función es una recta, tal que:



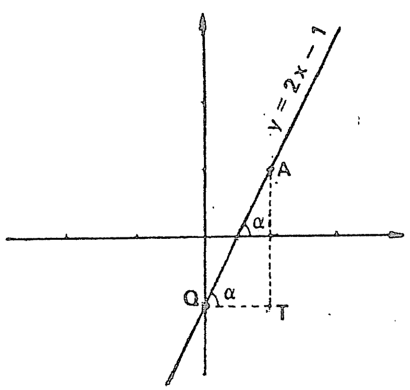
1°) El número b es la ordenada del punto Q en que la recta corta al eje y; en efecto, para $x = 0$ corresponde $y = b$.
2°) El número p es la pendiente de la recta (por eso elegimos la inicial de pendiente) es decir la tangente del ángulo α que determina el semieje positivo x con la recta en el sentido contrario al de las agujas del reloj, comprendido entre 0° y 180°.

De ahí que el procedimiento que aconsejamos para determinar la recta, gráfica de la función lineal es:

1°) Determinar el punto Q en que la recta corta al eje y.
2°) Mediante la pendiente p determinar otro punto A de la recta. La recta QA es la gráfica de la función.

Ejercicios resueltos

Ejemplo: $y = 2x - 1$



1°) Como $b = -1$ la ordenada del punto en que la recta corte al eje y es -1, se determina así el punto Q.
2°) Como la pendiente es $p = 2$ a partir de Q se lleva 1 unidad horizontalmente hacia la derecha, se determina el punto T; a partir de T 2 unidades en la vertical hacia arriba y se obtiene A. La gráfica de esta función es la recta QA; en efecto, pasa por Q y la pendiente es $tg\ \alpha = \frac{\overline{AT}}{\overline{QT}} = 2$.

Obsérvese que a partir de Q, se pueden llevar 2 unidades hacia la derecha, 4 hacia arriba, o 3 hacia la derecha y 6 hacia arriba, etc., de tal forma que la razón entre el segmento vertical y el horizontal sea siempre 2 que es la pendiente.

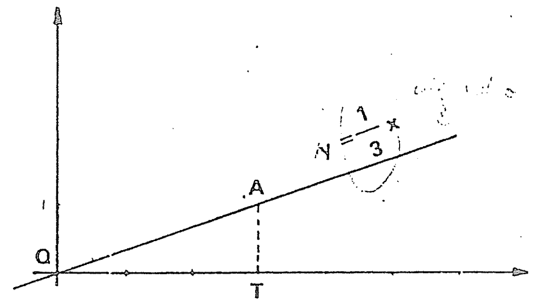
Nos parece que este procedimiento fija el concepto de pendiente de la recta, que es tan importante para los problemas de aplicación de la derivada de una función en un punto, que veremos más adelante.

Por otra parte, si alguien quiere puede hacer un cuadro de valores y obtener las coordenadas de otros puntos de la recta, en este caso:

x	y
2	3
-1	-3

Si $b = 0$ la recta gráfica de la función pasa por el origen.

Ejemplo: $y = \frac{1}{3}x$

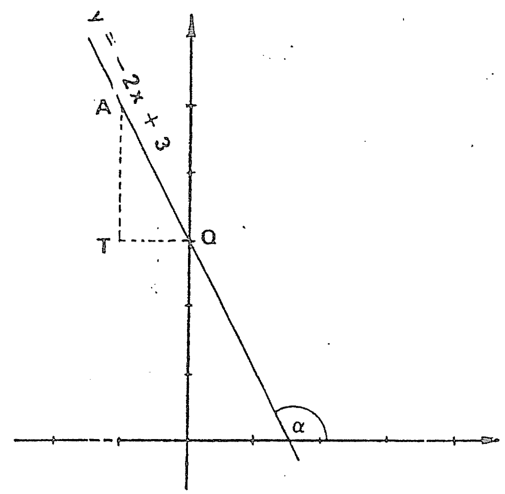


Como $b = 0$ el punto Q coincide con el origen. Como la pendiente $p = \frac{1}{3}$, se puede considerar una unidad hacia la derecha de Q y $\frac{1}{3}$ hacia arriba, pero para evitar fracciones, es más cómodo considerar 3 unidades hacia la derecha de Q y 1 hacia arriba, en efecto, $\frac{\overline{AT}}{\overline{QT}} = \frac{1}{3}$ la recta QA es la gráfica de $y = \frac{1}{3}x$.

Nota: Si, como en los ejemplos dados, la pendiente es positiva, es decir $p > 0$ el ángulo α es agudo. Si es negativa, es decir $p < 0$ el ángulo α es obtuso.

Ejemplo de pendiente negativa

$y = -2x + 3$



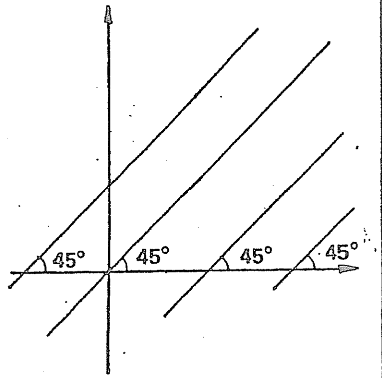
Para obtener la gráfica se procede así: como $b = 3$ se determina el punto Q sobre el eje y.

Como la pendiente $p = -2$, es negativa, se considera a partir de Q 1 unidad horizontalmente hacia la izquierda, se obtiene T; a partir de T 2 unidades en la vertical hacia arriba y se determina el punto A. La recta AQ es la gráfica de la función $y = -2x + 3$.

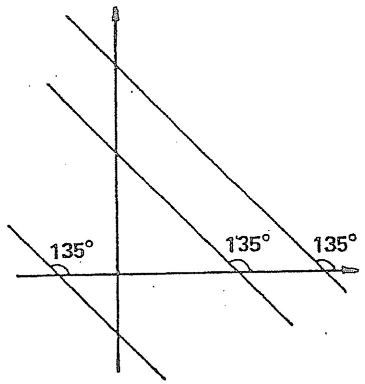
En efecto, pasa por Q y la pendiente es $tg\ \alpha = -2$.

En particular:

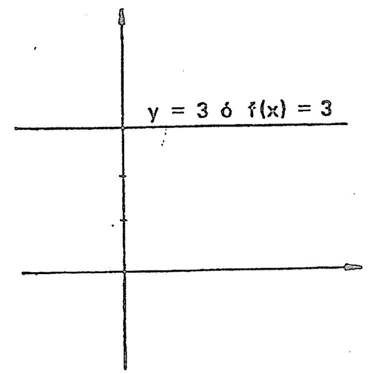
$p = 1 \iff \alpha = 45°$



$p = -1 \iff \alpha = 135°$



$p = 0 \iff$ recta $\parallel$ eje x
función constante



Ejercicios de aplicación propuestos

Hallar la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

1) $f(x) = 3x + 4$

2) $g(x) = 2x - 1$

3) $f(x) = \frac{1}{3}x + 3$

4) $y = \frac{1}{2}x - 2$

5) $y = 4x - \frac{3}{2}$

6) $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$

7) $y = -3x - 3$

8) $y = -2x + 1$

9) $y = -\frac{5}{4}x + \frac{5}{2}$

10) $\varphi(x) = -\frac{2}{3}x + 2$

11) $g(x) = -x + 1$

12) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{2}$

13) $\varphi(x) = 2x$

14) $f(x) = x + 4$

15) $\varphi(x) = -x + 2$

16) $f(x) = x$

17) $y = -x$

18) $f(x) = -\frac{1}{2}x$

19) $f(x) = \frac{3}{2}x$

20) $y = \frac{1}{3}x$

21) $y = \frac{2}{5}x$

22) $y = 2$

23) $f(x) = 5$

24) $\varphi(x) = -3$

Hallar la gráfica de las siguientes rectas:

1) $x = 2$

2) $x = 5$

3) $x = -3$

4) $x = -1$

5) $x = \frac{5}{2}$

6) $x = -\frac{6}{5}$

APLICACIONES DE LA FUNCION DE 1° GRADO A PROBLEMAS SIMPLES DE ECONOMIA

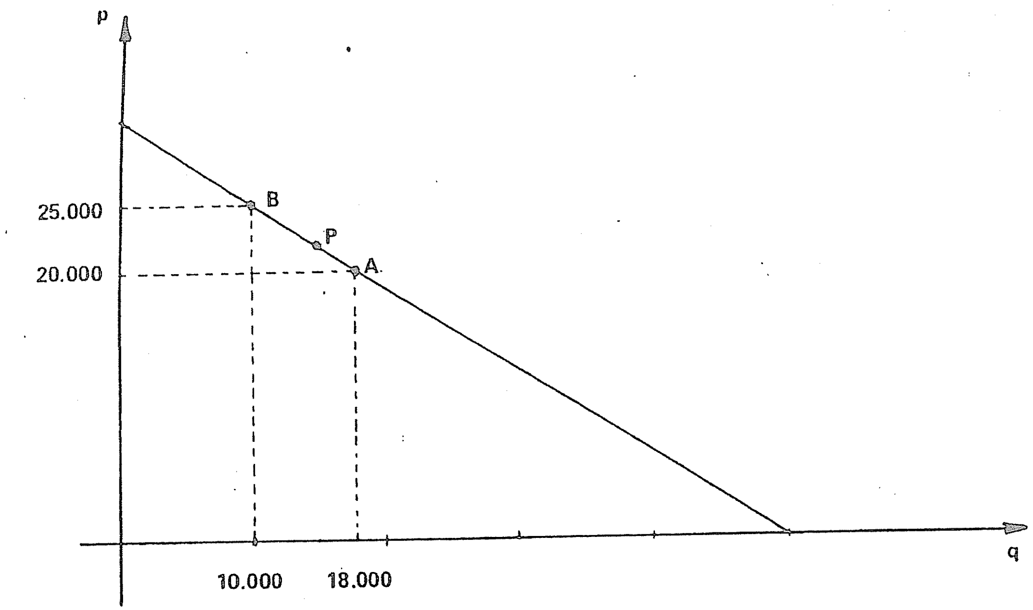
En algunos casos, los problemas de oferta y demanda se expresan mediante funciones de primer grado.

Problemas de demanda. En general, a medida que el precio de un artículo aumenta, la cantidad que se solicita o demanda de ese artículo disminuye, e inversamente, a medida que el precio se reduce, aumenta la cantidad demandada. Por lo tanto, la cantidad que se demanda de un bien es función de su precio. En el caso en que la demanda es una función lineal del precio, la gráfica debe ser una recta de pendiente negativa. Es costumbre en Economía considerar los precios del artículo en el eje y de ordenadas y las correspondientes cantidades que se solicitan del artículo en el eje x. Se comprende que como el precio es positivo o nulo y la cantidad que se demanda positiva o nula, en la gráfica se considera solamente la parte que corresponde al primer cuadrante.

Problema resuelto

Ejemplo: se ha verificado estadísticamente que si el precio de cada encendedor es de \$ 20.000, la demanda es de 18.000 unidades; en cambio, si el precio es de \$ 25.000, la demanda es de 10.000 unidades. Se pide: 1°) hallar la expresión analítica de la función de demanda supuesta lineal; 2°) hallar la cantidad demandada si el precio de cada encendedor es de \$ 22.000; 3°) hacer los gráficos correspondientes.

Como la función demanda se supone lineal, hay que establecer la ecuación de la recta determinada por los puntos A (18.000 ; 20.000) y B (10.000 ; 25.000).



La ecuación de la recta determinada por dos puntos de coordenadas

$(x_0 \; ; y_0) \;\wedge\; (x_1 \; ; \; y_1)$ es: $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0}$

Como los precios es costumbre indicarlos con p_0 y p_1 y la demanda con q_0 y q_1 para el ejemplo se tiene:

$$\frac{q - q_0}{q_1 - q_0} = \frac{p - p_0}{p_1 - p_0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{q - 18.000}{10.000 - 18.000} = \frac{p - 20.000}{25.000 - 20.000}$$

o sea $\dfrac{q - 18.000}{- 8.000} = \dfrac{p - 20.000}{5.000}$ $\qquad q - 18.000 = (- 8.000)\,\dfrac{p - 20.000}{5.000}$

$$q = -\frac{8}{5}p + \frac{8 \times 20.000}{5} + 18.000 \qquad q = -\frac{8}{5}p + 50.000$$

que es la expresión de la demanda en función del precio.

Si el precio es $p = 22.000$ la demanda es:

$$q = -\frac{8}{5} \cdot 22.000 + 50.000 \Longrightarrow q = 14.800$$

Corresponde al punto P del gráfico.

Observación. A veces es indispensable que la cantidad demandada sea un número entero y el resultado no lo es, en tal caso está comprendido entre dos enteros, y se elige como solución uno de ellos, el que más convenga de acuerdo con las condiciones del problema.

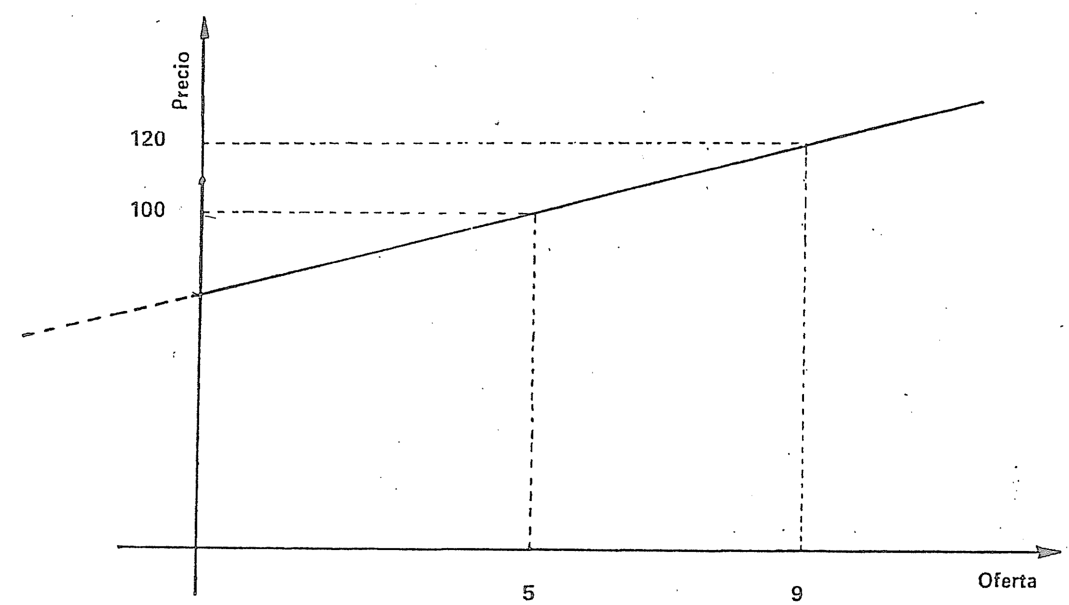
Problemas de oferta

Si la oferta está expresada por una función lineal del precio, la recta que es la gráfica, tiene pendiente positiva, pues al aumentar el precio que se paga por un artículo aumenta la cantidad que se oferta para la venta e inversamente.

Problema resuelto

Ejemplo. Cuando se paga 100 dólares por cada camión para transportar fruta, se ofrecen 5 camiones; si se paga 120 dólares por cada uno se ofrecen 9 camiones. Encontrar la función oferta.

Hay que encontrar la ecuación de la recta determinada por los puntos (5 ; 100) (9 ; 120).



$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \implies \frac{x-5}{9-5} = \frac{y-100}{120-100} \implies \frac{x-5}{4} = \frac{y-100}{20}$$

se simplifica: $x - 5 = \dfrac{y-100}{5} \implies 5x - 25 = y - 100$

$$5x = y - 100 + 25$$

$$x = \frac{1}{5}y - 15.$$

Como la oferta se indica en general con o y el precio con p

$$o = \frac{1}{5}p - 15$$

Se observa en la función y en el gráfico que a medida que se paga menos por cada camión el número de oferta de los mismos disminuye, hasta llegar el momento en que al pagar 75 dólares por cada camión, no se ofrece ninguno.

Punto de equilibrio

Se llama punto de equilibrio en el mercado al punto que corresponde al precio para el cual, para un determinado bien, la cantidad ofertada de dicho bien es igual a la cantidad demandada. Se comprende que el precio de equilibrio corresponde a la ordenada del punto de intersección de las gráficas de oferta y demanda, siempre que para las respectivas variables de ambas funciones se utilice la misma unidad.

Problema resuelto

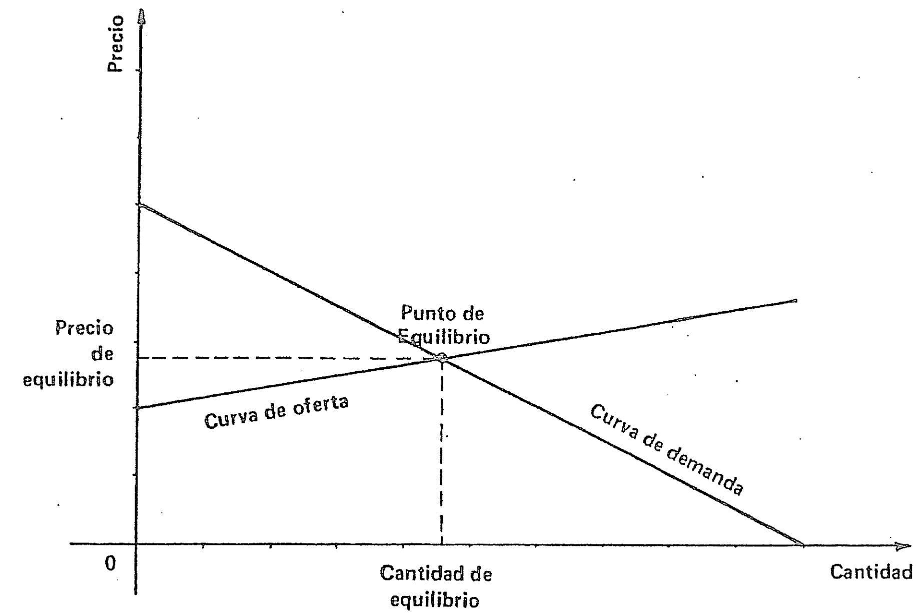
Ejemplo:

En el mercado de aves se ha investigado que si p es el precio por kg de pollo eviscerado la función oferta es $o = 6p - 12$
mientras que la demanda es $q = -2p + 10$.

Encontrar el precio que corresponde al punto de equilibrio.

Resolver el problema es encontrar la ordenada del punto común a las dos ecuaciones anteriores.

$$6p - 12 = -2p + 10 \implies 8p = 22 \implies p = 2{,}75$$



En la gráfica también se observa que el precio de equilibrio es \$ 2,75, que corresponde a una demanda de 4,50. Como ya se dijo, a veces es indispensable que la cantidad demandada u ofertada sea un número entero, en tal caso se eligen los enteros más próximos a los que corresponden al punto de equilibrio.

Problemas propuestos de demanda

1°) Representar la curva de demanda en el mercado de gomas de borrar, que responde a la función $q = 200 - 4p$, donde q representa la cantidad comprada, cuando cada goma de borrar se vende a un precio p.

2°) Se sabe que cuando el kg de pescado se vende a \$ 1.000, se consume en cierto barrio de Buenos Aires 500 kg diarios.
Si el precio es de \$ 2.000, se consumen 200 kg diarios. Hallar la función de la demanda de pescado, en el barrio en cuestión.

Rta.: $q = -93p + 800$

3°) Si las funciones de demanda de pescado de dos consumidores son, respectivamente:

$q_1 = 20 - 4p$

$q_2 = 30 - 6p$

Hallar: 1°) la gráfica de cada una de esas funciones de demanda de pescado individual; 2°) a partir de ellas hallar la función analítica de la función de demanda de mercado.

Rta.: $q = -10p + 50$

4°) Si la función de demanda del mercado de calculadoras es $q = -\frac{p}{2} + 10.000$, se pide:

1°) Hacer la gráfica de la función. 2°) Calcular la cantidad demandada de calculadoras para un precio unitario de \$ 50.000. 3°) Determinar si pertenecen a la función demanda los valores

a) $q = 30.000$; b) $q = -20.000$; c) $q = 150.000$; d) $q = 100.000$

Rta.: 2°) Para un precio unitario de \$ 50.000 la demanda es 75.000.
3°) Pertenecen a la función los valores $q = 30.000$ y $q = 100.000$, porque son positivos y dan precios positivos.

5°) Si la función de demanda del mercado de lanas es una función lineal y la venta que le representa gráficamente tiene pendiente $-\frac{4}{5}$ y se sabe además que para un precio de \$ 30,00 el kg se demandan 6.000 kg de lana, hallar:

1°) La expresión analítica de dicha función de demanda. Graficar.
2°) Para qué precio la cantidad de demanda es de 38.500 kg y para qué precio es nula.

Rta.: 1°) $q = -\frac{5}{4} p + 43.500$.

2°) para p = \$ 4.000 es q = 38.500 kg,
para p = \$ 34.800 es $q = 0$.

Problemas propuestos de oferta

1°) Se sabe que si el precio de mercado de automotores medido en miles de pesos es 10.000, se ofrecen en venta 400 unidades, y que por cada aumento de 1.000 en el precio, se ofrecen en mercado 50 autos más.
Hallar la expresión analítica de la oferta.

Rta.: $o = 0{,}05\, p - 100$

2°) Si en el mercado de ventiladores la función oferta es $o = \frac{3}{4} p - 6.000$, se pide:

1°) Hacer el gráfico de la función.
2°) Calcular si hay algún precio para el cual la cantidad ofertada de ventiladores es nula.
3°) Calcular las ofertas que correspondan a los precios de \$ 16.000; \$ 32.000; y determinar en el gráfico los respectivos puntos A ; B.

Rta.: 2°) $p = 8.000$.
3°) oferta 6.000 para precio \$ 16.000
A (6.000 ; 16.000)
oferta 18.000 para precio \$ 32.000
B (18.000 ; 32.000)

3°) Si la función de oferta del mercado del dólar es
$o = 2\, p + 1.500$
Se pide:

1°) Hacer el gráfico de la función.
2°) Determinar para qué intervalo de precio hay oferta.
3°) Calcular la cantidad ofertada en dólares para un precio de \$ 1.000 y para un precio de \$ 3.000.

Rta.: 2°) El intervalo de oferta es $[0\,;\infty]$
3°) Para precio \$ 1.000 la oferta es 3.500.
Para precio \$ 3.000 la oferta es 7.500.

Problemas de punto de equilibrio

1°) En el mercado de dinero de Buenos Aires, los oferentes están dispuestoa a prestar su dinero, de acuerdo con la siguiente función $o = 30\, p + 100$ donde o es la cantidad ofrecida en dinero y p es la tasa de interés efectiva anual, expresada en tanto por ciento. A su vez, los demandantes aceptan tomar el dinero aplicando la función $q = 5.000 - 10\, p$.
Hallar el punto de equilibrio del mercado de dinero de Buenos Aires.

Rta.: $p = 122{,}5$; $q = 3775$

2°) Resolver el problema análogo al anterior, cuando:

la función oferta es $o = 40\, p - 100$
la función demanda es $q = 2.000 - 20\, p$

Rta.: $p = 35$; $q = 1.300$

3°) Resolver el problema análogo al anterior, cuando

la función oferta es $o = 100 - 10.000$
la función demanda es $q = 8.000 - 200\, p$

Rta.: equilibrio sin sentido, pues resolviendo el sistema se llega a la cantidad negativa $q = -4.000$.

4°) Se ha observado en el mercado de televisores que para un precio de \$ 500.000, se solicitan 4.500 televisores y se ofrecen 1.000; mientras que si el precio es de \$ 800.000 las unidades demandadas y ofertadas son respectivamente 1.500 y 4.000. Si las funciones de oferta y de demanda son lineales ¿para qué precio la cantidad demandada es igual a la ofertada?

Rta.: p = \$ 600.000

5°) Si $q = -4\, p + 5.700$ es la función de demanda en el mercado del pan francés; además la función de oferta es lineal y tal que si el precio del pan francés es de \$ 400 el kg, la oferta es de 5.000 kg y si el precio es de \$ 600 el kg la oferta es de 6.000 kg. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de equilibrio?

Rta.: $o = 4.500$ kg
p = \$ 300

APLICACION DE LA FUNCION DE 1° GRADO A LA FISICA

Un movimiento se dice uniforme, cuando el camino recorrido por el móvil es proporcional al tiempo que emplea en recorrerlo.

La fórmula es:

$$l = v\,t$$

donde con l se expresa el camino recorrido, con t el tiempo empleado en recorrerlo, y con v la velocidad constante.

Si al empezar a contar el tiempo, el móvil se encuentra a una distancia l_0 del origen, el camino recorrido al cabo del tiempo t es:

$$l = l_0 + v\,t$$

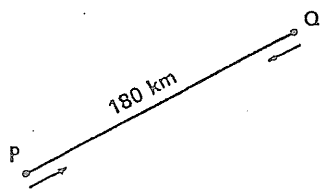
Estas fórmulas expresan funciones de primer grado en la variable independiente t es decir $l = f(t)$.

Con ellas se resuelven distintos problemas.

Problema resuelto

Ejemplo:

La distancia entre los puntos P y Q es de 180 km. Un móvil a parte de P en dirección a Q con una velocidad constante de 40 km por hora. Simultáneamente, otro móvil b parte de Q hacia P con una velocidad constante de 50 km por hora. Calcular: 1) Después de cuánto tiempo se encuentran los dos móviles.



2) A qué distancia de P.

Al cabo de t horas, el móvil a se encuentra a una distancia l_1 de P igual a:

$$l_1 = 40\,t$$

En el mismo instante, el móvil b se encuentra a una distancia l_2 de P igual a:

$$l_2 = 180 - 50\,t$$

Cuando se encuentran los dos móviles, estas distancias deben ser iguales, es decir:

$$40\,t = 180 - 50\,t \Rightarrow 90\,t = 180 \Rightarrow t = 2$$

Luego, los dos móviles se encuentran a las 2 horas de partir.

En ese momento, la distancia del punto de encuentro a P es

$$l_1 = 40 \times 2 = 80$$

o sea 80 km de P.

La FUNCION POLINOMICA DE 2° GRADO es de forma:

$$\boxed{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c} \quad \text{donde } a \neq 0$$

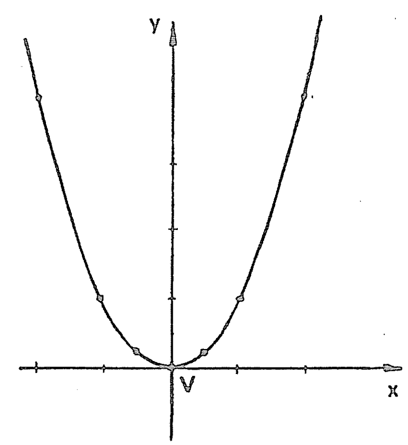
Como se indica en el capítulo de sinopsis de este texto, su gráfica es una parábola de eje paralelo al eje y la ubicación del vértice, el crecimiento más o menos rápido, y que la concavidad sea hacia arriba o hacia abajo, depende de los valores de los coeficientes a, b, c. El único coeficiente que no puede ser 0 es a pues entonces no sería un polinomio de segundo grado.

Ejercicios resueltos

1° Caso: $a > 0 \;\wedge\; b = c = 0$

Lo más simple cuando $a = 1$ es $y = x^2$

La tabla con algunos valores es:



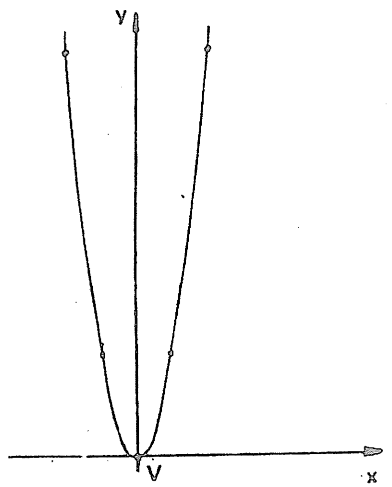
x	$y = x^2$
0	0
1	1
-1	1
2	4
-2	4
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

El vértice es el origen.

Tanto para x positivo como para x negativo la ordenada y es siempre positiva, por lo tanto, excepto el vértice, la curva está en el semiplano superior con respecto al eje x.

Para valores opuestos de x corresponden iguales valores de y; luego es simétrica con respecto al eje de ordenadas. La concavidad es hacia arriba.

Si $a > 1$ Ejemplo: $a = 3$ se tiene $y = 3x^2$

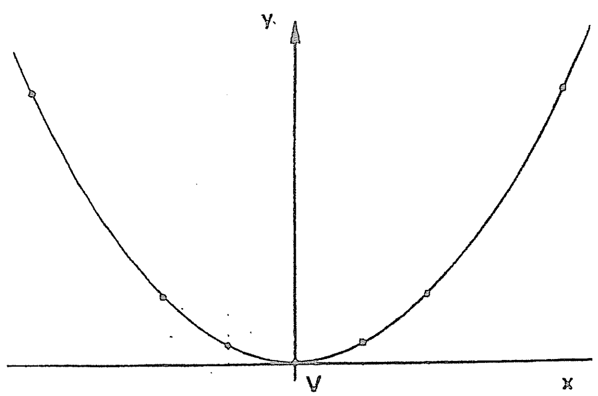


x	$y = 3x^2$
0	0
1	3
-1	3
2	12
-2	12

La curva tiene las mismas características que la parábola anterior, pero crece más rápidamente, es más cerrada.

Cuanto mayor es el coeficiente positivo a, tanto más rápido es el crecimiento de y; tanto más cerrada es la curva.

Si $a < 1$ Ejemplo: $a = \frac{1}{4}$ se tiene: $y = \frac{1}{4}x^2$



x	$y = \frac{1}{4}x$
0	0
1	$\frac{1}{4}$
-1	$-\frac{1}{4}$
2	1
-2	1
4	4
-4	4

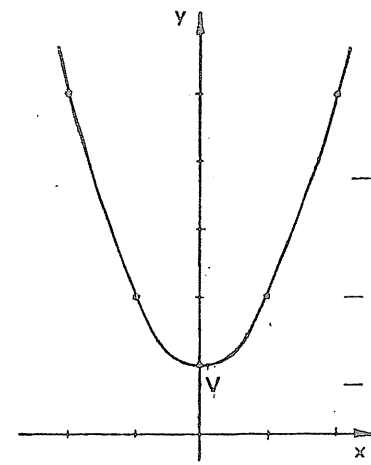
Las mismas características que la parábola de la primera figura, pero más abierta, de crecimiento más lento.

Cuando menor es el coeficiente a, tanto más lento es el crecimiento de y, tanto más abierta es la curva.

2° Caso: $a > 0$ y el único coeficiente nulo es b, es decir $b = 0$.

Ejemplos:

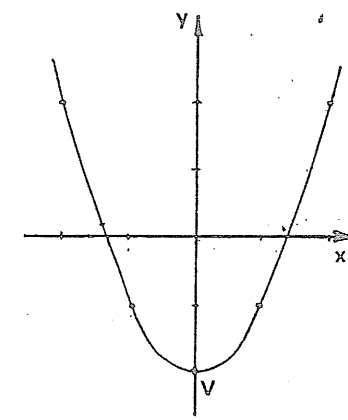
$y = x^2 + 1$



x	$y = x^2 + 1$
0	1
1	2
-1	2
2	5
-2	5

La misma parábola de la primera figura pero trasladada 1 unidad hacia arriba. El vértice está en (0 ; 1).

$y = x^2 - 2$



x	$y = x^2 - 2$
0	-2
1	-1
-1	-1
2	2
-2	2

La misma parábola de la primera figura pero trasladada 2 unidades hacia abajo. El vértice está en (0 ; -2).

3° Caso: el coeficiente $a > 0$ y $b \neq 0$

La abscisa del vértice es $x_V = \frac{b}{-2a}$. Una vez que se tiene la abscisa, para obtener la ordenada del vértice se calcula la imagen de la misma.

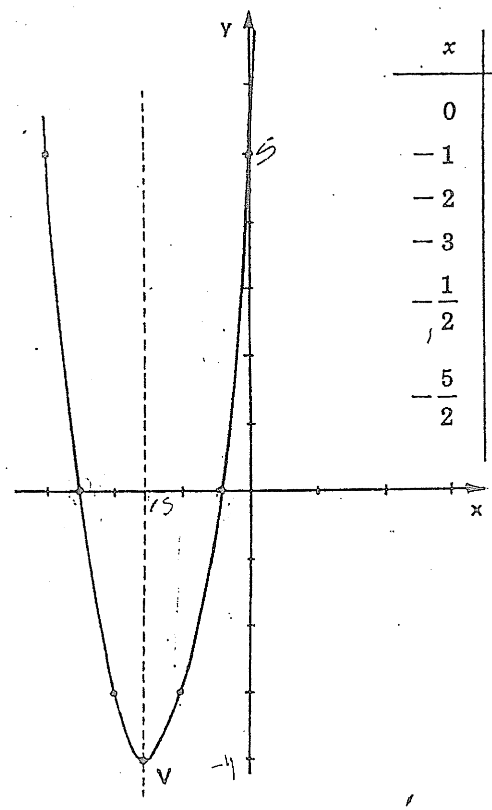
Ejemplo: $y = 4x^2 + 12x + 5$ $a = 4$ $b = 12$ $c = 5$

La abscisa del vértice es $x_V = \frac{b}{-2a} = \frac{12}{-8} = -1{,}5$. Para calcular la ordenada del vértice, se reemplaza x por $-1{,}5$ en la función, y se tiene

$$y_V = 4(-1{,}5)^2 + 12(-1{,}5) + 5 = -4$$

Por lo tanto, el vértice es V($-1{,}5$; -4). El eje es $x = -1{,}5$

Se puede hacer una tabla con otros valores para dibujar la curva.



x	$y = 4x^2 + 12x + 5$
0	5
-1	-3
-2	-3
-3	5
$-\frac{1}{2}$	0
$-\frac{5}{2}$	0

Se observa que a

$$x = -\frac{1}{2} \wedge x = -\frac{5}{2}$$

les corresponde $y = 0$, estos valores de x se llaman ceros de la función, corresponden a los puntos en que la curva corta al eje x, son las raíces de la ecuación que resulta al igualar a 0 el polinomio que expresa la función, en efecto:

$$4x^2 + 12x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{8} =$$

$$= \frac{-12 \pm 8}{8} \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

La abscisa del vértice se puede obtener como promedio de estas abscisas, en efecto:

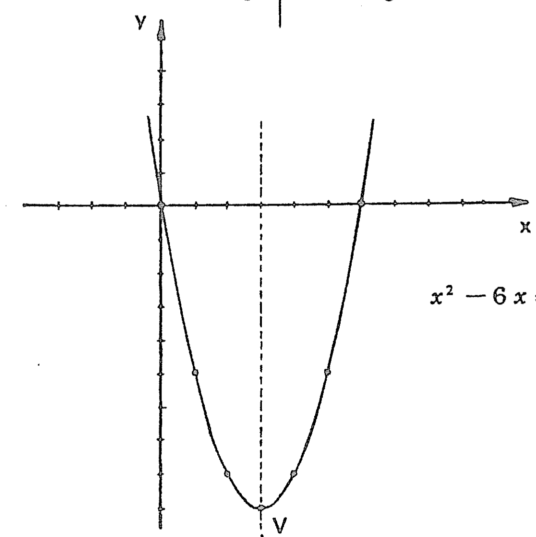
$$x_V = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}}{2} = \frac{-3}{2} = -1{,}5$$

es otro procedimiento para obtener x_V.

Hay quienes obtienen las coordenadas del vértice de la parábola por el procedimiento que se llama de completar el cuadrado, pero en general, nos parece más laborioso.

Ejemplo: $y = x^2 - 6x$ $a = 1$ $b = -6$ $c = 0$

x	$y = x^2 - 6x$
0	0
1	-5
2	-8
4	-8
5	-5



La abscisa del vértice es

$$x_V = \frac{-6}{-2} = 3$$

La ordenada del vértice se obtiene reemplazando x por 3 en la función y, resulta:

$$y_V = 3^2 - 6 \cdot 3 = 9 - 18 = -9$$

Por lo tanto V$(3\,;-9)$
El eje es $x = 3$.

Los ceros de la función se obtienen así:

$$x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x(x-6) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 6 \end{cases}$$

Es decir que los ceros son $0 \wedge 6$. Luego la abscisa del vértice también se puede obtener como promedio de estas raíces.

$$x_V = \frac{0 + 6}{2} = 3$$

Ejemplo: $y = x^2 - 4x + 5$ $a = 1$ $b = 4$ $c = 5$.

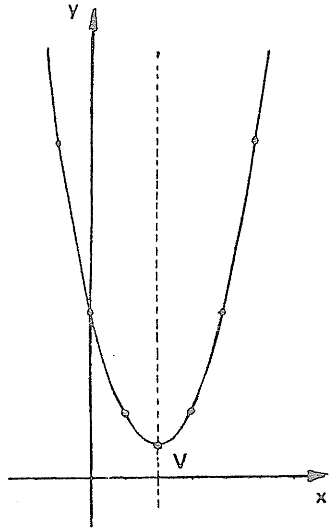
x	$y = x^2 - 4x + 5$
0	5
1	2
3	2
4	5
5	10

La abscisa del vértice es:

$$x_V = \frac{b}{-2a} = \frac{-4}{-2} = 2$$

La ordenada del vértice:

$y_V = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1$, por lo tanto:
V$(2\,;1)$.



El eje es $x = 2$.

- Los ceros de la función son:

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} \begin{cases} x_1 = 2 + i \\ x_2 = 2 - i \end{cases}$$

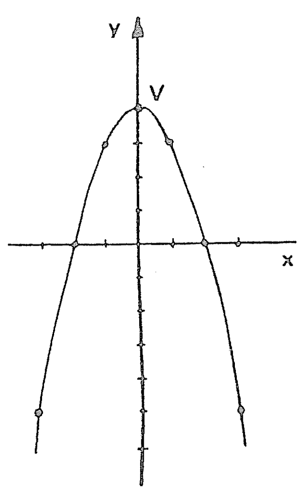
Se observa una vez más que la abscisa del vértice es el promedio de estas dos raíces, en efecto:

$$x_V = \frac{(2+i)+(2-i)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Como los ceros de la función no son números reales, la gráfica no corta al eje x.

4° Caso: el coeficiente a es negativo.

Ejemplo: $y = -x^2 + 4 \quad a = -1 \quad b = 0 \quad c = 4$



x	$y = -x^2 + 4$
0	4
1	3
-1	3
2	0
-2	0
3	-5
-3	-5

$$x_V = \frac{0}{-2} = 0 \Rightarrow y_V = 0 + 4 = 4$$

V(0 ; 4).

El eje es $x = 0$.

Los ceros de la función son $2 \wedge -2$ como se leen en la tabla, pero se pueden calcular independientemente, así:

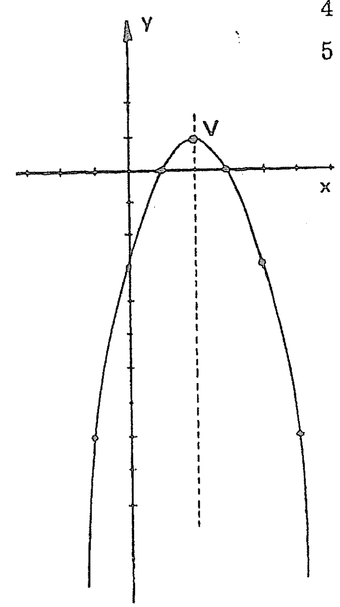
$$-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Se verifica otra vez más, que la abscisa del vértice es el promedio de estas dos raíces, en efecto:

$$x_V = \frac{2 + (-2)}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Ejemplo: $y = -x^2 + 4x - 3 \quad a = -1 \quad b = 4 \quad c = -3.$

x	$y = -x^2 + 4x - 3$
0	-3
1	0
2	1
3	0
4	-3
5	-8



$$x_V = \frac{4}{-(-2)} = 2$$

$$y_V = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1$$

V(2 ; 1).

El eje es $x = 2$.

Los ceros de la función según se lee en la tabla son $1 \wedge 3$, pero se pueden calcular independiente así:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Se verifica una vez más que la abscisa del vértice es el promedio de estas dos raíces, en efecto:

$$x_V = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

Observación: siempre que el coeficiente a es positivo, la concavidad de la curva es hacia arriba, en cambio, cuando a es negativo la concavidad de la curva es hacia abajo.

Nota: se insiste en la gráfica de las funciones polinómicas de 1° y de 2° grado, porque tienen numerosas aplicaciones, especialmente en Economía y en Física.

LA PARABOLA EN ECONOMIA

Como se sabe, la mayoría de las funciones económicas no son continuas, pero resulta ventajoso considerarlas continuas, para aplicarles las reglas operatorias del Análisis Matemático, y no trae inconvenientes, siempre que se respeten las limitaciones impuestas por el problema.

De todas estas funciones, las parabólicas son de las que aparecen más comúnmente en problemas de oferta, demanda, utilidad, ingreso, etc. A continuación se dan algunos ejemplos:

1°) Una fábrica tiene una función de costo total $C(x) = x^2 + 4x + 3$. Esta función interesa al ejecutivo para determinar el nivel de producción más ventajoso de acuerdo con las condiciones del mercado y, teniendo en cuenta otras variables económicas como ser el ingreso, la producción de la fábrica, etc. En este caso interesan solamente los valores positivos.

2°) En una fábrica se producen x unidades de un cierto bien. De acuerdo con la ley de demanda la función ingreso está dada por la función parabólica $I = -2x^2 + 9x$. Como se verá más adelante, se determina la cantidad de unidades producidas que proporcionan el ingreso máximo.

Punto de equilibrio cuando figuran funciones parabólicas

Encontrar el punto de equilibrio, cuando la función de demanda D es parabólica y la de oferta O es lineal. Ambas son funciones del precio p.

Ejemplo:

Ejercicio resuelto

$$D = 3\,(10 - p)^2 \qquad 0 < p \leqslant 10$$
$$O = 2\,p + 5$$

En el punto de equilibrio se debe verificar que la demanda y la oferta deben tomar igual valor, es decir,

$3\,(10 - p)^2 = 2\,p + 5$ se desarrolla

$$3\,(100 - 20\,p + p^2) = 2\,p + 5$$
$$300 - 60\,p + 3\,p^2 - 2\,p - 5 = 0$$

$$3\,p^2 - 62\,p + 295 = 0 \quad \begin{cases} p_1 = 7{,}43 \\ p_2 = 13{,}26 \end{cases}$$

esta solución (p_2) no es aceptable porque $p \leqslant 10$.

luego, la oferta de equilibrio $O_E = 2 \times 7{,}43 + 5 = 19{,}86 \Rightarrow D_E = 19{,}86$, o sea que en el punto de equilibrio el precio es 7,43 y la oferta y la demanda 19,86. A veces por ejemplo cuando se trata de un número de artículos, este número se redondea a número entero.

EJERCICIOS PROPUESTOS

I) Dadas las siguientes funciones de costos

1°) $C = x^2 + 4x + 3$

2°) $C = x\,(x + 4)$

3°) $C = x^2 + 4$

Efectuar, en cada caso:

a) La representación gráfica.

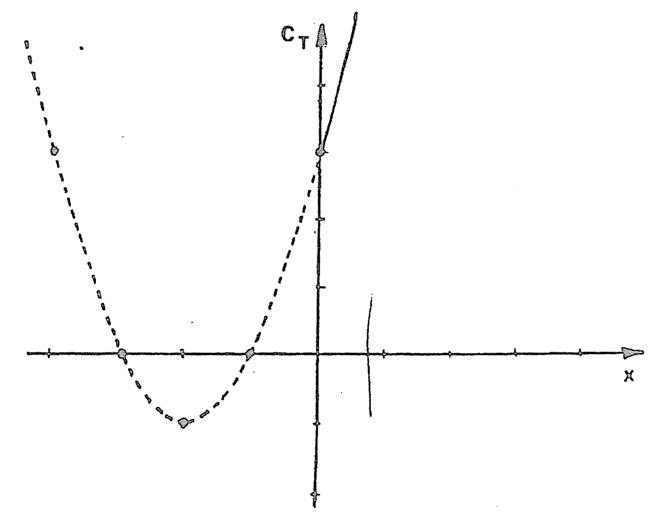
b) ¿Cuál es el costo total correspondiente a un nivel de fabricación de 3 unidades, 6 unidades y 9 unidades respectivamente?

c) Determinar la función de costo medio $C_{ME} = \dfrac{C_T}{x}$

d) Hallar el costo medio al producir 2 unidades, 4 unidades y 8 unidades respectivamente.

1°) Rta.:

a) $C = x^2 + 4x + 3$



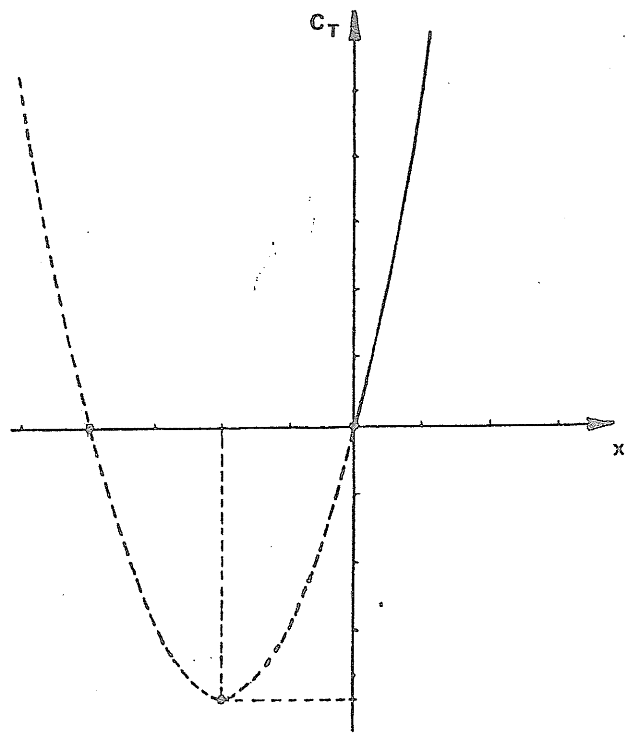
b) $C_T = 24$ para 3 unidades.
$C_T = 63$ para 6 unidades.
$C_T = 120$ para 9 unidades.

c) $C_{ME} = \dfrac{C_T}{x} = x + 4 + \dfrac{3}{x}$

d) $C_{ME} = 7{,}5$ para 2 unidades.
$C_{ME} = 8{,}75$ para 4 unidades.
$C_{ME} = 12{,}375$ para 8 unidades.

2°) Rta.:

a) $C = x\,(x + 4)$

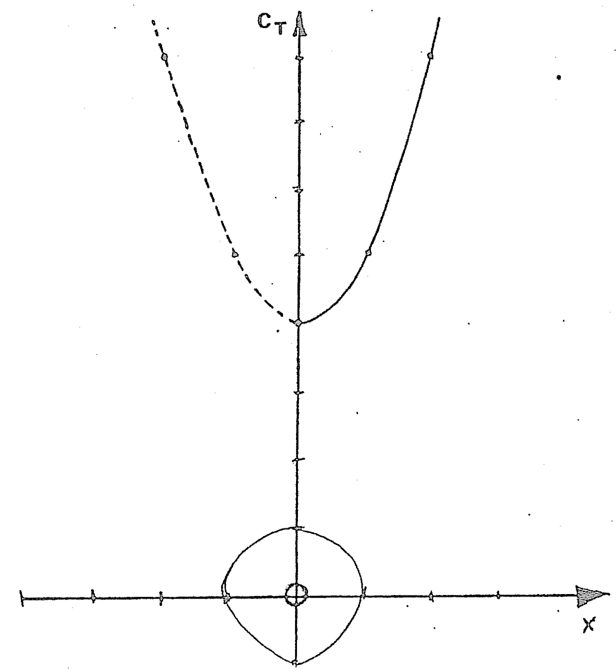


b) $C_T = 21$ para 3 unidades.
$C_T = 60$ para 6 unidades.
$C_T = 117$ para 9 unidades.

c) $C_{ME} = 6$ para 2 unidades.
$C_{ME} = 8$ para 4 unidades.
$C_{ME} = 12$ para 8 unidades.

3°) Rta.:

a) $C = x^2 + 4$



b) $C_T = 13$ para 3 unidades.
$C_T = 40$ para 6 unidades.
$C_T = 85$ para 9 unidades.

c) $C_{ME} = x + \dfrac{4}{x}$

d) $C_{ME} = 4$ para 2 unidades.
$C_{ME} = 5$ para 4 unidades.
$C_{ME} = 8{,}5$ para 8 unidades.

II) Siendo $I = x^2 + 8x$ y $C = x^2 + 6x + 8$ las funciones de ingreso y costo respectivamente, de una empresa manufacturera, hallar:

1°) La función de Beneficio $B = I - C$.

2°) El beneficio y el ingreso de vender 3 unidades, 10 unidades y 50 unidades respectivamente.

3°) Si la venta de x unidades produce un ingreso de \$ 560, calcular el valor de x y el beneficio que proporciona su venta.

4°) Si la venta de x unidades ocasiona un costo de \$ 323, calcular el valor de x y el beneficio que produce su venta.

5°) ¿A partir de qué nivel de ventas se obtiene utilidad?

Rta.:

1°) $B = I - C$

$B = (x^2 + 8x) - (x^2 + 6x + 8)$

$\boxed{B = 2x - 8}$

2°) $B = -2$ para 3 unidades (pérdida).

$B = 12$ para 10 unidades.

$B = 92$ para 50 unidades.

3°) $I = x^2 + 8x$

$560 = x^2 + 8x \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 20 \\ \cancel{x_2 = -28} \end{cases}$ esta raíz se rechaza porque no puede ser negativo.

$B(20) = 2 \,.\, 20 - 8$

$\boxed{B = 32}$

4°) $C = x^2 + 6x + 8$

$323 = x^2 + 6x + 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \\ \cancel{x_2 = -21} \end{cases}$ se rechaza porque es negativo.

$B(15) = 2 \,.\, 15 - 8$

$\boxed{B = 22}$

5°) $B > 0$

$2x\text{-}B > 0 \Rightarrow \boxed{x > 4}$

Punto de equilibrio

1) Hallar el precio y la cantidad de equilibrio, dadas las siguientes funciones de oferta y demanda.

A) $\begin{cases} O = \dfrac{p^2}{100} - 4p - 200 \\ D = -p + 800 \end{cases}$ Rta.: $p_E = \$\,500$, $q_E = 300$

B) $\begin{cases} O = -\dfrac{p^2}{50} - p + 1050 \\ D = \dfrac{p^2}{25} - 10p + 450 \end{cases}$ Rta.: $p_E = \$\,200$, $q_E = 50$

C) $\begin{cases} O = \dfrac{p^2}{100} - 30p + 20.500 \\ D = -\dfrac{3p^2}{100} + 6p + 24.500 \end{cases}$ Rta.: $p_E = \$\,1.000$, $q_E = 500$

D) $\begin{cases} O = p^2 - 300p - 99.990 \\ D = 140p - 69.990 \end{cases}$ Rta.: $p_E = \$\,500$, $q_E = 10$

Función homográfica

Es el caso particular de funciones racionales en que el numerador y el denominador son polinomios de 1° grado; es decir:

$$f(x) = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}$$

donde $c \neq 0$ pues de no ser así, la función se convierte en lineal ya que se transformaría en

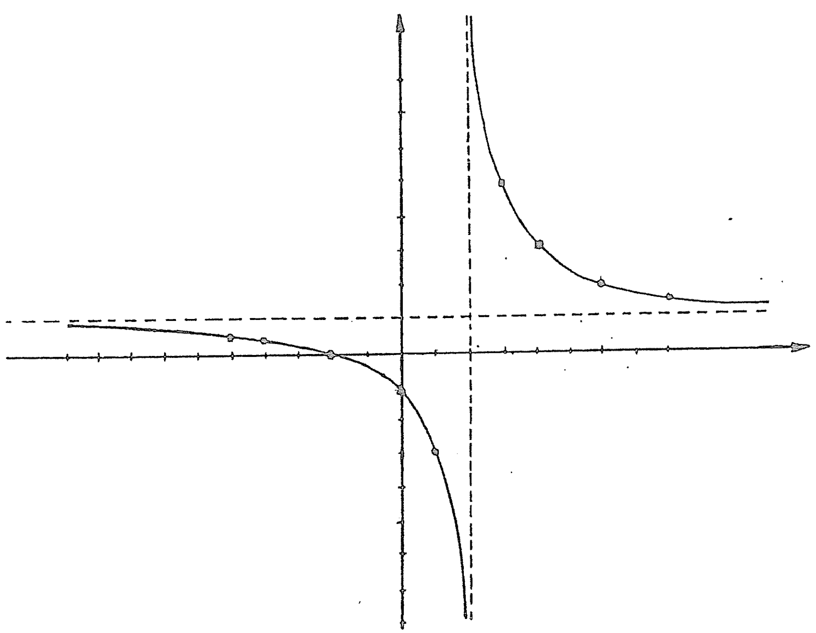
$$f(x) = \frac{a\,x + b}{d} = \frac{a}{d}\,x + \frac{b}{d}\,.$$

El único número real que no pertenece al dominio, es el que anula el denominador.

Ejemplo:

$f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 2}$ $\quad a = 1 \quad b = 2 \quad c = 1 \quad d = -2$

el dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto 2, pues $x = 2$ anula el denominador.



x	$y = \dfrac{x + 2}{x - 2}$
0	-1
1	-3
3	5
4	3
6	2
8	$\frac{5}{3}$
-2	0
-4	$\frac{1}{3}$
-5	$\frac{3}{7}$

La gráfica es la de una **hipérbola.**

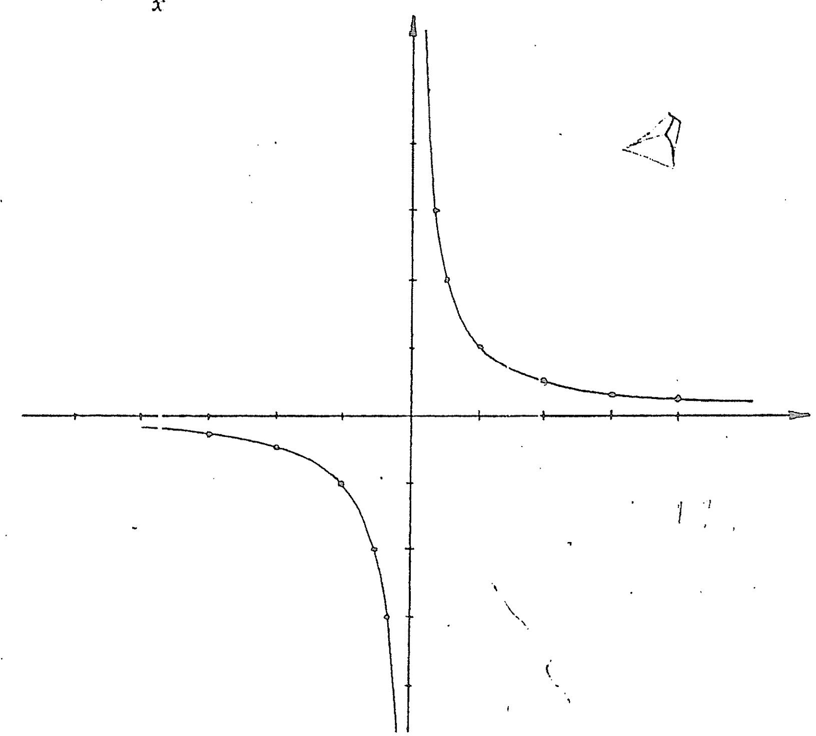
Se observa que cuando los valores de x se aproximan a 2, los valores absolutos de y son cada vez mayores, tienden a $-\infty$ por la izquierda de 2 y a $+\infty$ por la derecha de 2. El número 2 es el valor de x que anula el denominador $2 = -\dfrac{d}{c}$.

La observación hecha es general para todas las curvas de este tipo, es decir para valores de x que se aproximan al que anula el denominador, los valores absolutos correspondientes de y tienden a infinito. Análogamente, cuando los valores absolutos de x crecen infinitamente los valores de y se acercan cada vez más a 1, en general a $\dfrac{a}{c}$ que en este caso es 1. Las rectas: $x = 2 = -\dfrac{d}{c} \wedge y = 1 = \dfrac{a}{c}$ se llaman asíntotas de la curva y las estudiaremos más adelante.

El caso particular en que $a = d = 0$ resulta $f(x) = \dfrac{b}{c\,x}$ es la llamada *hipérbola equilátera* y las asíntotas son los ejes.

Ejemplo:

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad b = c = 1$



x	$y = \dfrac{1}{x}$
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{3}$	3
-1	-1
-2	$-\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{3}$
$-\frac{1}{2}$	-2

Función exponencial

Es de la forma: $a^{\varphi(x)} \quad \begin{cases} a > 0 \\ \wedge \\ a \neq 1 \end{cases}$

es decir que la base es un número positivo y distinto de 1 y el exponente $\varphi(x)$ debe determinar números reales tales que $a^{\varphi(x)}$ defina una función.

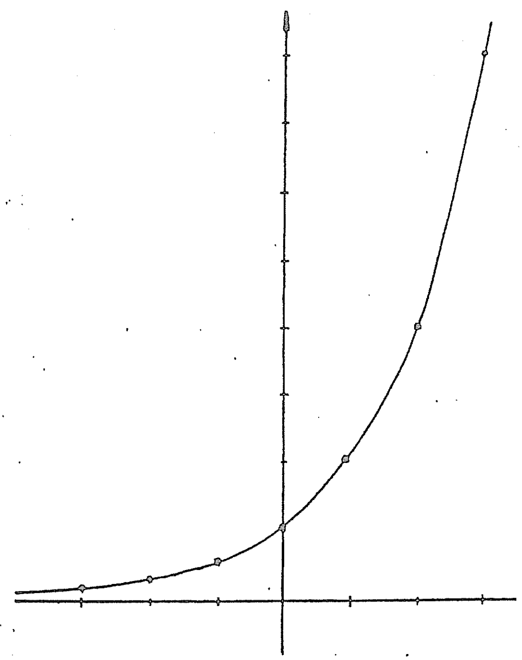
Ejemplo:

$3^{x^2+1} \qquad \left(\frac{4}{5}\right)^{3x} \qquad 2^x$

Gráfica de la función exponencial

Ejercicios resueltos

1°) Si la base $a > 1$ Ejemplo 2^x

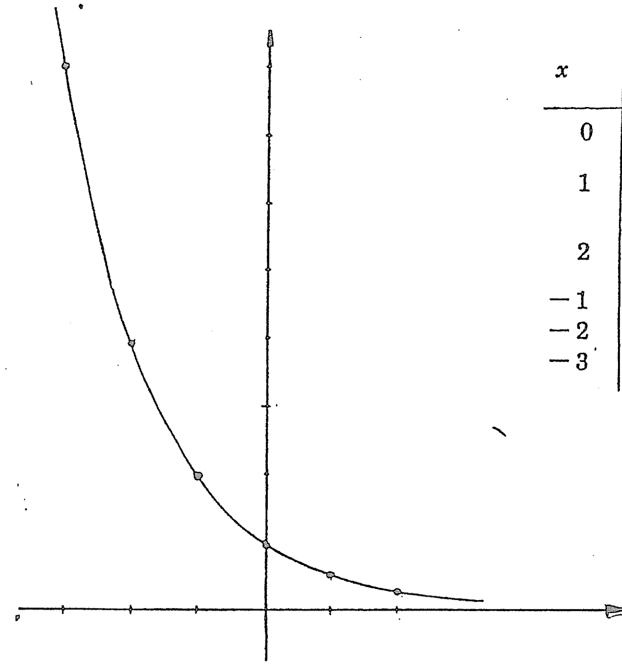


x	$y = 2^x$
0	1
1	2
2	4
3	8
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$
-3	$\frac{1}{8}$

El dominio es el conjunto de todos los números reales y las imágenes son siempre positivas.

A medida que los valores de x se hacen mayores, también resultan mayores los correspondientes de y.

2°) Si la base $a < 1$ Ejemplo $\left(\frac{1}{2}\right)^x$



x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
-1	2
-2	4
-3	8

A medida que los valores de x son mayores, decrecen los correspondientes valores de y.

Función logarítmica

La función logarítmica, como ya se sabe, se expresa

$y = \log_b x \iff x = b^y$ $\qquad y = 2 + \ln x$

donde el número b positivo y distinto de 1 es la base elegida para los logaritmos. Los logaritmos que más se aplican son:

los de base 10 es decir $b = 10$, llamados decimales que se indican

$y = \log x \iff x = 10^y$

los de base e es decir $b = e$, llamados naturales que se indican

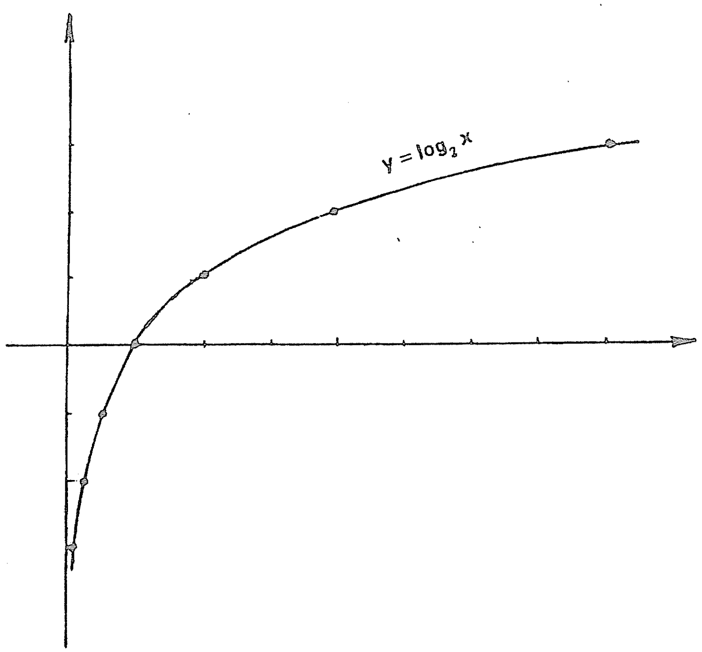
$y = \ln x \iff x = e^y$

los de base 2 es decir $b = 2$, que se indican

$y = \log_2 x \iff x = 2^y$

Para toda función logarítmica, el dominio es el conjunto de los números reales positivos.

Vamos a hallar la gráfica de la función logarítmica en base 2.



x	y
1	0
2	1
4	2
8	3
$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{8}$	-3

Todas las funciones logarítmicas cuya base es mayor que 1 tienen una forma semejante a la anterior, pues:

todas pasan por el punto (1 ; 0) dado que el logaritmo de 1 es 0 en todas las bases.

todas tienen ordenada negativa $\forall x < 1$

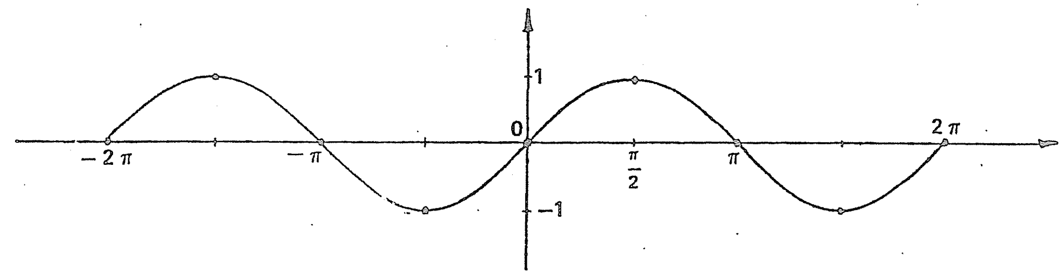
todas tienen ordenada positiva $\forall x > 1$

Se diferencian únicamente en que: si la base es mayor, el crecimiento es más lento; si la base es menor el crecimiento es más rápido.

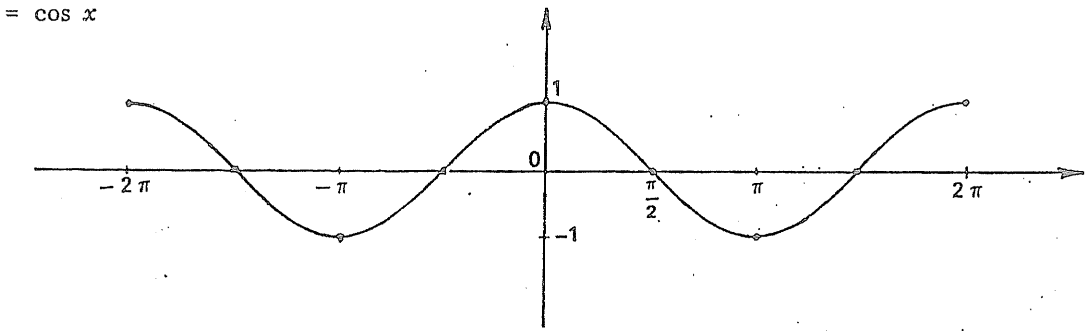
Gráfica de las funciones trigonométricas

Recordemos que: según se ha visto en los elementos de Trigonometría, la gráfica de las funciones *sen x*; *cos x*; *tg x*; *cotg x*, son respectivamente:

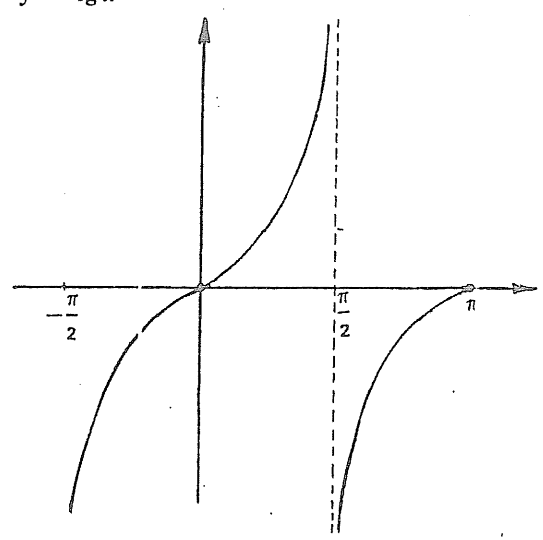
$y = \operatorname{sen} x$



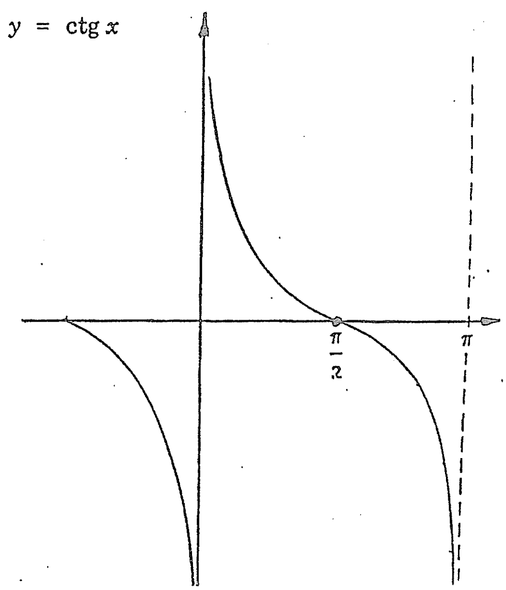
$y = \cos x$



$y = \operatorname{tg} x$



$y = \operatorname{ctg} x$



Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas reciben este nombre porque los valores de las mismas están vinculados a los puntos de una hipérbola equilátera.

Consideramos las funciones hiperbólicas: seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica, que se definen combinando funciones exponenciales de base *e*.

En el siguiente cuadro figuran la abreviatura y la definición de cada una.

nombre	abreviatura	definición
Seno hiperbólico	*senh*	$senh\ x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$
Coseno hiperbólico	*cosh*	$cosh\ x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
Tangente hiperbólica	*tgh*	$tgh\ x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

De las definiciones resulta que:

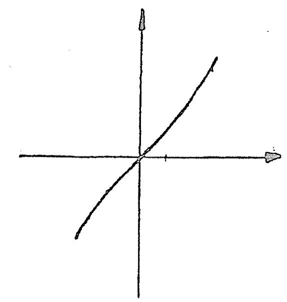
$senh\ 0 = 0$ $\quad cosh\ 0 = 1$ $\quad tgh\ 0 = 0$

$cosh^2\ x - senh^2\ x = 1$

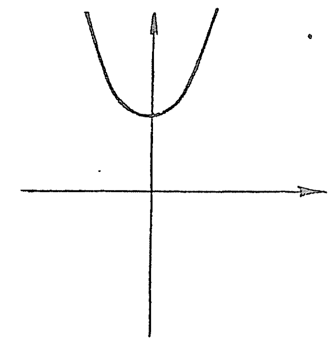
$$tgh\ x = \frac{senh\ x}{cosh\ x}$$

Mediante las tablas de los valores de las funciones exponenciales e^{x} y e^{-x} se pueden calcular los valores de las funciones hiperbólicas. Las respectivas gráficas son:

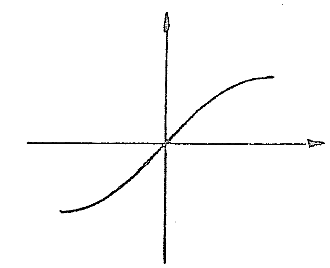
$y = senh\ x$



$y = cosh\ x$



$y = tgh\ x$



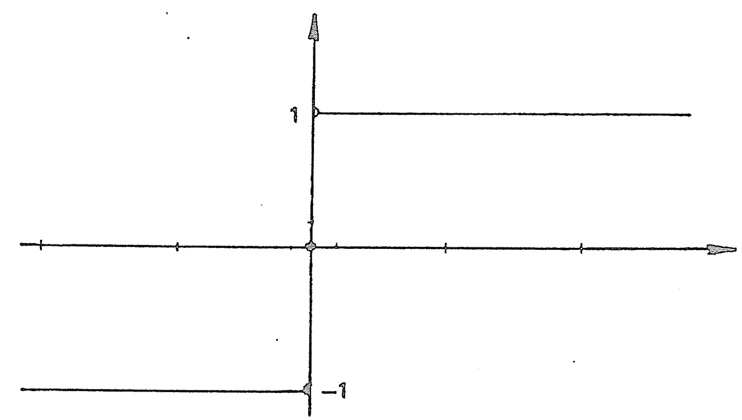
Hasta ahora hemos considerado funciones definidas por combinaciones de operaciones: sumas, potencias, raíces, logaritmos, trigonométricas, etc.; estudiaremos ahora otras funciones definidas mediante expresiones de otro tipo, por ejemplo: la función signo, la función parte entera y la función mantisa.

Función signo

La abreviatura es *sg. x* que se lee "signo de *x*" y se define

$$f(x) = sg.\ x = \begin{cases} 1 & \forall\, x > 0 \\ 0 & \text{para } x = 0 \\ -1 & \forall\, x < 0 \end{cases}$$

La gráfica es:



Pues el origen (0 ; 0) pertenece al gráfico. Para toda x positiva es $y = 1$; para toda x negativa es $y = -1$.

Función parte entera

Se indica con la notación $E(x)$ o bien ent. (x) que se lee: "parte entera de x". Algunos utilizan la notación $[\![x]\!]$.

Definición: $E(x)$ es el mayor número entero menor o igual que x, es decir, si el número x es entero, la parte entera es el mismo número.

Ejemplo:

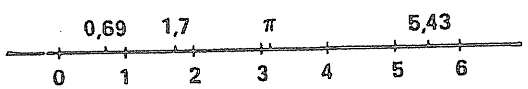
$E(3) = 3$ $\qquad$ $E(8) = 8$ $\qquad$ $E(-2) = -2$

Si el número x no es entero la parte entera es el mayor de todos los números enteros menores que él.

Ejemplo:

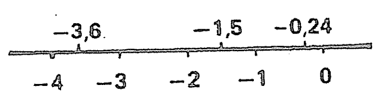
si son positivos $E(5{,}43) = 5$ $\qquad$ $E(1{,}7) = 1$ $\qquad$ $E(\pi) = 3$ $\qquad$ $E(0{,}69) = 0$

Obsérvese que en la recta donde se representan los números reales la parte entera de x es el número entero que está inmediatamente a la izquierda de él.

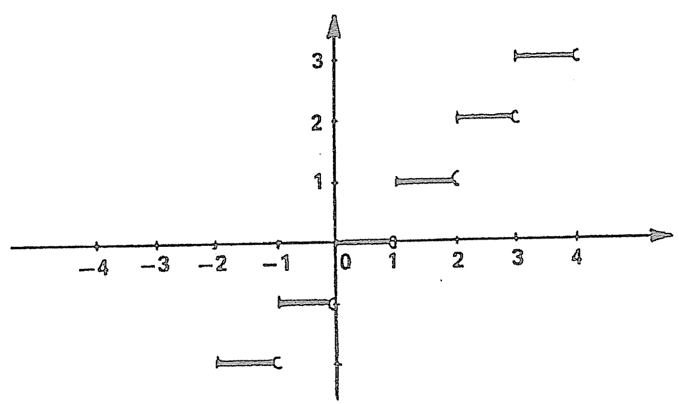


Si el número es negativo:

$E(-1{,}5) = -2$ $\qquad$ $E(-3{,}6) = -4$ $\qquad$ $E(-0{,}24) = -1$



La gráfica de la función parte entera de x es:

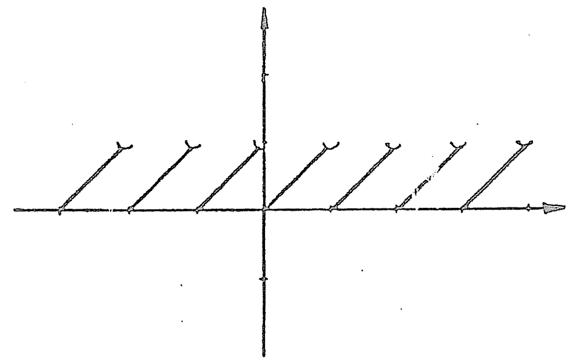


Función mantisa

Se indica con la notación *mant.* (x) que se lee mantisa de x, y se define

$$mant.\ (x) = x - E(x)$$

Gráfica de *mant.* (x)



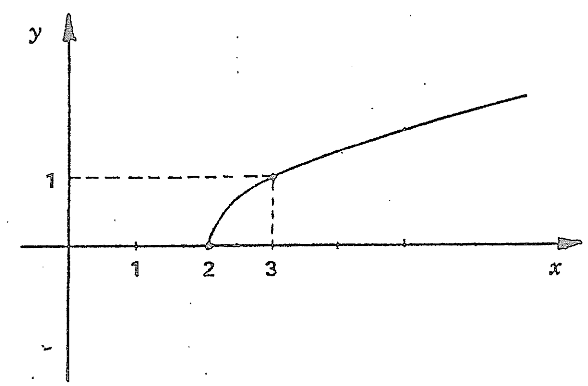
Ejemplos:

mant. $(6{,}18)$	$= 6{,}18 - 6$	$= 0{,}18$	
mant. $(4{,}7)$	$= 4{,}7 - 4$	$= 0{,}7$	
mant. $(-1{,}4)$	$= -1{,}4 - (-2)$	$= -1{,}4 + 2 = 0{,}6$	
mant. $(-2{,}5)$	$= -2{,}5 - (-3)$	$= -2{,}5 + 3 = 0{,}5$	
mant. (9)	$= 9 - 9$	$= 0$	
mant. (-8)	$= -8 - (-8)$	$= -8 + 8$	$= 0$

Ejercicios propuestos

Determinar el dominio, el codominio y la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

1°) $f(x) = \sqrt{x-2}$
Dominio: $\forall\ x / x \geqslant 2$
Codominio: $\forall\ y / y \geqslant 0$

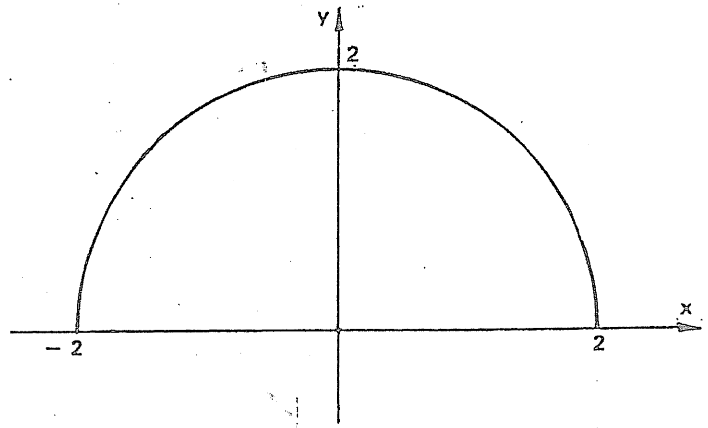


2°) $\varphi(x) = \sqrt{x-1}$
Dominio: $\forall\ x / x \geqslant 1$
Codominio: $\forall\ y / y \geqslant 0$

3°) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

Dominio: $[-2 ; 2]$

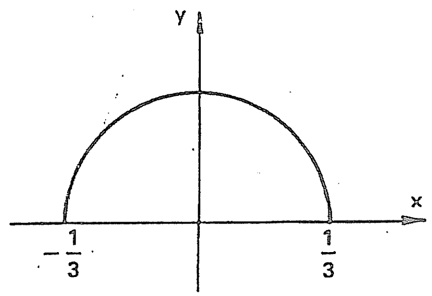
Codominio: $[0 ; 2]$



4°) $\varphi(x) = \sqrt{\frac{1}{9} - x^2}$

Dominio: $\left[-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right]$

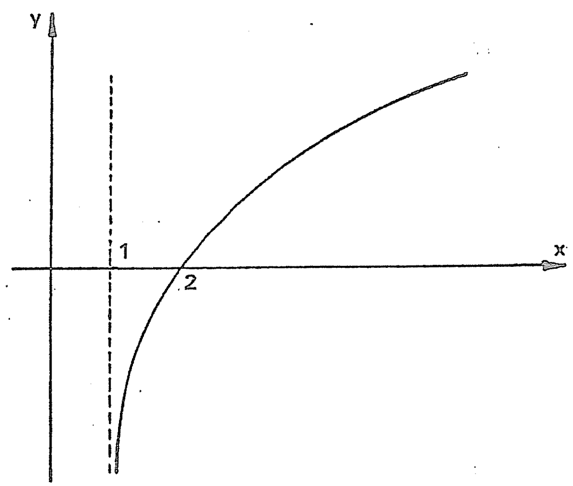
Codominio: $\left[0 ; \frac{1}{3}\right]$



5°) $f(x) = ln\,(x-1)$

Dominio: $\forall\ x > 1$

Codominio: todos los números reales.

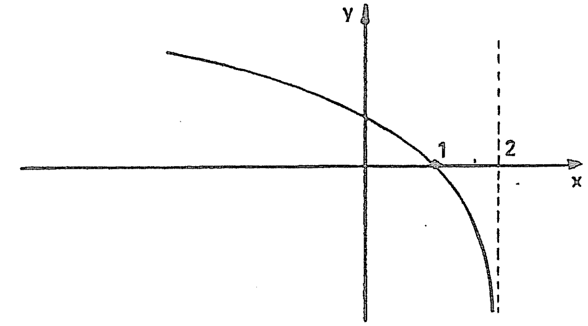


6°) $f(x) = ln\,(2-x)$

7°) $f(x) = ln\,(2-x)$

Dominio: $\forall\ x < 2$

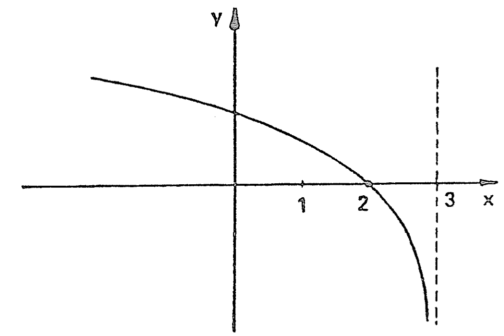
Codominio: el conjunto R.



8°) $\varphi(x) = ln\,(3-x)$

Dominio: $\forall\ x \,/\, x < 3$

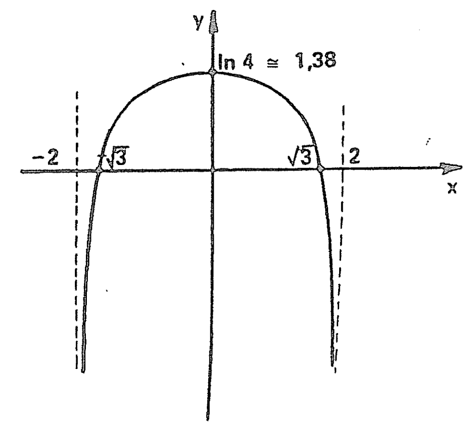
Codominio: R.



9°) $f(x) = ln\,(4-x^2)$

Dominio: todos los números del intervalo $(-2 ; +2)$

Codominio: los números reales menores o iguales que $ln\ 4$.

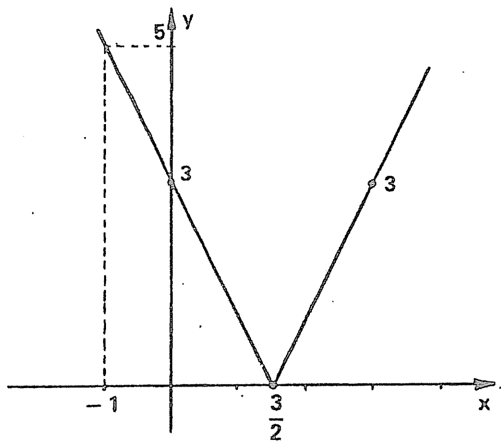


10°) $f(x) = ln\,(9 - x^2)$

11°) $f(x) = |\,2x - 3\,|$

Dominio: R

Codominio: todos los números reales mayores o iguales que 0.



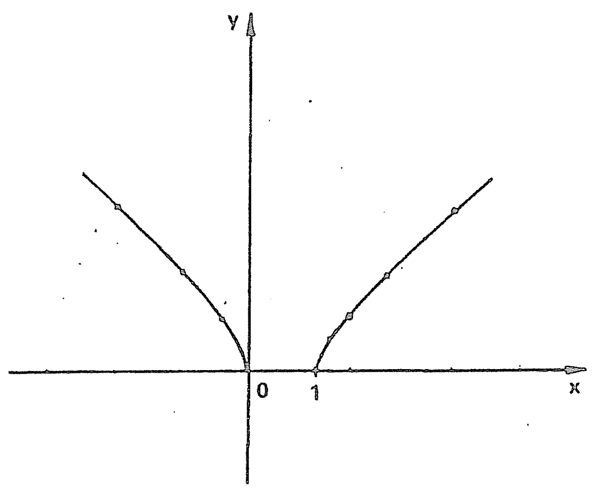
12°) $\varphi(x) = |\,3x - 2\,|$

13°) $f(x) = |\,x - 1\,|$

14°) $f(x) = \sqrt{x\,(x - 1)}$

Dominio: todos los números reales excepto los del intervalo $(0\,;1)$.

Codominio: todos los reales mayores o iguales que 0.

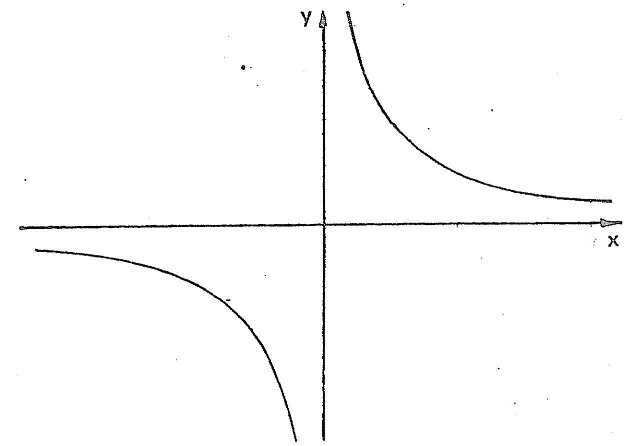


15°) $\varphi(x) = \sqrt{x\,(x - 3)}$

16°) $f(x) = \dfrac{3}{2x}$

Dominio: $\forall x$ excepto 0

Codominio: D.

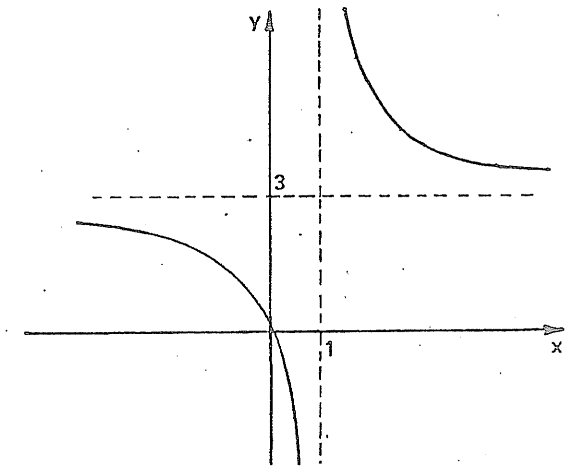


17°) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

18°) $\varphi(x) = \dfrac{3x}{x - 1}$

Dominio: todos los números reales, excepto 1.

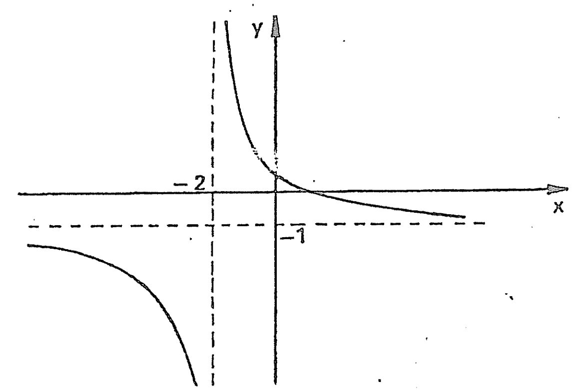
Codominio: todos los números reales, excepto 3.



19°) $f(x) = \dfrac{1 - x}{x + 2}$

Dominio: $\forall\, x \neq -2$

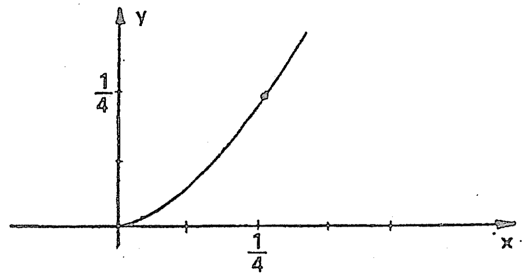
Codominio: todos los números reales, excepto -1.



20°) $g(x) = \dfrac{x-1}{2x-1}$

21°) $f(x) = 2x^{\frac{3}{2}}$

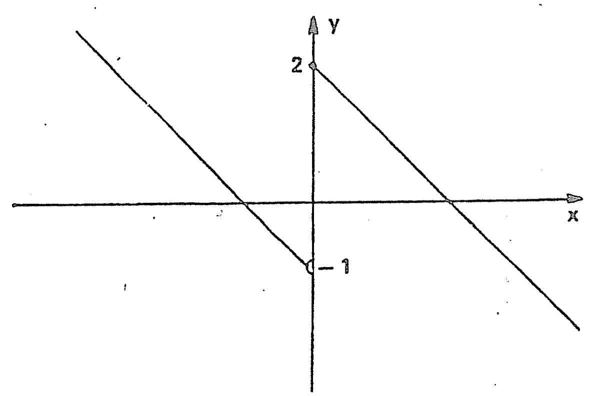
Dominio = Codominio
Todos los números reales mayores o iguales que 0.



22°) $\varphi(x) = 3x^{\frac{3}{2}}$

23°) $f(x) = \begin{cases} -x+2 & \forall\, x \geqslant 0 \\ -x-1 & \forall\, x < 0 \end{cases}$

Dominio = Codominio = R



24°) $\varphi(x) = \begin{cases} 3x-2 & \forall\, x \geqslant 0 \\ 3x+1 & \forall\, x < 0 \end{cases}$

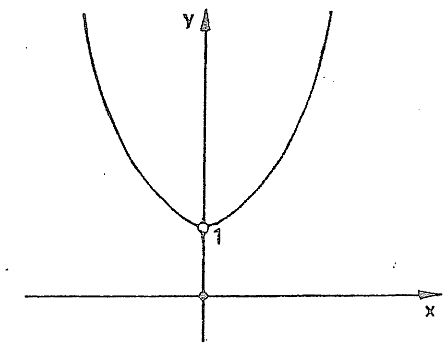
25°) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \forall\, x < 3 \\ 2x & \forall\, x \geqslant 3 \end{cases}$

26°) $g(x) = \begin{cases} 3 & \forall\, x \geqslant 1 \\ -3 & \forall\, x < 1 \end{cases}$

27°) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \forall\, x \neq 0 \\ 0 \text{ para } x = 0 \end{cases}$

$D = R$

Codominio $\quad x = 0 \;\wedge\; \forall\, x > 1$

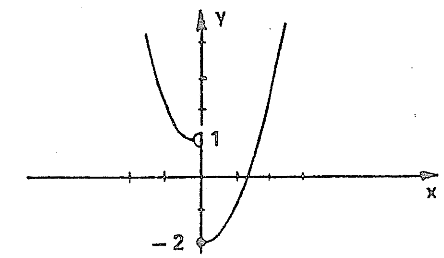


28°) $\varphi(x) = \begin{cases} 2x^2-1 & \forall\, x \neq 1 \\ 3 \text{ para } x = 1 \end{cases}$

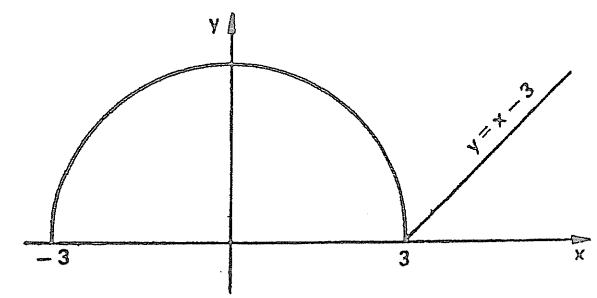
29°) $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \forall\, x \geqslant 0 \\ x^2+1 & \forall\, x < 0 \end{cases}$

$D = R$

Codominio: reales $\geqslant -2$.



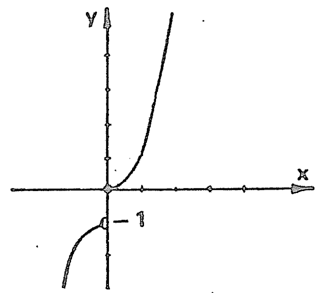
30°) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \forall\, x \in [-3\,;+3] \\ x-3 & \forall\, x > 3 \end{cases}$



31°) $\varphi(x) = \begin{cases} x^2+2 & \forall\, x > 0 \\ x^2-1 & \forall\, x \leqslant 0 \end{cases}$

32°) $\varphi(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} & \forall\, x \in [-2\,;+2] \\ -x - 2 & \forall\, x < -2 \end{cases}$

33°) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \forall\, x \geqslant 0 \\ x^3 - 1 & \forall\, x < 0 \end{cases}$



$D = R$

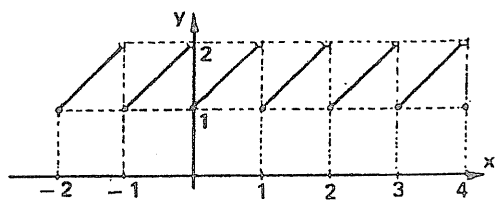
Codominio: todos los números reales excepto los del intervalo $[-1\,;\,0]$

34°) $\varphi(x) = \begin{cases} x^3 & \forall\, x \leqslant 0 \\ x^3 + 2 & \forall\, x > 0 \end{cases}$

35°) $f(x) = mant.\; x + 1$

$D = R$

Codominio: los reales del intervalo $[1\,;\,2^-]$



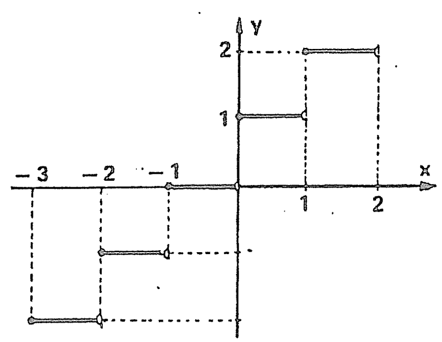
36°) $f(x) = sg.\; x + 2$

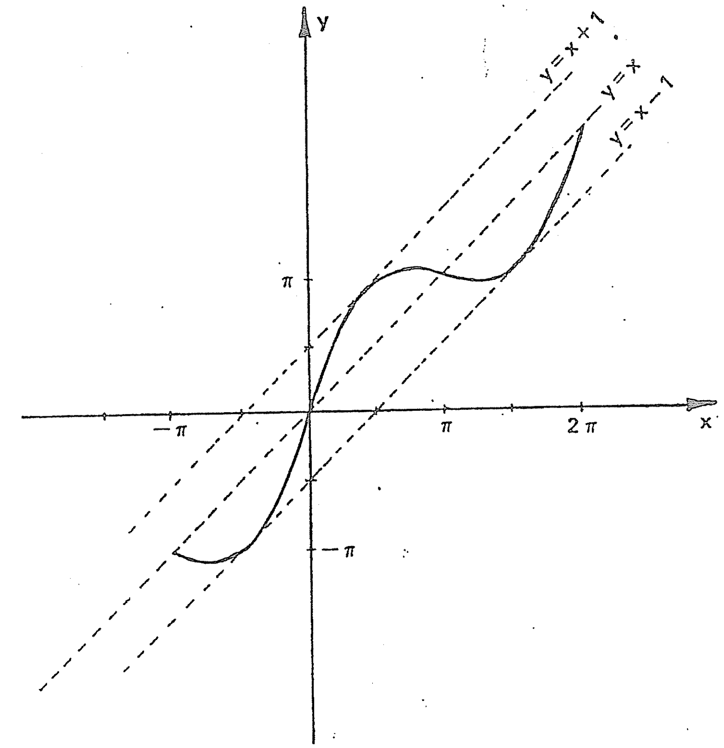
37°) $\varphi(x) = ent.\;(x) - 1$

38°) $f(x) = E(x + 1)$

$D = R$

Codominio: todos los números enteros





39°) $f(x) = x + sen\; x$

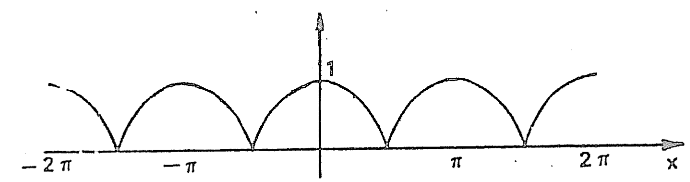
$D =$ Codominio $= R$

40°) $\varphi(x) = x + cos\; x$

41°) $f(x) = |\,cos\; x\,|$

$D = R$

Codominio $= [0\,;\,1]$



42°) $f(x) = |\,sen\; x\,|$

Función de función o función compuesta

En numerosos problemas se presenta el caso de una función de otra función. Ejemplo:

$\sqrt[3]{3x}$ se tiene la función raíz cúbica de la función $3x$

En general se indica:

$$\varphi(x) = f\,[u(x)]$$

En el ejemplo dado f es la raíz cúbica y u es $3x$

También se llama función compuesta de f y u que se indica:

$$f \circ u$$

Se sobreentiende que primero hay que aplicar la función u y a ese resultado la función f. Así en el ejemplo, el dominio de u es el conjunto de todos los números reales; si se considera:

$$x = -\frac{8}{3} \qquad \text{es} \qquad u\left(-\frac{8}{3}\right) = 3\left(-\frac{8}{3}\right) = -8$$

ahora, a este número -8 que pertenece al dominio de f, se le aplica f es decir $\sqrt[3]{\;}$ o sea $\sqrt[3]{-8} = -2$ luego: -2 es la imagen de $-\frac{8}{3}$ a través de aplicar la función compuesta o función de función.

$$f[u(x)] = \sqrt[3]{3x}$$

Observación: para que exista la función compuesta el codominio de u debe estar incluido en el dominio de f.

Ejemplo: sea $\quad ln\,(x^3 - 4x^2 - 1) \qquad$ f es la función ln

$$u = x^3 - 4x^2 - 1$$

Como el dominio de la función ln es el conjunto de los números reales positivos, la función compuesta sólo se puede aplicar a los valores positivos del codominio es decir aquellos x tales que:

$$x^3 - 4x^2 - 1 > 0$$

Ejercicios propuestos de función de función, o sea de funciones compuestas

Expresar cada una de las siguientes funciones propuestas

1°) $\varphi(x) = f \circ g \quad / \quad f = \sqrt{\;} \quad \wedge \quad g = ln\,x$

2°) $\varphi(x) = f \circ w \quad / \quad f = ln \quad \wedge \quad u = \sqrt[3]{x}$

3°) $f(x) = \varphi \circ g \quad / \quad \varphi = ln \quad \wedge \quad g = \text{sen}\,2x$

Indicar el dominio de cada una de las siguientes funciones de funciones:

1°) $\varphi(x) = e^u \quad / \quad u = 3x + 1$ — Rta.: $D = R$

2°) $f(x) = cos\,u \quad / \quad u = 2x$ — Rta.: $D = R$

3°) $f(x) = sen\,u \quad u = x^2$ — Rta.: $D = R$

4°) $f(x) = ln\,\sqrt[3]{x^3 + 1}$ — Rta.: $x > -1$

5°) $g(x) = ln\,\dfrac{1}{x - 3}$ — Rta.: $\forall x \,/\, x > 3$

6°) $\varphi(x) = ln\,(x^3 + 2x)^2$ — Rta.: Como $ln\,(x^3 + 2x)^2 = 2\,ln\,(x^3 + 2x) =$
$= 2\,ln\,[x(x^2 + 2)]$ debe ser
$x\,(x^2 + 2) > 0 \Rightarrow x > 0$

7°) $f(x) = ln\,(2 - x)^3$

8°) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ — Rta.: $D = R$ excepto 0

9°) $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

10°) $\varphi(x) = sen\sqrt{x}$ — Rta.: $D = \{x \,/\, x \geqslant 0\}$

11°) $g(x) = cos\sqrt{x}$

Calcular $f(-1)$ sabiendo que:

1°) $f = \varphi(u) \quad / \quad \varphi = ln \quad \wedge \quad u = e^{3x-2}$ — Rta.: -5

2°) $f = \sqrt[3]{e^{x+4}}$ — Rta.: e

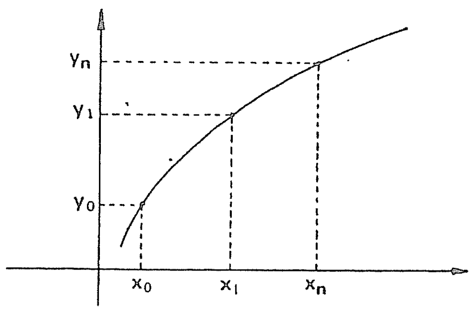
3°) $f = ln\,\sqrt[3]{2 + x}$ — Rta.: 0

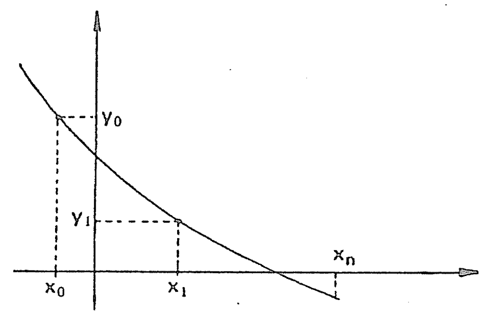
Función uno a uno o función inyectiva

Hemos definido función como la relación que a cada elemento del dominio le corresponde una sola imagen, o sea un solo elemento del codominio.

Pero hay funciones tales que: cada elemento del codominio es imagen de un solo elemento del dominio, éstas son las funciones que se llaman **función uño a uno o función inyectiva**. Es equivalente a decir que: una función es uno a uno si a distintos valores del dominio les hace corresponder distintos valores del codominio.

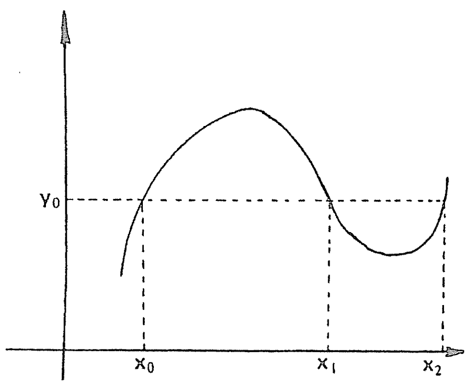
De acuerdo con la definición los dos gráficos siguientes corresponden a funciones uno a uno.



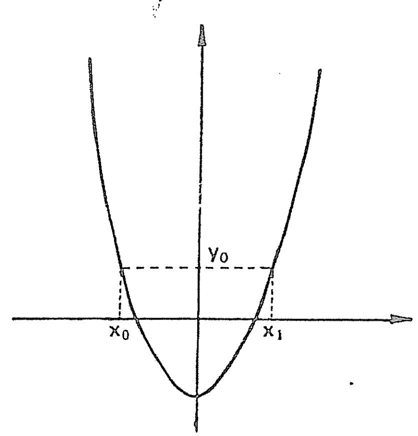


pues en los dos grafos se observa que cada y_0 ; y_1 ; . . . ; y_n del codominio es imagen respectivamente de cada elemento x_0 ; x_1 ; . . . ; x_n que son distintos.

En cambio, los siguientes gráficos no corresponden a funciones uno a uno.



En efecto, y_0 es imagen de 3 elementos distintos: x_0 ; x_1 ; x_2



y_0 es imagen de 2 elementos distintos: x_0 ; x_1

En el gráfico de una función uno a uno, toda paralela al eje x trazada por un punto del codominio, debe cortar al grafo en un solo punto.

Ejemplo de función uno a uno o inyectiva es la raíz cúbica pues a números reales distintos les corresponden raíces cúbicas o imágenes distintas.

$\sqrt[3]{8} = 2$ $\qquad \sqrt[3]{125} = 5$ $\qquad \sqrt[3]{-27} = -3$

Es decir que los resultados serán iguales solamente si los radicandos son iguales, es decir

$$\sqrt[3]{x_1} = \sqrt[3]{x_2} \iff x_1 = x_2$$

En general $f(x)$ es función uno a uno si se verifica:

$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$$

o expresado en otra forma

$$\text{Si } (x_1 \, ; y_1) \in f(x) \;\wedge\; (x_2 \, ; y_1) \in f(x) \iff x_1 = x_2$$

Otros ejemplos de funciones uno a uno son:

$f(x) = \ln x \qquad f(x) = x^3 \qquad f(x) = 2^x$

En cambio, la función segunda potencia $f(x) = x^2$ no es uno a uno pues a 2 elementos del dominio les corresponde la misma imagen. Ejemplo: a 3 y a -3 les corresponde la misma imagen: 9.

Función inversa

Algunas funciones, como por ejemplo:

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ o bien $y = \sqrt[3]{x}$

al despejar x se tiene $x = y^3$ la tercera potencia también es una función, en ese caso, se dice que la tercera potencia es la función inversa de la $\sqrt[3]{\ }$ y recíprocamente.

Ejemplo 2°

$f(x) = 2^x$ o sea $y = 2^x$

al despejar x resulta $x = \log_2 y$ el logaritmo en base 2 es también una función; se dice entonces que $\log_2$ es función inversa de la exponencial 2^x y recíprocamente.

En general si de $y = f(x)$ resulta $x = \varphi(y)$ se dice que f y φ son funciones inversas.

Si a una función se la designa con $f(x)$ es costumbre designar a la función inversa con $f^{-1}(x)$. Por ejemplo:

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ o sea $y = \sqrt[3]{x} \implies x = y^3$

es decir $f^{-1}(y) = y^3$

o sea $f^{-1}(x) = x^3$

Luego: $\boxed{f(x) = \sqrt[3]{x} \iff f^{-1}(x) = x^3}$

La función compuesta de una función y su inversa da por resultado la función identidad.

Por ejemplo: si se halla la tercera potencia de su función inversa $\sqrt[3]{\ }$ resulta:

$\left(\sqrt[3]{8}\right)^3 = 2^3 = 8$

es decir el mismo número 8, igualmente se verifica para todo valor de x es decir:

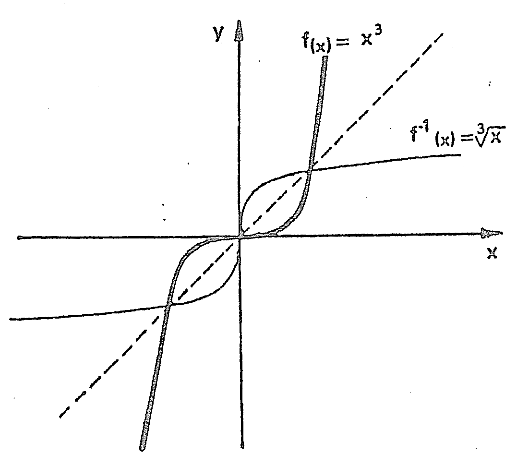
En general:

$$f\left[f^{-1}(x)\right] = x$$

Obsérvese que no todas las funciones tienen inversa, por ejemplo: la segunda potencia, pues: $y = x^2$ al despejar x se tiene $x = \sqrt{y}$ y la raíz cuadrada no es una función, pues a cada valor del radicando le corresponden dos resultados o sea dos imágenes.

Gráfica de una función y de su función inversa

Ya hemos visto que la gráfica de la función $f(x) = x^3$ que es la parábola cúbica trazada más gruesa en la figura.



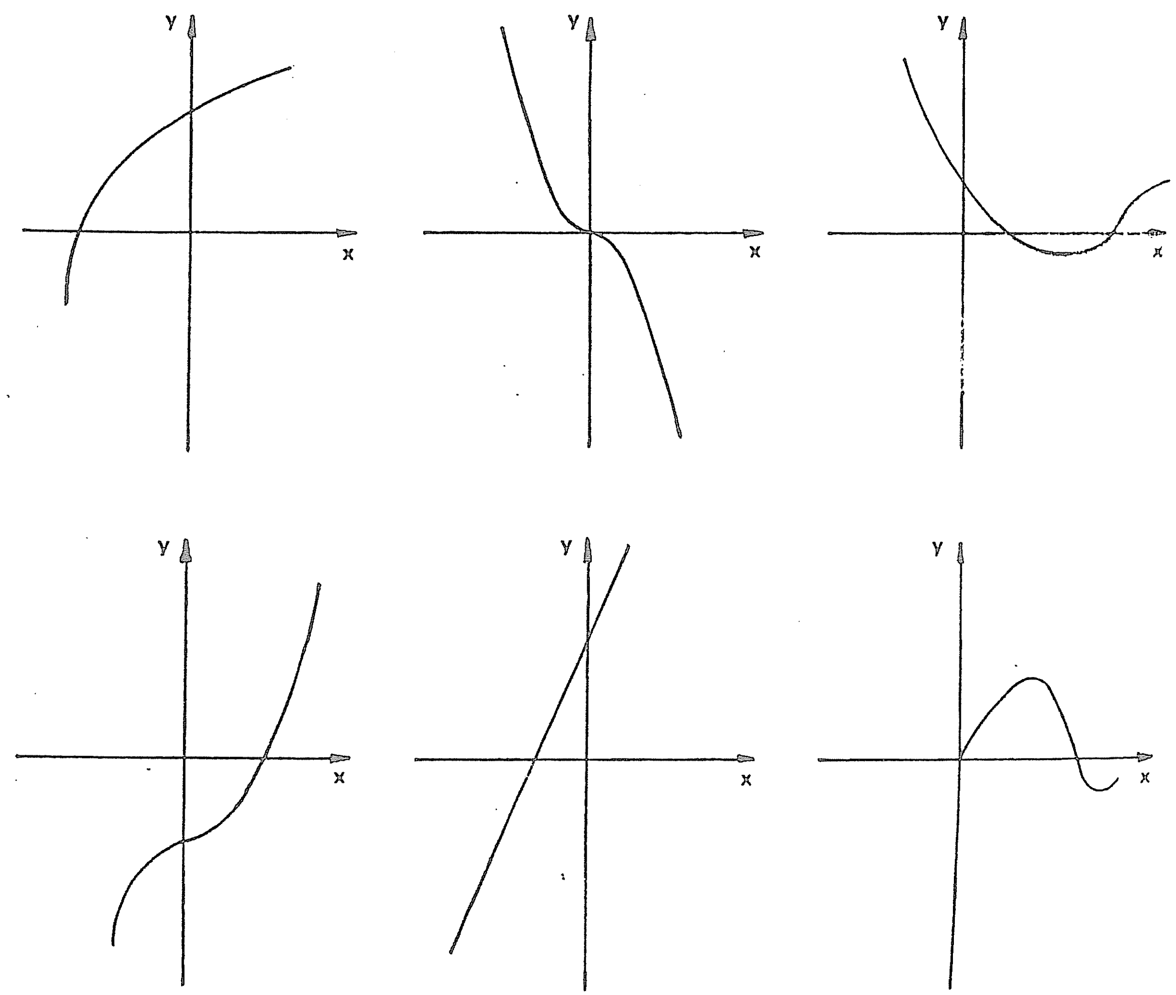
x	x
0	0
1	1
−1	−1
8	2
−8	−2

Su función inversa $\overset{-1}{f}(x) = \sqrt[3]{x}$ pasa por el origen; para valores positivos de x la imagen y es positiva y para valores negativos de x la imagen y es negativa, es decir, la gráfica está en el primer y tercer cuadrante. La siguiente tabla de valores nos permite tener la gráfica de la función $\sqrt[3]{x}$ que es la trazada con trazo más fino.

Se observa que las curvas son simétricas con respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Análogamente, se puede ver que las gráficas de 2^x y $log_2\, x$ que son funciones inversas, son simétricas con respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Esta propiedad de simetría, caracteriza a las gráficas de toda función y la de su inversa.

Ejercicios de aplicación

Decir cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones que tienen inversa y en tal caso, hacer el gráfico de la inversa, por simetría con respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.



Es condición para que la función tenga inversa, que sea una función uno a uno. Más aún, existe función inversa de una función uno a uno o inyectiva, en el intervalo que es dominio de la primera función.

Ejemplo:

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \forall x \leqslant 0 \\ \frac{1}{3}x+5 & \forall x > 0 \end{cases}$$

El dominio es R.

El codominio está constituido por los intervalos: $(-\infty; 0) \wedge (5; +\infty)$

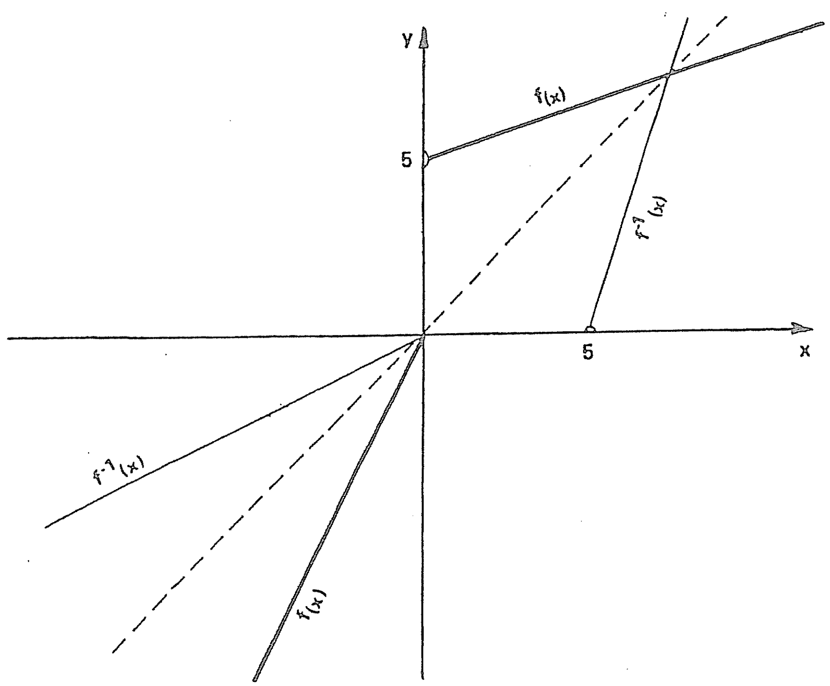
La inversa es:

como $y = 2x \ \forall x \leqslant 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}y$ o sea $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ en $(-\infty; 0)$

como $y = \frac{1}{3}x + 5 \ \forall x > 0 \Longrightarrow x = 3y - 15$ o sea $f^{-1}(x) = 3x - 15$ en $(5; +\infty)$

La gráfica de $f(x)$ está trazada en trazo grueso.

La gráfica de $f^{-1}(x)$ simétrica con respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes está trazada en trazo fino.



Ejercicios propuestos

Decir cuáles de las siguientes funciones tienen función inversa y en tal caso escribir la expresión de la función inversa:

1°) $f(x) = x + 1$

Rta.: $D = R$ y Cod. $= R$ es función uno a uno y por lo tanto tiene inversa. Se obtiene así:

$y = f(x) = x + 1 \Longrightarrow x = y - 1$ o sea $f^{-1}(y) = y - 1 \Longrightarrow f^{-1}(x) = x - 1$

2°) $f(x) = x - 2$

3°) $\varphi(x) = x^3 - 2$

Rta.: $D = R$ y Cod. $= R$ es función uno a uno y por lo tanto tiene función inversa que es

$$\varphi^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$$

4°) $f(x) = x^3 + 1$

5°) $f(x) = e^{x+2}$

Rta.: $D = R$ y Codominio todos los reales positivos; es función uno a uno, existe una función inversa que es

$$f^{-1}(x) = \ln x - 2 \qquad \text{en } x > 0.$$

6°) $\varphi(x) = e^{2x-1}$

7°) $f(x) = \ln(x - 1)$

Rta.: en el dominio determinado por $x > 1$, la función es inyectiva, el codominio es R, existe función inversa que es:

$$f^{-1}(x) = 1 + e^x$$

8°) $f(x) = \ln(2x - 1)$

9°) $g(x) = \frac{1}{x}$

Rta.: en el dominio, que excluye solamente el número real 0, la función es uno a uno. El codominio = D. Tiene inversa que es

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}. \qquad \forall\, x \neq 0$$

10°) $f(t) = \frac{1}{t-1}$

Rta.: en el dominio que excluye solamente el número real 1, la función es inyectiva. El codominio excluye el 0, la función inversa es:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 1 \qquad \forall\, x \neq 0$$

11°). $f(x) = \frac{1}{x-3}$

12°) $f(z) = \sqrt[3]{z+1}$

Rta.: la función es uno a uno y su inversa es

$$f^{-1}(z) = z^3 - 1$$

13°) $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+2}$

14°) $\varphi(x) = \frac{x-2}{x+2}$

Rta.: la función en el dominio que excluye solamente el número real -2, es uno a uno. El codominio excluye $x = 1$. Para obtener la inversa se procede así:

$$y = \frac{x-2}{x+2} \implies y(x+2) = x-2 \implies yx + 2y = x - 2$$

$$2y + 2 = x - yx \implies 2y + 2 = x(1-y) \implies x = \frac{2y+2}{1-y}$$

$$\text{o sea } \varphi^{-1}(y) = \frac{2y+2}{1-y} \implies \varphi^{-1}(x) = \frac{2x+2}{1-x} \qquad \forall\, x \neq 1$$

15°) $f(t) = \frac{t-1}{t+1}$

16°) $\varphi(x) = \frac{x+3}{x-3}$

Funciones inversas de cada una de las funciones trigonométricas *sen, cos, tg,* en determinados intervalos

El *sen* del ángulo de 30° es igual a $\frac{1}{2}$; el arco correspondiente expresado en radianes es $\frac{\pi}{6}$; o sea que $\frac{\pi}{6}$ es el arco cuyo *sen* es $\frac{1}{2}$, que se escribe:

$$\frac{\pi}{6} = \text{arc. sen}\, \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} = \text{sen}\, \frac{\pi}{6} \quad \text{análogamente:}$$

$$\frac{\pi}{3} = \text{arc. sen}\, \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}\, \frac{\pi}{3} \quad \text{en general:}$$

$$y = \text{arc. sen}\, x \iff x = \text{sen}\, y$$

Vale decir que la función *arc. sen* es la inversa de la función *sen* y recíprocamente; pero esto es válido solamente en determinados intervalos, en cada intervalo en que la función *sen* es uno a uno o inyectiva; ejemplo en cada uno de los intervalos

$$\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right] \qquad \left[\frac{\pi}{2};\ -3\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{etc.}$$

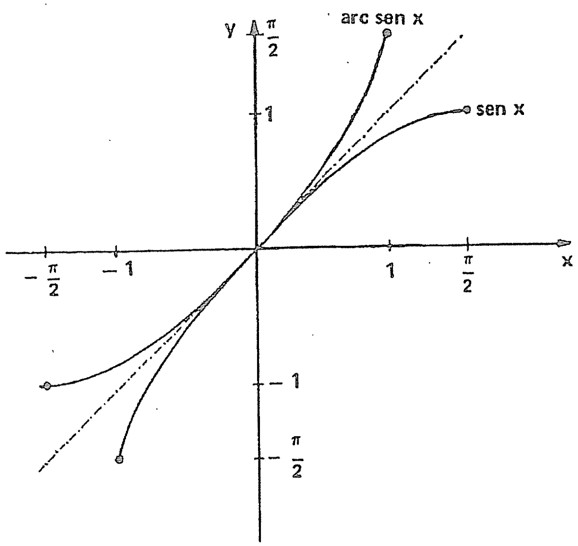
La función *arc. cos* es la inversa de la función *cos* en los intervalos

$$[-\pi\,;0] \qquad [0\,;\pi] \qquad \text{etc.}$$

La función *arc. tg* es la inversa de la función *tg* en cada uno de los siguientes intervalos

$$\left[\frac{\pi^+}{2};\ \frac{\pi}{2}\right] \qquad \left[\frac{\pi^+}{2};\ 3\,\frac{\pi^-}{2}\right]$$

Gráfica de *arc sen* x y *sen* x en el intervalo $-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}$



Funciones implícitas

Las funciones explícitas, se llaman así porque la variable y que representa el conjunto de valores del codominio está despejada

Ejemplos

$y = x^2 + 3x \qquad y = \ln x \qquad y = \dfrac{x-1}{x+2}$

En cambio, hay otras funciones en que la variable y no está despejada.

Ejemplos

1°) $xy + 5y - 3 = 0$

2°) $\dfrac{4x - 3y}{7} = x + 2$

En estos ejemplos se puede despejar y y pasar a la forma explícita, así en el

primer ejemplo $y = \dfrac{3}{x+5}$

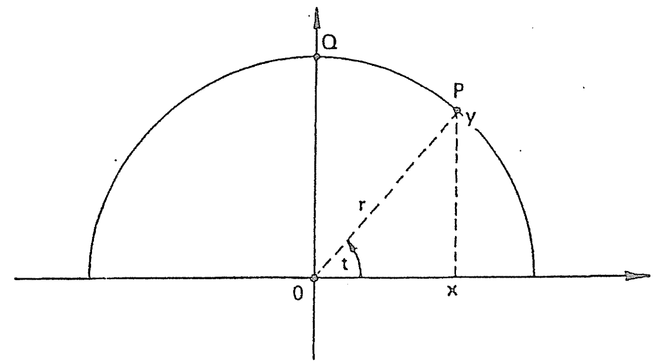
segundo ejemplo $y = -x - \dfrac{14}{3}$

Pero hay otros casos en que es difícil y hasta imposible, pasar de la forma implícita a la explícita.

Funciones definidas paramétricamente

Hasta ahora hemos visto en general, gráficas de funciones explícitas, es decir: $y = f(x)$. Pero a veces la abscisa x y la ordenada y de cada punto de la gráfica, se expresan en función de otra variable que se llama parámetro.

Ejemplo: la semicircunferencia de la figura es la gráfica de la función explícita $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$. Sea P un punto cualquiera de la curva de coordenadas x e y. Si se considera el ángulo t determinado por el semieje positivo x con la semirrecta OP, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, a partir del semieje x; resulta que las coordenadas x e y se pueden determinar en función de t, así:



$\cos t = \dfrac{x}{r} \implies x = r \cos t \qquad \operatorname{sen} t = \dfrac{y}{r} \implies y = r \operatorname{sen} t$

Para cada valor de t comprendido entre 0 y π queda determinado un par $(x ; y)$. Por ejemplo para $t = \dfrac{\pi}{2}$ resulta

$x = r \cos \dfrac{\pi}{2} = r\,0 = 0$

$y = r \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} = r\,1 = r$

que son efectivamente las coordenadas del punto Q que corresponde a $t = \dfrac{\pi}{2}$.

La expresión paramétrica de esta curva se indica:

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \operatorname{sen} t \end{cases}$$

También se dice que la función correspondiente está expresada paramétricamente. En general, la función que expresa a x se la indica con $\varphi(t)$ y la que expresa a y con $g(t)$, luego

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

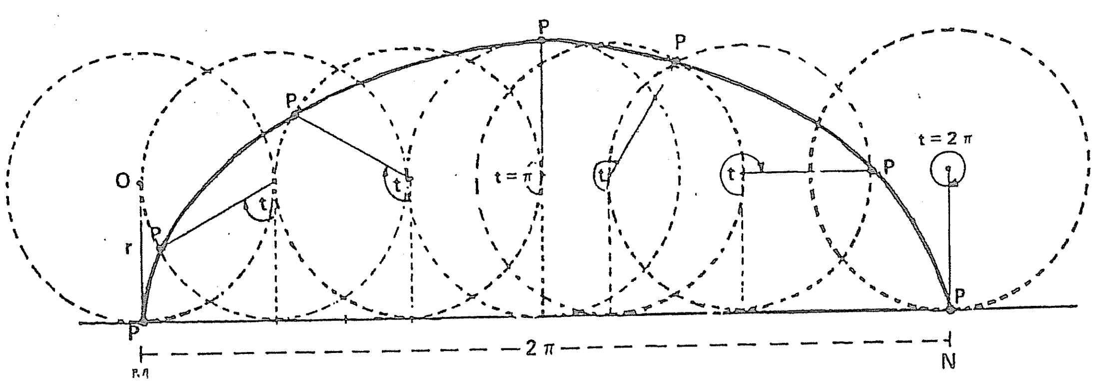
Ejemplo: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2\,t^2 \end{cases}$ es la expresión paramétrica de la función cuya gráfica es una parábola de vértice $V(1\ ;\ 0)$ y de eje $x = 1$. En efecto:

$x = 1 - t \Longrightarrow t = 1 - x$ se reemplaza este valor de t en $y = 2t^2$ y resulta $y = 2\,(1 - x)^2 \Longrightarrow y = 2\,(1 - 2\,x + x^2) \Longrightarrow y = 2\,x^2 - 4\,x + 2$ que como ya se sabe, por ser función polinómica de 2° grado es una parábola y se puede verificar que el vértice y el eje son los indicados.

En los dos ejemplos dados, además de la expresión paramétrica, se conoce la explícita y se pasa fácilmente de una a otra. Pero hay casos en que es casi indispensable la expresión paramétrica, por lo complicada que resultaría la explícita; un ejemplo de estos casos es la:

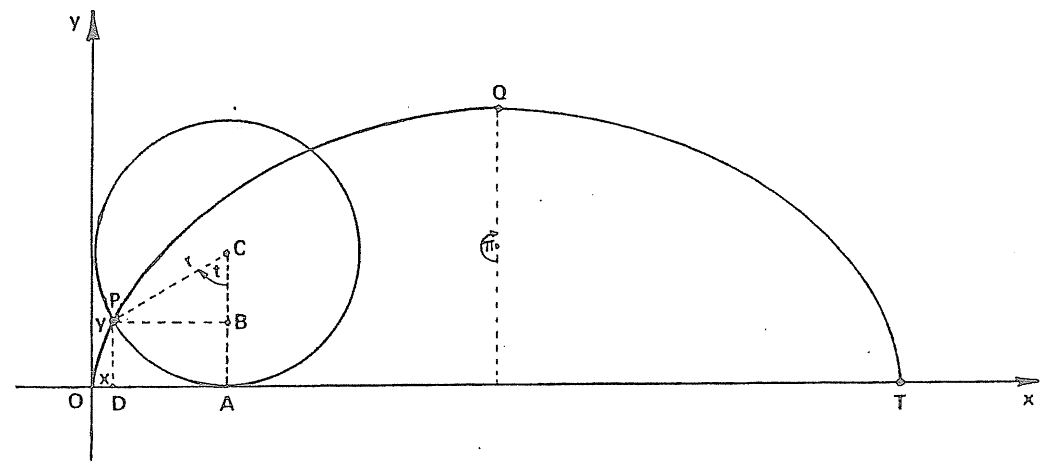
Cicloide: es la curva engendrada por el punto de una circunferencia que rueda, sin resbalar, sobre una recta.

En la siguiente figura está dibujada la onda de cicloide engendrada por el punto P de la circunferencia de centro O y radio r, cuando esta circunferencia rueda sin resbalar sobre la recta a. En dicha figura se indica la ubicación del punto P en las distintas posiciones de la circunferencia al rodar, y los distintos ángulos t que describe el radio OP.



En la posición inicial el ángulo t es 0, en el punto más alto de la curva $t = 180°$ o sea π, después de rodar toda la circunferencia, cuando P vuelve a estar en la recta a el ángulo $t = 360°$ o sea 2π. La distancia MN entre la posición inicial y final del punto P sobre la recta a es $2\pi r$ igual a la longitud de la circunferencia, pues ha rodado una vuelta completa.

Si se considera un par de ejes coordenados con origen en la posición inicial del punto de la circunferencia que genera la cicloide, y como eje x la recta a; las coordenadas $x\ y$ de un punto P de la cicloide, se expresan paramétricamente en función de t, en la siguiente forma:



Un punto P de la cicloide tiene coordenadas $x\ y$

La ordenada $y = \overline{BA} = \overline{CA} - \overline{CB}$ pero $\overline{CA} = r$

$$\cos\ t = \frac{\overline{CB}}{r} \Longrightarrow CB = r \cos t$$

reemplazando $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ se tiene

$$y = r - r\cos t \Longrightarrow y = r\,(1 - \cos t)$$

que expresa la ordenada en función de t.

Para obtener la abscisa x en función de t, hay que observar que el segmento $\overline{OA}$ proviene de haber rodado sobre la recta el arco $\overset{\frown}{PA}$, luego long $\overline{OA}$ = long $\overset{\frown}{PA}$. El arco $\overset{\frown}{PA}$ corresponde al ángulo central t de una circunferencia de radio r. Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ y corresponde el ángulo central de 1 giro, es decir 360° o sea su correspondiente en radicaciones 2π se tiene

a 2π corresponde una longitud $2\pi r$

a t " " " $\dfrac{2\pi r t}{2\pi} = rt$

luego $\text{long}\ \widehat{PA} = rt \Longrightarrow \text{long}\ \overline{OA} = rt$

La abscisa $x = \overline{OA} - \overline{DA} \Longrightarrow x = \overline{OA} - \overline{PB}$ pero $\overline{OA} = rt$

$$sen\ t = \frac{\overline{PB}}{r} \Longrightarrow \overline{PB} = r\ sen\ t$$

reemplazando $\overline{OA}$ y $\overline{PB}$ se tiene:

$x = r\,t - r\ sen\ t \Longrightarrow x = r\,(t - sen\ t)$ que expresa la abscisa en función de t.

Luego, la expresión paramétrica de la cicloide es:

$$\begin{cases} x = r\,(t - sen\ t) \\ y = r\,(1 - cos\ t) \end{cases}$$

Para cada valor de t corresponde uno de x y uno de y. Así para el punto Q que es el más alto de la curva corresponde $t = \pi$.

De la figura se deduce que la abscisa de Q es

$$\frac{\overline{OT}}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$$

y la ordenada es el diámetro de la circunferencia, es decir $2r$.

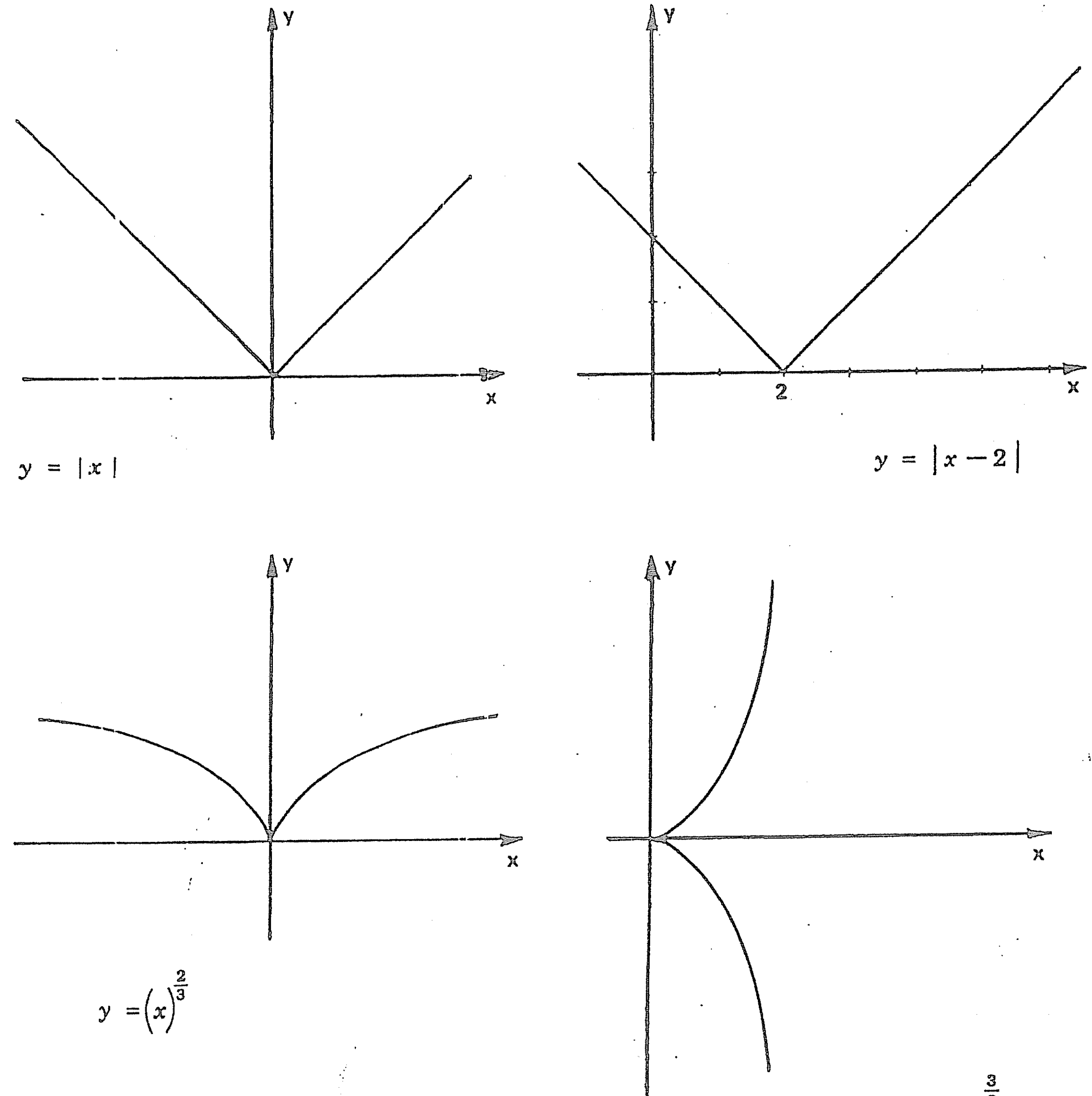
Reemplazando en la expresión paramétrica t por π se tiene

$$x = r\,(\pi - sen\ \pi) = r\,(\pi - 0) = r\pi$$
$$y = r\,(1 - cos\ \pi) = r\left(1 - (-1)\right) = r \,.\, 2 = 2r$$

que coinciden con las coordenadas de Q, obtenidas en la figura.

Si la circunferencia sigue rodando sobre la recta a, se repiten ondas de curva iguales a la dibujada.

GRAFICA DE ALGUNAS CURVAS COMUNES

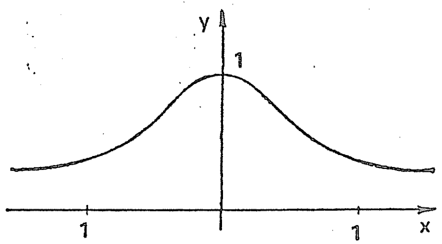


$y = |x|$

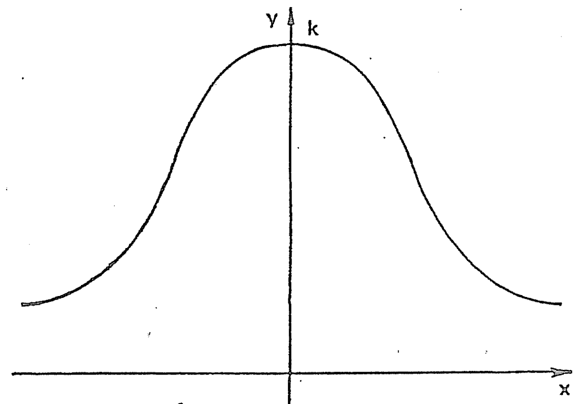
$y = |x - 2|$

$y = (x)^{\frac{2}{3}}$

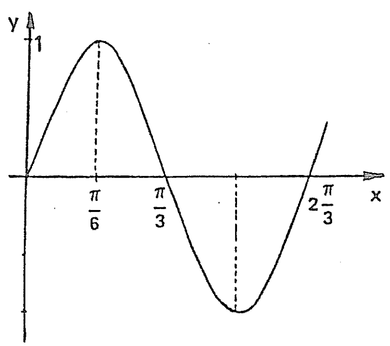
$y = (x)^{\frac{3}{2}}$



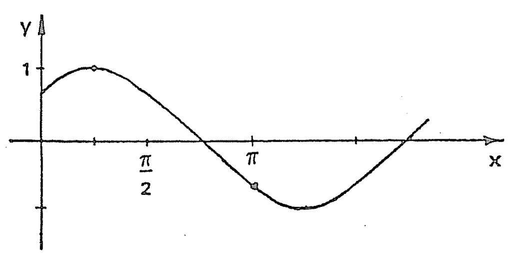
$y = e^{-x^2}$



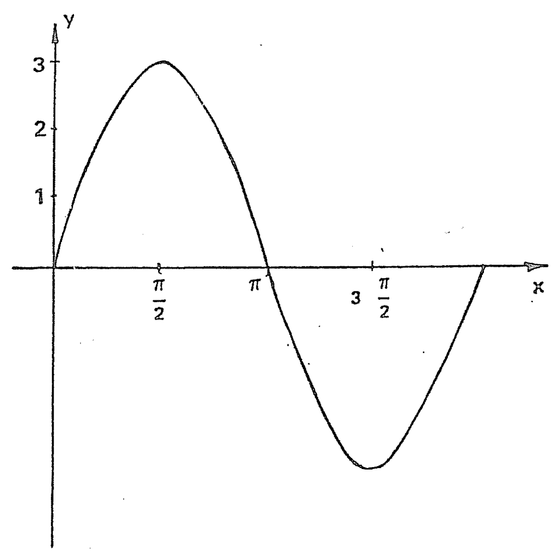
$y = k(e)^{-x^2}$



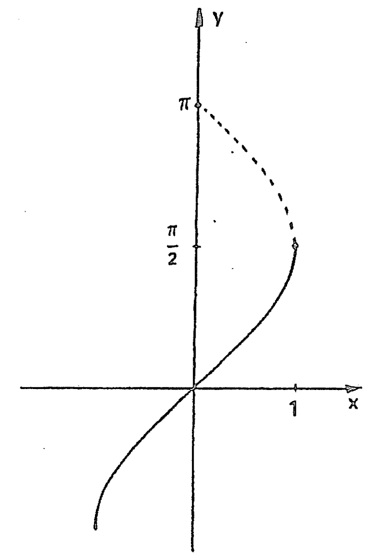
$y = sen\ 3\,x$



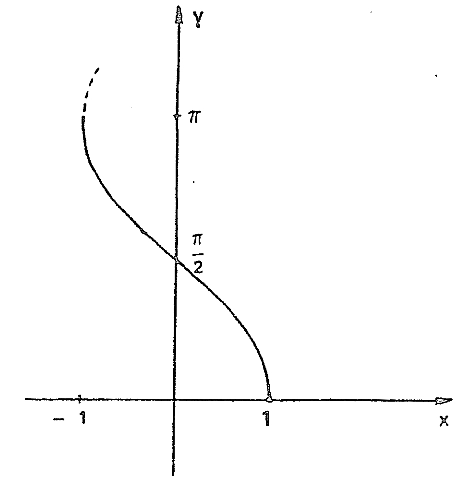
$y = sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



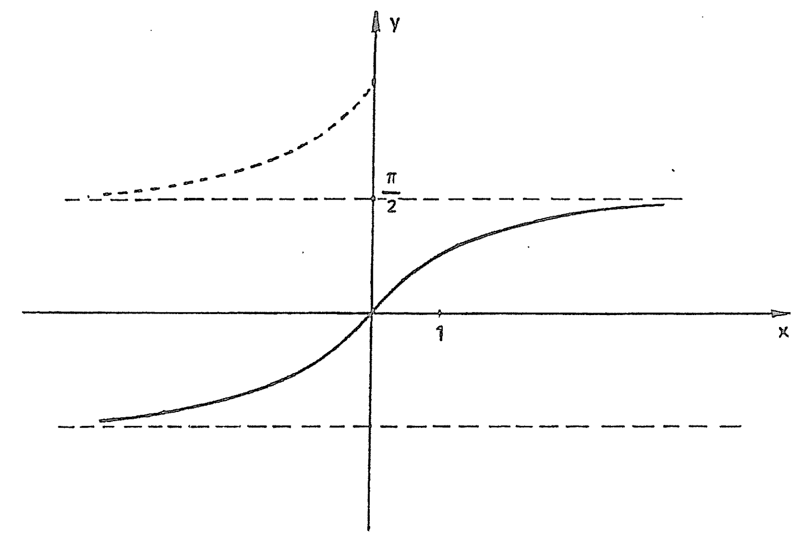
$y = 3\,sen\ x$



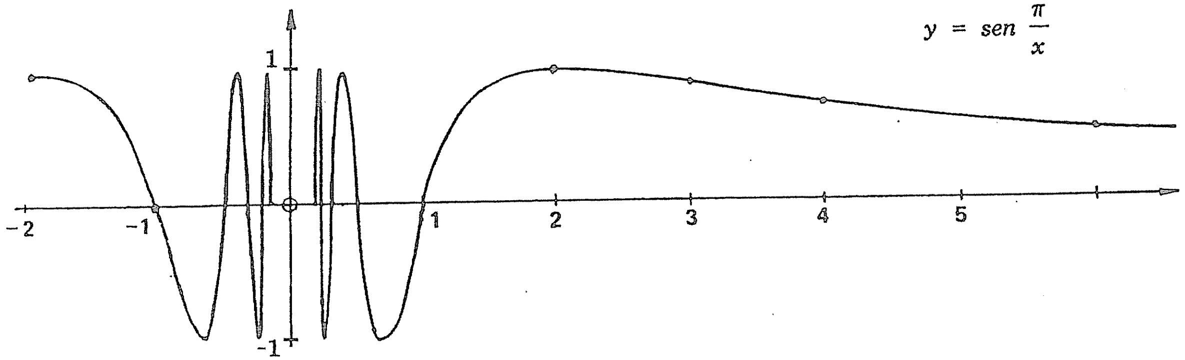
$y = arc\ sen\ x$ en $[-1\,;1]$



$y = arc\ cos\ x$ en $[-1\,;1]$



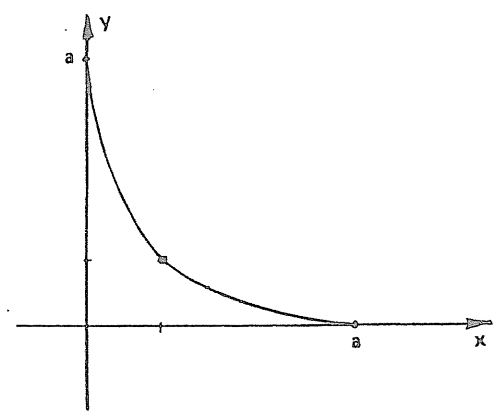
$y = arc\ tg\ x$



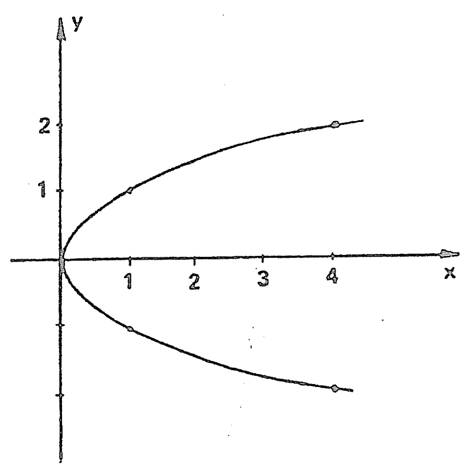
$y = sen\,\dfrac{\pi}{x}$

Se observa que:

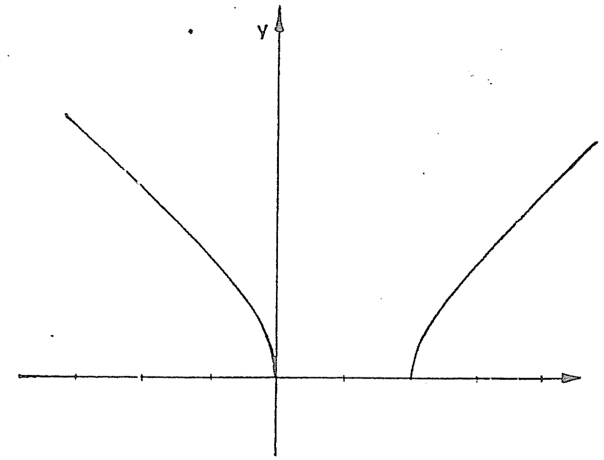
$$\begin{cases} \text{Para } x = \dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{1}{3}\,;\ \ldots\ldots;\ \dfrac{1}{n} \implies y = sen\,\dfrac{\pi}{\dfrac{1}{n}} = sen\; n\,\pi = 0 \\[2ex] \text{Para } x = \dfrac{2}{5}\,;\ \dfrac{2}{9}\,;\ \ldots\ldots;\ \dfrac{2}{4\,n+1} \implies y = sen\,(4\,n+1)\,\dfrac{\pi}{2} = sen\,\dfrac{\pi}{2} = 1 \\[2ex] \text{Para } x = \dfrac{2}{3}\,;\ \dfrac{2}{8}\,;\ \ldots\ldots;\ \dfrac{2}{4\,n-1} \implies y = sen\,(4\,n-1)\,\dfrac{\pi}{2} = sen\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases}$$



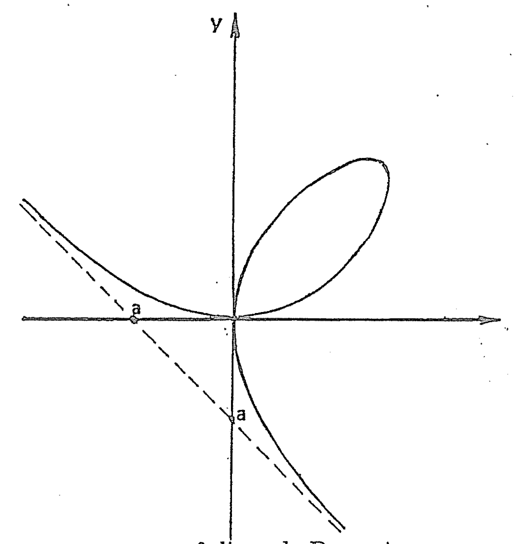
$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$



$y = \sqrt{x}$ parábola de eje x

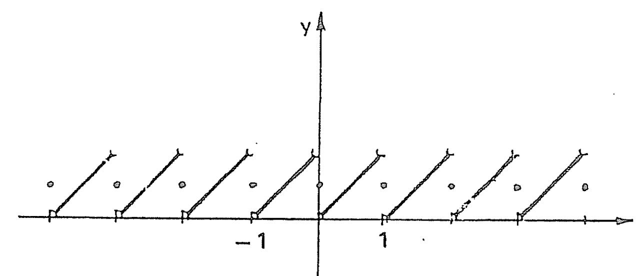


$y = +\sqrt{x\,(x-2)}$

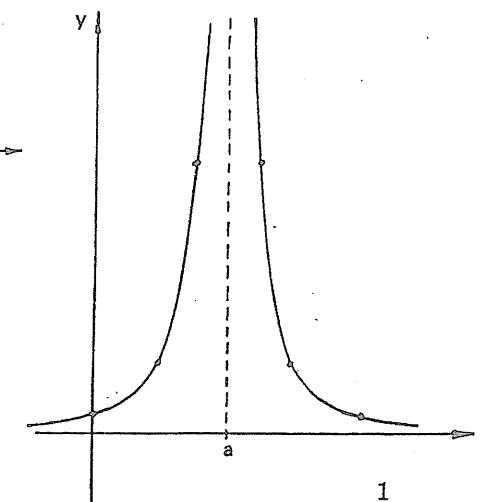


folium de Descartes

$x^3 + y^3 = 3\,a\,x\,y$

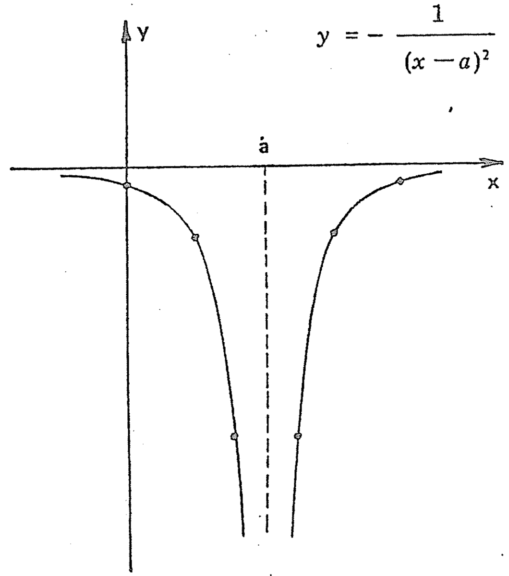


$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \forall\, x \text{ número entero} \\[1ex] x - E(x) & \forall\, x \text{ no entero} \end{cases}$$

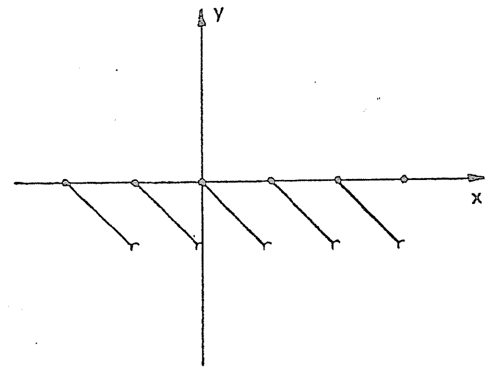


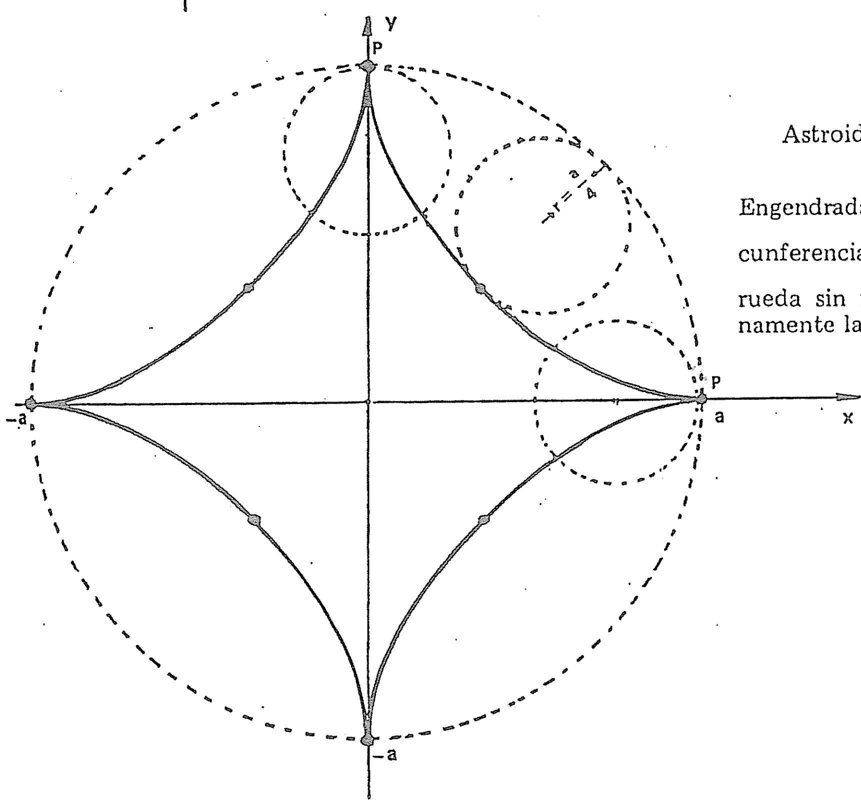
$y = \dfrac{1}{(x-a)^2}$

$$y = -\frac{1}{(x-a)^2}$$



$$y = E(x) - x$$

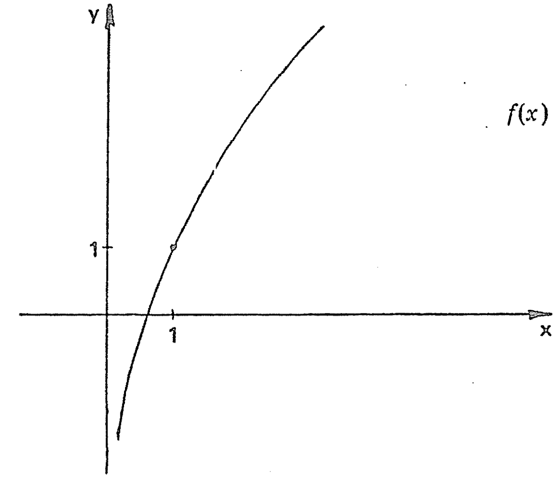




Astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

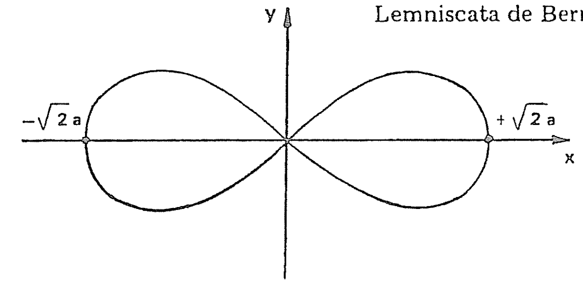
Engendrada por el punto P de la circunferencia de radio $r = \dfrac{a}{4}$ cuando rueda sin resbalar, recorriendo internamente la circunferencia de radio a.

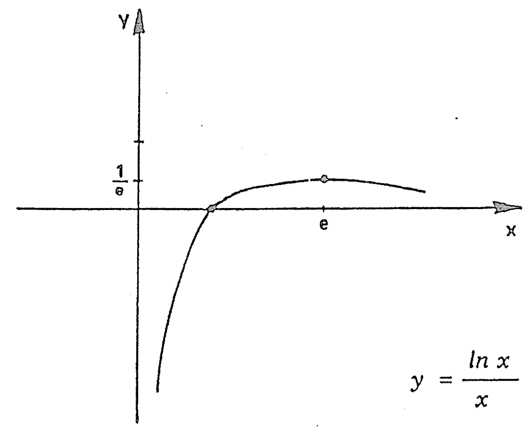
$$f(x) = x + \ln x$$



$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right)$$

Lemniscata de Bernoulli





$$y = \frac{\ln x}{x}$$

3 Límites

RESEÑA HISTORICA

El concepto de límite, que es uno de los pilares en que se basa el Análisis Matemático, se encontraba en 1800 en estado potencial, eran más principios intuitivos que otra cosa, en los que basaban las propiedades. Es el matemático Agustín Luis Cauchy, que vivió entre los años 1789-1857, quien estudia con rigor los fundamentos lógicos del Análisis Matemático e impone con claridad el concepto de límite.

Cabe decir que Agustín L. Cauchy, tuvo para sus convicciones políticas y religiosas, la misma firmeza y claridad, que para sus conceptos y razonamientos matemáticos, por eso siempre fue respetado.

Límite de una función en un punto

Dada la importancia fundamental de este concepto, es preciso asimilarlo y dominar las reglas y técnicas para el cálculo del mismo.

Trataremos de llegar a la noción de límite de una función en un punto mediante ejemplos previos.

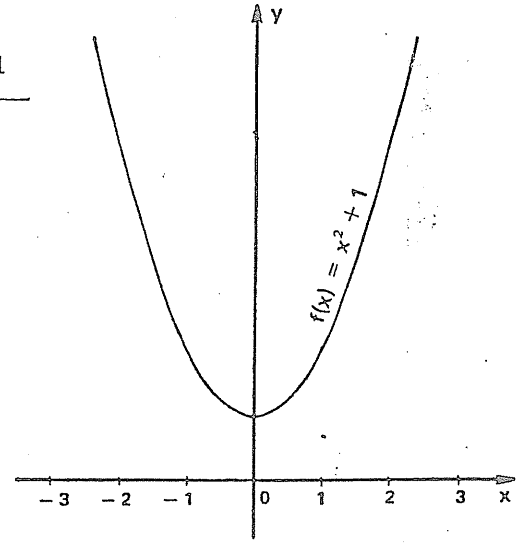
Ejemplo 1°

Sea la función: $f(x) = x^2 + 1$

Trataremos de calcular el límite de la misma, en el punto $x = 2$. Para ello calculamos los valores de la función que corresponden a valores de x que se aproximan a 2 por la derecha, es decir por valores mayores que 2 y también valores de la función que corresponden a valores de x que se aproximan a 2 por la izquierda, es decir por valores menores que 2.

En la siguiente tabla figuran algunos

	x	$f(x) = x^2 + 1$
valores de x que se aproximan a 2 por la derecha; por valores mayores que 2.	2,2	5,84
	2,1	5,41
	2,01	5,04
	2,001	5,004
valores de x que se aproximan a 2 por la izquierda; por valores menores que 2.	1,9	4,61
	1,99	4,96
	1,999	4,996



Como se observa, a medida que los valores de x se aproximan cada vez más a 2, tanto por la derecha como por la izquierda, los valores que determina la función se aproximan cada vez más al número 5. Esto se expresa diciendo que la función $f(x) = x^2 + 1$ tiene límite 5 en el punto $x = 2$ o cuando x tiende a 2, que se indica simbólicamente:

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1) = 5$$

Que se lee: límite de $(x^2 + 1)$, para x tendiendo a 2 es igual a 5. También se dice que dicha función tiende a 5 cuando x tiende a 2, que se indican en la notación:

$$(x^2 + 1) \longrightarrow 5 \quad \text{cuando} \quad x \longrightarrow 2$$

Si se considera otro punto del dominio de la función, por ejemplo $x = 0$, se observa que a medida que los valores de x se aproximan más a 0, tanto por la derecha como por la izquierda, los valores que determina la función se aproximan cada vez más a 1; o sea, que si se toman valores de x cuya diferencia con 0 es suficientemente pequeña, los valores correspondientes de y que determina la función, difieren de 1 tan poco como se quiera. Esto se expresa diciendo: que la función $f(x) = x^2 + 1$ tiene límite 1 en el punto 0, o bien que dicha función tiende a 1 cuando x tiende a 0.

	x	$y = x^2 + 1$
valores de x que se aproximan a 0 por la derecha	0,1	1,01
	0,01	1,0001
	0,001	1,000001
valores de x que se aproximan a 0 por la izquierda	– 0,1	1,01
	– 0,01	1,0001
	– 0,001	1,000001

Ejemplo 2°

Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{5x - 5}$ esta función no está definida en el punto $x = 1$, pues en él, el denominador es 0, es decir que 1 no pertenece al dominio de la función. Pues bien, vamos a ver que en ese punto 1 en que la función no está definida, resulta que la función tiene límite y vamos a calcular dicho límite.

	x	$y = \dfrac{x^2 - 1}{5x - 5}$
valores de x que se aproximan a 1 por la derecha	1,1	0,42
	1,01	0,402
	1,001	0,4002
valores de x que se aproximan a 1 por la izquierda	0,9	0,38
	0,99	0,398
	0,999	0,3998

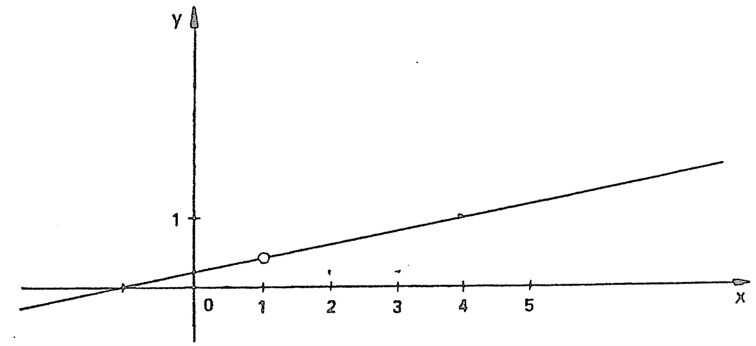
Se observa en la tabla de valores adjunta, que a medida que x se aproxima a 1 los valores correspondientes de la imagen y se aproximan cada vez más a 0,4. Es decir que esta función tiene como límite el número 0,4 en el punto $x = 1$, en que no está definida.

Simbólicamente:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{5x - 5} = 0,4$$

La gráfica de esta función es una recta, con un corte en $x = 1$, así puede intuirse, en el siguiente cuadro de valores, y la gráfica que de él resulta.

x	$y = \dfrac{x^2 - 1}{5x - 5}$
– 1	0
0	0,2
2	0,6
3	0,8
4	1



Observaciones: De los ejemplos y consideraciones anteriores, se sacan las siguientes conclusiones:

1°) El límite de una función en un punto es un número.

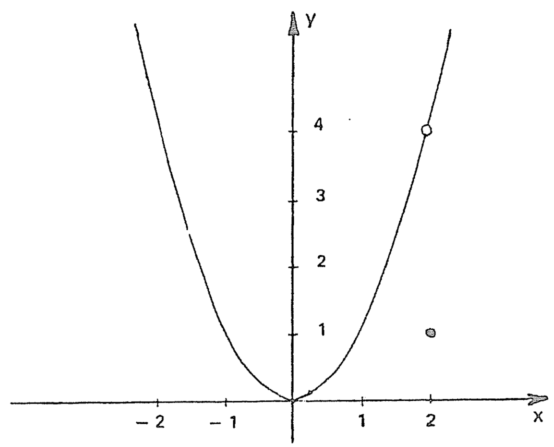
2°) El límite depende de la función y del punto x que se considere.

3°) El límite está determinado por los valores que toma la función en un entorno reducido del punto y no importa lo que ocurra en el mismo, incluso puede no estar definida en él y tener límite como en el ejemplo último, en el punto 1.

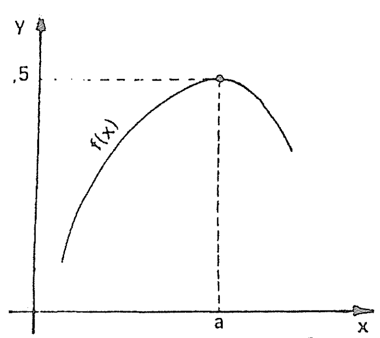
En otros casos puede estar definida en el punto y tener límite, pero el valor que toma la función en él ser distinto del límite, por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ \forall x \neq 2 \\ 1 \ \text{para} \ x = 2 \end{cases}$$

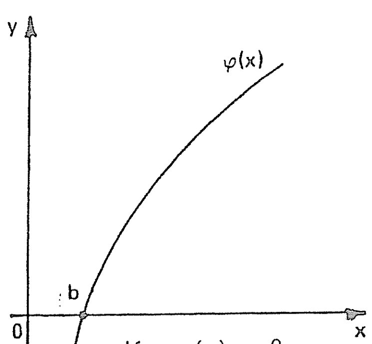
$$f(2) = 1 \ \wedge \ \lim_{x \to 2} f(x) = 4$$



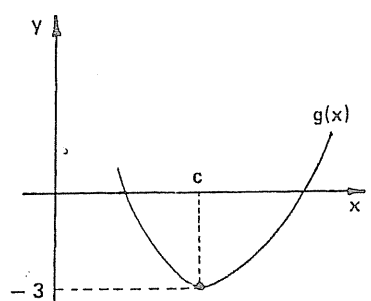
4°) El límite puede ser un número positivo, negativo o cero, como se ve en los siguientes gráficos:



$\lim_{x \to a} f(x) = 4{,}5 > 0$

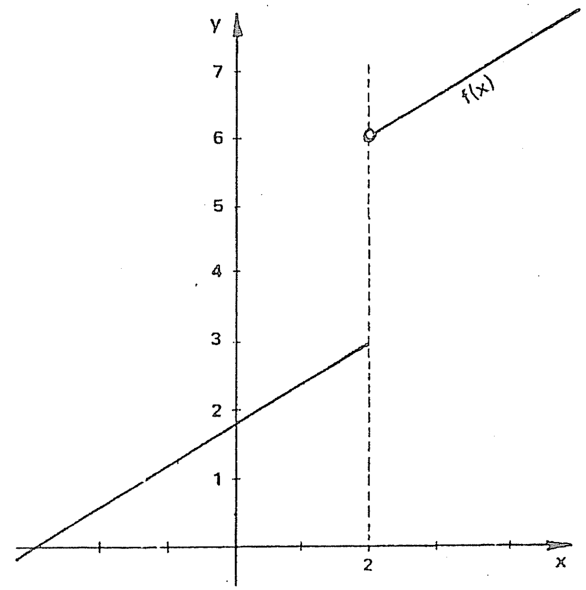


$\lim_{x \to b} \varphi(x) = 0$

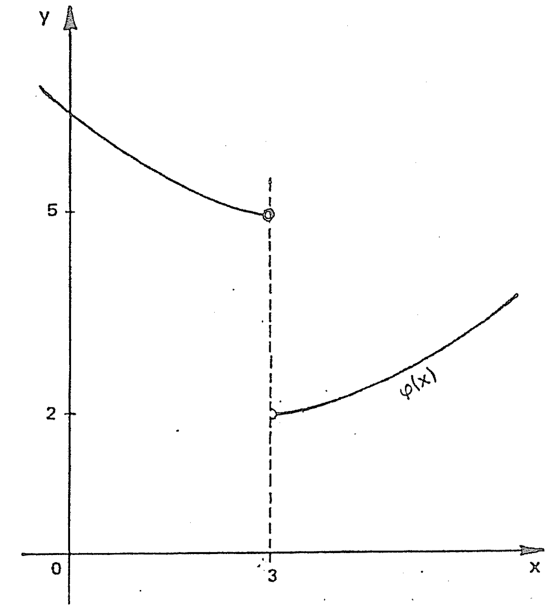


$\lim_{x \to c} g(x) = -3 < 0$

5°) Hay funciones que no tienen límite en un punto, como se observa en los siguientes gráficos



La función $f(x)$ está definida en 2 pues $f(2) = 3$ y no tiene límite en ese punto 2, pues cuando $x \longrightarrow 2$ por la izquierda los valores de $f(x)$ tienden a 3, mientras que cuando $x \longrightarrow 2$ por la derecha los valores de $f(x)$ tienden a 6.



La función $\varphi(x)$ no está definida en $x = 3$ y tampoco tiene límite en 3 pues cuando $x \longrightarrow 3$ por la izquierda los valores de $\varphi(x)$ tienden a 5, mientras que cuando $x \longrightarrow 3$ por la derecha los valores de $\varphi(x)$ tienden a 2.

6°) El punto en que se considera el límite, debe ser punto de acumulación del dominio, pues se habla de los valores que toma la función en infinitos puntos que se acercan a él, por la derecha y por la izquierda.

De acuerdo con las consideraciones hechas llegamos a que:

Se dice que una función tiene como límite el número l en un punto de acumulación a, si los valores $y = f(x)$ que determina la función, se aproximan a l tanto como se quiera, con tal de considerar valores de x suficientemente próximos a a, que podemos enunciar:

Definición: La función $f(x)$ tiene como límite el número l en el punto de acumulación $x = a$ cuando el valor absoluto de la diferencia entre los valores $f(x)$ y l se puede hacer tan pequeño como se quiera con tal de considerar valores de x suficientemente próximos a a.

Simbólicamente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff |f(x)-l| < \sigma \qquad \forall x / 0 \neq |x-a| < \delta$$

Se indica el valor absoluto de la diferencia $f(x)-l$ porque a veces como se ha visto en los ejemplos, esta diferencia puede ser negativa, pues para algunos valores de x es $f(x) < l$. Por otra parte se pone $0 \neq |x-a|$ dado que, como ya se ha dicho no interesa lo que ocurre en el punto $x = a$ sino en un entorno reducido de a.

El número σ que es positivo se elige tan pequeño como se quiere y de él depende δ, que es la semiamplitud del entorno reducido de a; así en el ejemplo:

$\lim\limits_{x\to 2} (x^2+1) = 5$ si se elige $\sigma = 0{,}6$, es decir se quiere que $|(x^2+1)-5| < 0{,}6$ basta tomar valores $\delta \leqslant 0{,}1$, o sea valores de x que difieren en 2 menos que 0,1, es decir:

$$|(x^2+1)-5| = |x^2-4| < 0{,}6 \Longrightarrow \delta \leqslant 0{,}1$$

en efecto, para $\delta = 0{,}1$ es $x^2 = (2+0{,}1)^2 = 2{,}1^2$

reemplazando:

$$|2{,}1^2 - 4| = 4{,}41 - 4 = 0{,}59 < 0{,}6$$

con más razón se verifica la desigualdad para $\delta < 0{,}1$.

Insistimos que $0 \neq |x-a| < \delta$ determina un entorno reducido de a de semiamplitud δ, de ahí que también se puede definir:

Una función $f(x)$ tiene como límite el número l en un punto de acumulación $x = a$, cuando el valor absoluto de la diferencia entre los valores de $f(x)$ y el límite, se puede hacer menor que cualquier número prefijado en un entorno reducido de a.

Simbólicamente:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff |f(x)-l| < \sigma \qquad \forall x / x \in E_a' \tag{1}$$

Ya se ha visto en el primer capítulo, que la acotación del valor absoluto implica que:

$$|f(x)-l| < \sigma \iff -\sigma < f(x)-l < \sigma$$ se suma l a cada miembro y se tiene:

$$-\sigma + l < f(x) - l + l < \sigma + l$$

o sea:

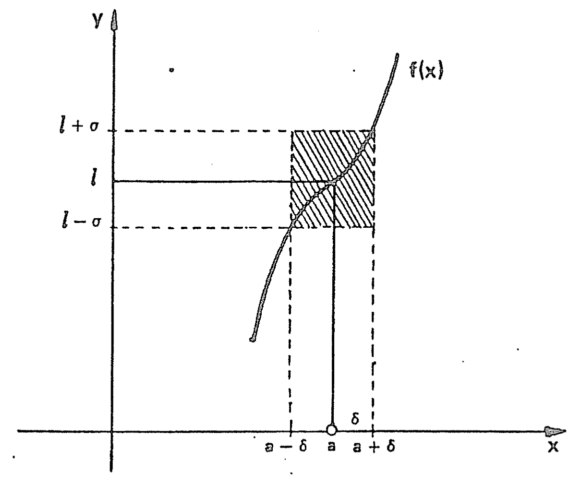
$$l - \sigma < f(x) < l + \sigma$$

Reemplazando en (1)

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff l-\sigma < f(x) < l+\sigma \qquad \forall x / x \in E_a' \tag{2}$$

Es decir: la función $f(x)$ tiene como límite el número l en el punto $x = a$ si y solo si, los valores que atribuye la función a los x de un entorno reducido de a de amplitud δ, están comprendidos entre $l-\sigma$ y $l+\sigma$.

Gráficamente:



o sea que el gráfico de la función correspondiente a los valores de $x \in E_a'$ de semiamplitud δ debe pertenecer al rectángulo sombreado en la figura.

Como el signo $\iff$ establece que la expresión que figura a la izquierda exige que se verifique la de la derecha y recíprocamente: de (2) resulta que:

Ejemplo 1°)

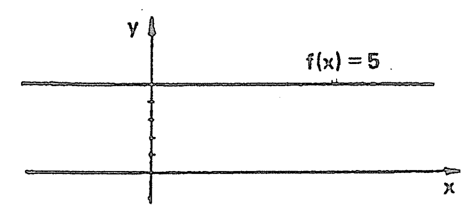
Si $\lim\limits_{x\to 2} \varphi(x) = 6 \iff 6 - 0{,}1 < \varphi(x) < 6 + 0{,}1$ en E_2'

Por otra parte:

Ejemplo 2°)

Si para σ tan pequeño como se quiera es:

$$8 - \sigma < \varphi(x) < 8 + \sigma \text{ en } E_3' \Longrightarrow \lim_{x\to 3} \varphi(x) = 8$$

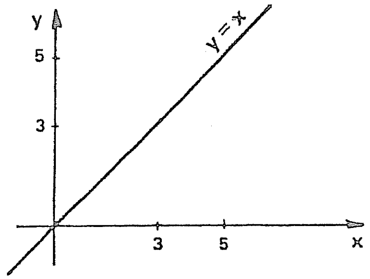


Si se tiene la función constante $f(x) = 5$ cuya gráfica se adjunta, se observa que, el límite para cualquier valor de x es 5.

En efecto, para cualquier punto $x = a$ es $|f(x) - 5| = 0 < \sigma$ en todo E_a'.

En general, toda función constante $f(x) = k$ tiene como límite ese mismo número k para cualquier valor de x.

Sea la función identidad $y = f(x) = x$



En el punto $x = 3$ el límite es $l = 3$

En el punto $x = 5$ el límite es $l = 5$

En el punto $x = -4$ el límite es $l = -4$

En general:

En el punto $x = a$ el límite es a o sea:

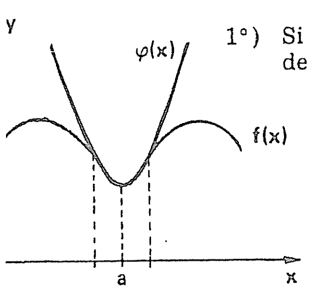
$\lim\limits_{x \to a} x = a$ en efecto $|f(x) - a| = |x - a| < \sigma$ para todo E'_a de semiamplitud $< \sigma$.

NOTA: La expresión $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ se puede expresar también

$$f(x) \longrightarrow l \quad \text{cuando} \quad x \longrightarrow a,$$

que se lee $f(x)$ tiende a l cuando x tiende a a.

Propiedades de los límites



1°) Si dos funciones $f(x) \wedge \varphi(x)$ toman valores iguales en un entorno reducido de un punto de acumulación $x = a$ y una de ellas tiene límite l en ese punto a la otra también tiene ese límite l en a.

En símbolos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{valores de } f(x) = \text{valores de } \varphi(x) \text{ en } E'_a \\ \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = l \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = l$$

Esta es una consecuencia inmediata de la definición pues el límite depende de los valores de la función en un entorno reducido del punto.

Esta propiedad tiene la siguiente ventaja: cuando una función es de expresión complicada, y no es fácil ver el límite que tiene en cierto punto, si se puede transformar mediante factoreos y simplificaciones en otra más simple que toma los mismos valores que ella en un entorno reducido del punto, se calcula el límite en la más sencilla.

Así, en el ejemplo considerado: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{5x - 5}$ la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{5x - 5}$ se factorea y se tiene $\dfrac{(x + 1)(x - 1)}{5(x - 1)}$ se simplifica por $(x - 1)$ y resulta $\varphi(x) = \dfrac{x + 1}{5}$;

esta función tiene los mismos valores que $f(x)$ en E'_1 y es fácil ver que cuando:

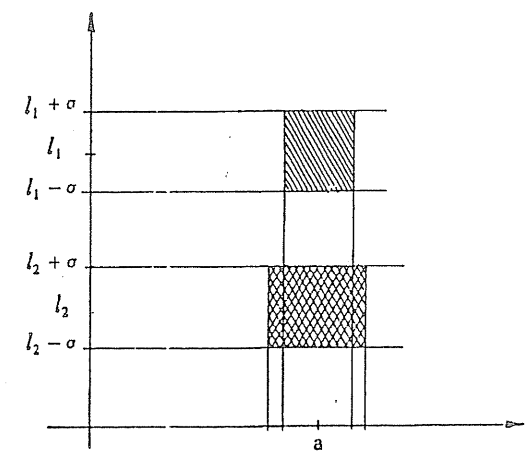
$$x \longrightarrow 1; \; \varphi(x) \longrightarrow \frac{1 + 1}{5} = 0{,}4 \Longrightarrow \lim_{x \to 1} \varphi(x) = 0{,}4$$

Por lo tanto, también $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim \dfrac{5x^2 - 1}{x - 5} = 0{,}4$ como ya lo habíamos calculado por un proceso más laborioso.

2°) Si una función tiene límite en un punto, ese límite es único.

Esta propiedad la demostraremos, viendo que una función no puede tener dos límites distintos en un punto.

Si suponemos que $f(x)$ tiene dos límites $l_1 \neq l_2$ en $x = a$, por ejemplo $l_1 > l_2$ se elige $\sigma < \dfrac{l_1 - l_2}{2}$ y de acuerdo con la expresión (2) de la definición de límite se tendría,



por una parte, si fuese l_1 el límite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \Longleftrightarrow l_1 - \sigma < f(x) < l_1 + \sigma \text{ en un } E'_a$$

por otra parte si fuese l_2 el límite:

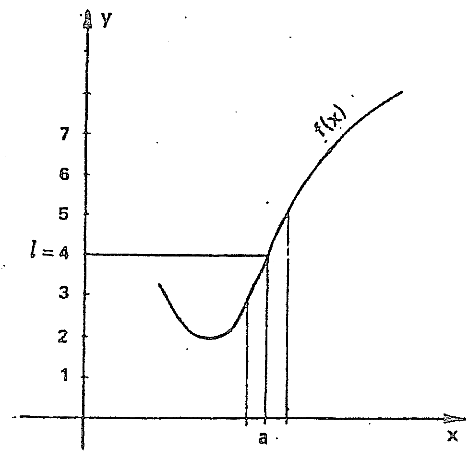
$$\lim_{x \to a} f(x) = l_2 \Longleftrightarrow l_2 - \sigma < f(x) < l_2 + \sigma \text{ en un } E'_a$$

En el menor de los dos entornos reducidos de a se verificarían las dos acotaciones de la función y esto no es posible, pues:

$$[l_1 - \sigma \,;\, l_1 + \sigma] \quad \text{y} \quad [l_2 - \sigma \,;\, l_2 + \sigma]$$

no tienen valores comunes, pues el primero corresponde al rectángulo superior rayado y el segundo al rectángulo inferior cuadriculado, que no tienen puntos comunes, y la gráfica de la función no puede estar en los dos rectángulos a la vez. Por lo tanto, es imposible que existan dos límites $l_1 \neq l_2$ en el mismo punto a.

3°) Sea la función $f(x)$ cuya gráfica se adjunta, que en el punto a tiene límite 4.



Si se considera un número mayor que 4, por ejemplo 6, se observa que en el entorno de a que se indica en la figura, la función tiene valores menores que 6; del mismo modo si se consideran otros números mayores que 4; por ejemplo 5; 7; 8; etc., en ciertos entornos de a los valores de la función son menores que cada uno de ellos.

Por otra parte, si se consideran valores menores que 4, por ejemplo 3; 1,8; etc. hay ciertos entornos de a en que los valores de la función se mantienen mayores que cada uno de ellos. Esta observación es general y se enuncia:

"Si una función tiene límite l en un punto, en un entorno reducido del mismo, la función toma valores menores que cualquier número mayor que el límite y mayores que cualquier número menor que el límite".

Simbólicamente:

1°) parte Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \ \wedge \ k > l \Longrightarrow f(x) < k$ en un E_a'

2°) parte Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \ \wedge \ m < l \Longrightarrow f(x) > m$ en un E_a'

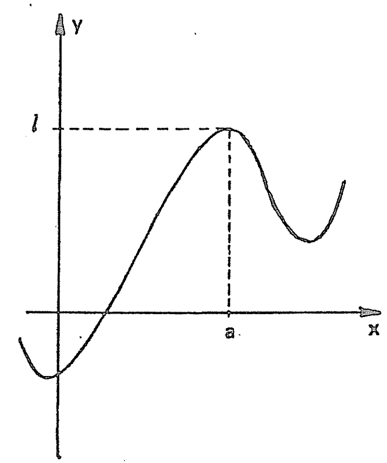
Demostración:

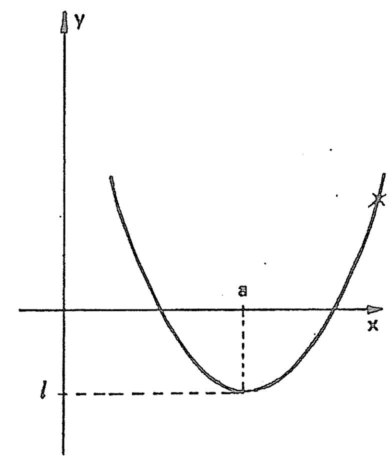
$k > l \Longrightarrow k - l > 0$	en la segunda desigualdad de (2) que establece	
$f(x) < l + \sigma$	en un E_a'	se reemplaza σ que es positivo por $k - l$
$f(x) < l + k - l$	en un E_a',	se reducen los términos l y se tiene
$f(x) < k$	en un E_a'	que es la primera parte

$m < l \Longrightarrow l - m > 0$	en la primera desigualdad de (2) que establece	
$l - \sigma < f(x)$	en un E_a'	se reemplaza σ que es positivo por $l - m$
$l - (l - m) < f(x)$	en un E_a'	se quita el paréntesis:
$l - l + m < f(x)$	en un E_a'	se reducen los términos en l y se tiene
$m < f(x)$	en un E_a'	o sea
$f(x) > m$	en un E_a'	que es la segunda parte.

De esta propiedad resultan dos corolarios muy importantes:

Corolario 1 Se observa en la gráfica que si el límite de una función en un punto a es positivo (fig. 1°) en un entorno de a la función tiene valores positivos. En cambio, si el límite en a es negativo (fig. 2°) en un entorno de a la función toma valores negativos. Estas observaciones son válidas en general y se enuncian:

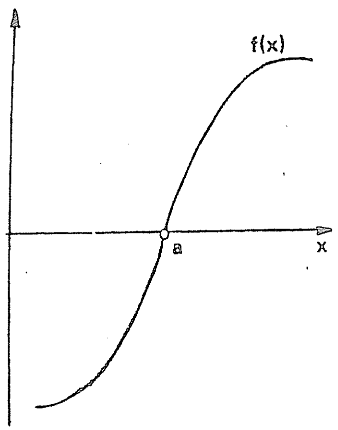




"Si una función tiene en un punto un límite distinto de cero, en un entorno reducido del punto la función determina valores del mismo signo que su límite."

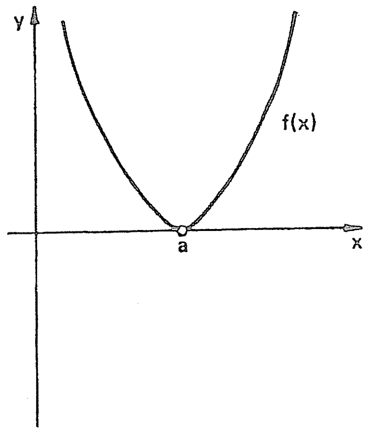
En efecto: si l es positivo es $0 < l$ o sea el número 0 es menor que el límite, de acuerdo con la 3° propiedad anterior, en un entorno reducido del punto los valores que toma la función son mayores que él, es decir $f(x) > 0$ o sea valores de la función positivos, del mismo signo que su límite. Si l es negativo, es $0 > l$ por la 3ª propiedad anterior $f(x) < 0$ en un entorno reducido del punto, es decir valores de la función negativos, del mismo signo que su límite.

Observación: si el límite es cero, nada se puede anticipar del signo de la función en un entorno reducido del punto. Así se ve en las siguientes figuras:



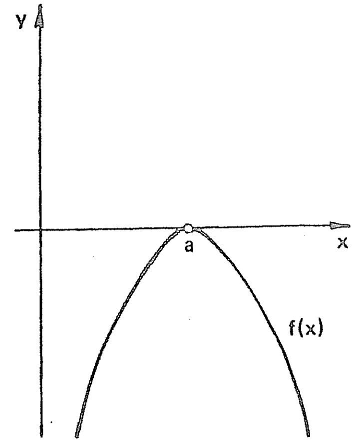
$\lim_{x \to a} f(x) = 0$

$\forall E_a' \; f(x) > 0 \;\wedge\; f(x) < 0$



$\lim_{x \to a} f(x) = 0$

$f(x) > 0$ en E_a'

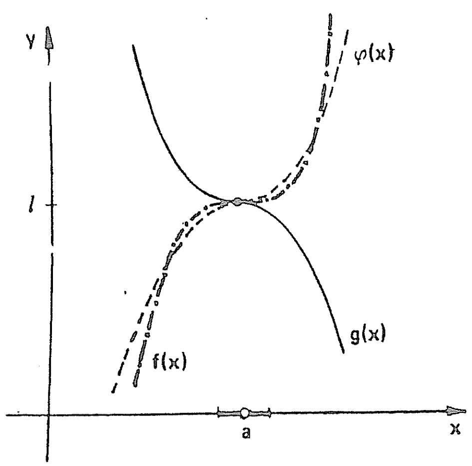


$\lim_{x \to a} f(x) = 0$

$f(x) < 0$ en E_a'

— **Corolario 2** Toda función que tiene límite finito en un punto, está acotada en un entorno reducido del mismo.

En efecto: si $\lim f(x) = l \quad \exists k > l \implies f(x) < k$ en E_a'
por lo tanto, si los valores de la función se mantienen menores que el número k en un E_a' está acotada en él.



Se observa en la figura que la función $f(x)$ en el entorno reducido de a, que se destaca en trazo grueso, toma valores comprendidos entre los de las funciones $\varphi(x)$ y $g(x)$. Se sabe que $\varphi(x)$ y $g(x)$ tienen el mismo límite l en el punto a; se intuye que $f(x)$ también tiene ese límite l en el punto a. Esta observación es válida en general y se enuncia:

4°) Si en un entorno reducido de un punto, los valores que determina la función están comprendidos entre los de otras dos funciones que tienen el mismo límite en ese punto, ella también tiene ese mismo límite en el punto.

Simbólicamente:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) < f(x) < \varphi(x) \quad \text{en un } E_a' \\ \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = l \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to a} f(x) = l$$

En efecto:

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = l \iff l - \sigma < \varphi(x) < l + \sigma \quad \text{en un } E_a'$$

$$\lim_{x\to a} g(x) = l \iff l - \sigma < g(x) < l + \sigma \quad \text{en un } E_a'$$

por otra parte $\quad g(x) < f(x) < \varphi(x) \quad$ en un E_a'

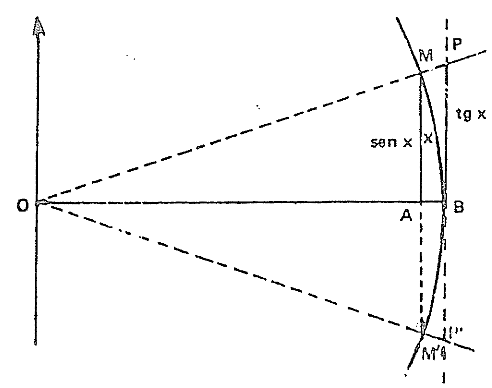
En el menor de los tres entornos se verifican las tres relaciones y como consecuencia:

$$l - \sigma < f(x) < l + \sigma \quad \text{en un } E_a' \implies \lim_{x\to a} f(x) = l$$

que es lo que se quería establecer.

Esta propiedad permite obtener el límite en un punto de algunas funciones, cuyo cálculo directo no es fácil.

Ejemplo: Calcular el límite de la función $f(x) = \dfrac{sen\, x}{x}$ en el punto $x = 0$.



Se considera la circunferencia trigonométrica y en ella el arco.

$\widehat{x} = \widehat{MB} < \dfrac{\pi}{2}$

$\overline{MA} = sen\, x$

$\overline{PB} = tg\, x$

Se determina M' simétrico de M con respecto a OB

$$\text{arco } \widehat{MM'} = 2x$$
$$\overline{MM'} = 2\, sen\, x$$
$$\overline{PP'} = 2\, tg\, x$$

Como arco $x < \frac{\pi}{2}$ se verifica:

Area del cuadrilátero OMBM' < área del sector OMM' < área del triángulo OPP' (1)

Como se trata de la circunferencia trigonométrica, el radio $\overline{OB} = 1$ luego:

Area del cuadrilátero OMBM' $= 2\,[\text{área } \overset{\triangle}{OMB}] = 2\left[\frac{1}{2}\,\overline{OB}\,.\,\overline{MA}\right] = 2\left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot sen\, x\right] = sen\, x$

Area del sector es igual a $\frac{1}{2}$ de la longitud del arco, por el cuadrado del radio, en este caso:

Area del sector OMM' $= \frac{1}{2}\, 2x\,.\,\overline{OB}^2 = \frac{1}{2}\, 2x.1 = x$

Area del triángulo OPP' $= 2\,[\text{área } \overset{\triangle}{OPB}] = 2\left[\frac{1}{2}\, OB\,.\,PB\right] = 2\left[\frac{1}{2}\cdot 1\cdot tg\, x\right] = tg\, x$

Reemplazando en las desigualdades (1), se tiene:

$$sen\, x < x < tg\, x$$

se divide cada miembro por $sen\, x$ que es positivo por ser $x < \frac{\pi}{2}$

se tiene

$$1 < \frac{x}{sen\, x} < \frac{tg\, x}{sen\, x} \qquad \text{pero} \qquad \frac{tg\, x}{sen\, x} = \frac{\frac{sen\, x}{cos\, x}}{sen\, x} = \frac{1}{cos\, x}$$

se reemplaza

$$1 < \frac{x}{sen\, x} < \frac{1}{cos\, x}$$

se invierten las razones, en consecuencia cambia el sentido de las desigualdades

$$1 > \frac{sen\, x}{x} > cos\, x$$

Es decir que: en un entorno de $x = 0$, la función $f(x) = \frac{sen\, x}{x}$ está comprendida entre:

$$g(x) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi(x) = cos\, x$$

como $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ y $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} cos\, x = 1$

las dos funciones $g(x)$ y $\varphi(x)$ tienen el mismo límite 1, luego $f(x) = \frac{sen\, x}{x}$ también tiene ese límite, es decir:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$$

Obsérvese que el argumento x del numerador $sen\, x$ es igual al denominador x; de tal modo que si el numerador es $sen\, 2x$ el denominador 'ebe ser $2x$ para que el límite sea 1. O sea:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\, 2x}{2x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{sen\, \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{sen\, 5x}{5x} = 1$$

Ejercicios resueltos

1°) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, 2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{3}\; 2\, \frac{sen\, 2x}{2x}\right] = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{sen\, 2x}{2x} = \frac{2}{3}\; 1 = \frac{2}{3}$

2°) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \left[\sqrt{x}\, \frac{sen\, x}{\sqrt{x}\,\sqrt{x}}\right] = \lim_{x\to 0} \left[\sqrt{x}\, \frac{sen\, x}{x}\right] = \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\; \lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 0\,.\,1 = 0$

Ejercicios propuestos: Calcular

1°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ 3x}{2x}$ Rta.: $\dfrac{3}{2}$

2°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ 5x}{3x}$ Rta.: $\dfrac{5}{3}$

3°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ x}{4x}$ Rta.: $\dfrac{1}{4}$

4°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ 2x}{4x}$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

5°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ 2x}{2\sqrt{x}}$ Rta.: 0

6°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ 2x}{3\sqrt{x}}$ Rta.: 0

Infinitésimos

La función $f(x) = x - 3$ en el punto 3 tiene límite 0 es decir:

$\lim\limits_{x\to 3} (x-3) = 0$ esto se expresa diciendo que $(x-3)$ es un infinitésimo para $x = 3$.

La función $\varphi(x) = \cos x$ en el punto $\dfrac{\pi}{2}$ tiene límite 0, es decir

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ esto se expresa diciendo que $\cos x$ es un infinitésimo para $x = \dfrac{\pi}{2}$.

La función $g(x) = x^2 - 1$ en los puntos 1 y -1 tiene límite 0, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} (x^2-1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1} (x^2-1) = 0 \end{array}\right\} \text{Esto se expresa diciendo que}$$

$x^2 - 1$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow 1$ y para $x \longrightarrow -1$

La función $u(x) = -2x - 8$ en el punto -4 tiene límite 0, es decir $\lim\limits_{x\to -4} (-2x-8) = 0$ esto se expresa diciendo que: $-2x - 8$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow -4$.

Obsérvese que el infinitésimo es para uno o más valores de x, pero no para cualquiera; así en el primer ejemplo $f(x) = x - 3$ es un infinitésimo para $x = 3$ pero no lo es para $x = 5$, ó $x = 1$, etcétera.

Definición: Una función de x es un infinitésimo para x tendiendo a a cuando tiene límite 0 para $x = a$.

Simbólicamente:

$f(x)$ es un infinitésimo para $x = a \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ o bien

$f(x)$ es un infinitésimo para $x = a \iff f(x) \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow a$

El infinitésimo es, entonces, el caso particular en que el límite es cero. Luego de acuerdo con la definición de límite se tiene:

$f(x)$ es un infinitésimo para $x = a \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \iff |f(x) - 0| < \sigma$ en un E'_a

o sea

$f(x)$ es un infinitésimo para $x = a \iff |f(x)| < \sigma$ en un E'_a

Es decir que el valor absoluto de la función puede hacerse tan pequeño como se quiera con tal de considerar un entorno de a, de amplitud suficientemente corta.

Decir para qué valores reales de x son infinitésimos cada una de las siguientes funciones:

1°) $x^3 - 1$ Rta.: $x = 1$

2°) $x^2 - 8$ Rta.: $x_1 = 2\sqrt{2}$; $x_2 = -2\sqrt{2}$

3°) $x^3 + 1$ Rta.: $x = -1$

4°) $2x - \dfrac{1}{2}$ Rta.: $x = \dfrac{1}{4}$

5°) $-3x + 1$ Rta.: $x = \dfrac{1}{3}$

6°) $-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$ Rta.: $x = \dfrac{1}{2}$

7°) $-x^3 + \dfrac{1}{27}$ Rta.: $x = \dfrac{1}{3}$

8°) $-\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{8}$ Rta.: $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = -\dfrac{1}{2}$

9°) $-x^3 - 27$ Rta.: $x = -3$

10°) $-x^5-32$ Rta.: $x=-2$

11°) $-\frac{1}{2}x^3-4$ Rta.: $x=-2$

12°) $-x^5-\frac{1}{32}$ Rta.: $x=-\frac{1}{2}$

13°) $sen\ 2x$ Rta.: $x=k\frac{\pi}{2}$

14°) $cos\ 2x$ Rta.: $x=(2k+1)\frac{\pi}{4}$

15°) $1-sen\ x$ Rta.: $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$

16°) $1-cos\ x$ Rta.: $x=k\,2\pi$

17°) $x\,.\,sen\ x$ Rta.: $x=k\,\pi$

18°) $x\,.\,cos\ x$ Rta.: $x=0$ y $x=(2k+1)\,\frac{\pi}{2}$

19°) $x\,.\,cos\ 2x$ Rta.: $x=0$ y $x=(2k+1)\,\frac{\pi}{4}$

20°) $x^2.\,sen\ 2x$ Rta.: $x=k\,.\,\frac{\pi}{2}$

21°) $tg\,x$ Rta.: $x=k\,.\,\pi$

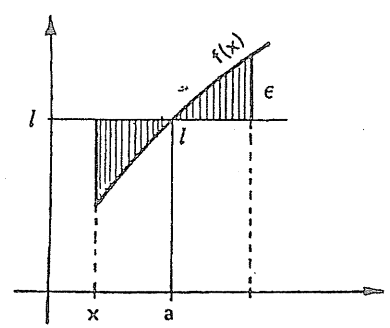
22°) $x.tg\,x$ Rta.: $x=k\,.\,\pi$

Dar ejemplos de infinitésimos para:

1°) $x\longrightarrow -1$ 2°) $x\longrightarrow \frac{1}{3}$ 5°) $x\longrightarrow \frac{2}{3}$

2°) $x\longrightarrow 2$ 4°) $x\longrightarrow -\frac{1}{2}$ 6°) $x\longrightarrow -\frac{1}{4}$

Expresión del límite de una función en un punto mediante el concepto de infinitésimo



En la figura se destaca en trazo negro grueso la diferencia $f(x)-l=\epsilon$ y se observa que tiende a 0 cuando x tiende a.

De acuerdo con la definición de límite de una función en un punto, la diferencia entre el valor de la función y el límite, tiende a 0, cuando x tiende al punto, es decir:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff f(x)-l = \epsilon \ / \ \epsilon\longrightarrow 0 \text{ cuando } x\longrightarrow a$$

se pasa l al segundo miembro

$$\boxed{\lim_{x\to a} \underline{f(x)} = \underline{l} \iff \underline{f(x)} = \underline{l} + \underline{\epsilon} \ / \ \epsilon\longrightarrow 0 \text{ cuando } x\longrightarrow a} \quad (3)$$

se sabe que decir que $\epsilon\longrightarrow 0$ cuando $x\longrightarrow a$ es equivalente a decir que ϵ es un infinitésimo para $x=a$.

Hay que tener bien presente que el signo de doble implicación establece que la expresión de la izquierda impone la que está a la derecha y recíprocamente la que está a la derecha impone la que está a la izquierda; en este caso si se sabe que el límite de una función en un punto a es un número, la función en x se puede expresar como la suma de ese número más un infinitésimo para $x\longrightarrow a$; y recíprocamente si una función en x es igual a la suma de un número más un infinitésimo para $x\longrightarrow a$, el límite de la función para $x\longrightarrow a$ es ese número. Así:

Ejemplo 1°)

$$\lim_{x\to 2} \varphi(x) = 9 \iff \underline{\varphi(x)} = \underline{9} + \underline{\epsilon} \ / \ \epsilon\longrightarrow 0 \text{ cuando } x\longrightarrow 2$$

Ejemplo 2°)

$$\underline{g(x)} = \underline{8} + \underline{\epsilon} \ / \ \epsilon\longrightarrow 0 \text{ cuando } x\longrightarrow 4 \iff \lim_{x\to 4} \underline{g(x)} = \underline{8}$$

Límite de operaciones con funciones

Como el nombre lo indica, dadas dos o más funciones, cada una de las cuales tiene límite finito en un punto, se estudia el límite de la función que resulta, al sumar, multiplicar, etc., dichas funciones.

El límite del resultado de estas operaciones, se puede hallar aplicando directamente la definición de límite, y así figura al final del capítulo; pero es más usual, estudiar primero las operaciones con infinitésimos y aplicar luego los resultados, a los límites de las operaciones con funciones en general.

Por otra parte, para cursos destinados a profesionales no especializados en Matemática pura, estas demostraciones pueden omitirse.

Operaciones con infinitésimos

Sean

$$\left.\begin{array}{rl} & x-2 \\ + & x^2-4 \\ - & 5x-10 \end{array}\right\}$$ son 3 infinitésimos para $x\longrightarrow 2$. Si sumamos los 2 primeros y a ese resultado le restamos el tercero, se tiene:

$$= x - 2 + x^2 - 4 - 5x + 10 =$$
$$= x^2 - 4x + 4$$

$x^2 - 4x + 4$ es otro infinitésimo para $x \longrightarrow 2$.

Esta observación es general y se enuncia:

La suma algebraica de un número finito de infinitésimos para $x \longrightarrow a$ es otro infinitésimo para $x \longrightarrow a$.

Lo demostraremos para la suma de dos infinitésimos.

Para todo σ suficientemente pequeño, se verifica que:

$f(x)$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a \iff |f(x)| < \dfrac{\sigma}{2}$ en un E_a'

$\varphi(x)$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a \iff |\varphi(x)| < \dfrac{\sigma}{2}$ en un E_a'

$|f(x)| + |\varphi(x)| < 2\dfrac{\sigma}{2}$ en el menor de los entornos E_a'.

o sea: $|f(x)| + |\varphi(x)| < \sigma$ en E_a'

como mód. de la suma $\leqslant$ la suma de los mód. $|f(x) + \varphi(x)| \leqslant |f(x)| + |\varphi(x)|$ $\Big\} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad |f(x) + \varphi(x)| < \sigma \quad \text{en un } E_a'$$

La conclusión $|f(x) + \varphi(x)| < \sigma$ en un E_a' implica que $|f(x) + \varphi(x)|$ puede hacerse tan pequeña como se quiera en un E_a', luego $f(x) + \varphi(x)$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a$.

La demostración es válida para la suma de 3 o más infinitésimos en número finito y también para la diferencia, luego queda demostrado para la suma algebraica en general.

Vamos a hallar el producto de un infinitésimo por un número.

$5x - 10$	Es un infinitésimo para $x \longrightarrow 2$
$\times\ 3$	Lo multiplicamos por 3
$15x - 30$	Este resultado $15x - 30$ es otro infinitésimo para $x \longrightarrow 2$. En general:

El producto de un infinitésimo para $x \longrightarrow a$ por un número distinto de 0 es otro infinitésimo para $x \longrightarrow a$.

Demostración: $f(x)$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a$ y k es un número, $k \neq 0$, $f(x)$ es infinitésimo para $x \longrightarrow a \iff |f(x)| < \dfrac{\sigma}{|k|}$ en un E_a' por pequeño que sea σ.

Se multiplican ambos miembros por $|k|$ $\quad |f(x)| \cdot |k| < \dfrac{\sigma}{|k|}\,|k|$ en E_a'

o sea $\quad |f(x)| \cdot |k| < \sigma$ en E_a'

como $\quad |f(x)| \cdot |k| = |f(x) \cdot k|$ $\Big\} \Longrightarrow |f(x) \cdot k| < \sigma$ en E_a'

La conclusión a que se ha llegado $|f(x) \cdot k| < \sigma$ en $E_a' \Longrightarrow$ el producto $f(x) \cdot k$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a$.

De lo expuesto se deduce que: El cociente de un infinitésimo para $x \longrightarrow a$ por un número distinto de cero, es otro infinitésimo para $x \longrightarrow a$.

En efecto, si el número es $m \neq 0$, dividir el infinitésimo por m equivale a multiplicarlo por el número $\dfrac{1}{m}$, y ya se aplica la propiedad anterior.

Vamos a multiplicar dos infinitésimos

$x - 1$	es un infinitésimo para $x \longrightarrow 1$
$\times\ x^2 - 1$	es otro infinitésimo para $x \longrightarrow 1$. Los multiplicamos:
$x^3 - x^2 - x + 1$	este resultado que es el producto de los dos infinitésimos dados es otro infinitésimo para $x \longrightarrow 1$.

En general:

El producto de dos infinitésimos para $x \longrightarrow a$, es otro infinitésimo para $x \longrightarrow a$.

$f(x)$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a \Longrightarrow |f(x)| < +\sqrt{\sigma}$ en un E_a' por pequeño que sea $\sigma > 0$

$g(x)$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a \Longrightarrow |g(x)| < +\sqrt{\sigma}$ en un E_a' por pequeño que sea $\sigma > 0$.

Se multiplica $|f(x)| \cdot |g(x)| < (+\sqrt{\sigma})^2$ en el menor de los dos E_a'.

O sea: $|f(x)| \cdot |g(x)| < \sigma$ en un E'_a
pero $|f(x)| \cdot |g(x)| = |f(x) \cdot g(x)|$

$$\left.\begin{array}{l} |f(x)| \cdot |g(x)| < \sigma \text{ en un } E'_a \\ |f(x)| \cdot |g(x)| = |f(x) \cdot g(x)| \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) \cdot g(x)| < \sigma \text{ en un } E'_a$$

por lo tanto $|f(x) \cdot g(x)|$ es tan pequeño como se quiera en un E'_a
luego: $f(x) \cdot g(x)$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a$.

NOTA: Con respecto al cociente de dos infinitésimos para $x \longrightarrow a$, nada se puede anticipar sobre el resultado. Así lo veremos más adelante.

A continuación se estudian los límites de algunas operaciones con funciones.

El límite en un punto, de la suma algebraica de un número finito de funciones, cada una de las cuales, tiene límite finito en ese punto, es igual a la suma algebraica de los límites de cada una.

Lo demostraremos para la suma algebraica de 3 funciones:

H) $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ T) $\lim_{x \to a} [f(x) + \varphi(x) - g(x)] = l_1 + l_2 - l_3$

$\lim_{x \to a} \varphi(x) = l_2$

$\lim_{x \to a} g(x) = l_3$

Demostración:

$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \iff f(x) = l_1 + \epsilon_1 \;/\; \epsilon_1$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a$

$\lim_{x \to a} \varphi(x) = l_2 \iff \varphi(x) = l_2 + \epsilon_2 \;/\; \epsilon_2$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a$

$\lim_{x \to a} g(x) = l_3 \iff g(x) = l_3 + \epsilon_3 \;/\; \epsilon_3$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a$

Se suman las dos primeras y se resta la tercera $f(x) + \varphi(x) - g(x) = (l_1 + \epsilon_1) + (l_2 + \epsilon_2) - (l_3 + \epsilon_3)$

Se reúnen los términos $l_1 + l_2 - l_3$ por una parte, y por otra $\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3$ y se tiene

$$f(x) + \varphi(x) - g(x) = (l_1 + l_2 - l_3) + (\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3)$$

$(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3)$ es la suma algebraica de tres infinitésimos para $x \longrightarrow a$ por lo tanto es igual a otro infinitésimo ϵ para $x \longrightarrow a$. Se reemplaza:

$$[f(x) + \varphi(x) - g(x)] = (l_1 + l_2 - l_3) + \epsilon \;/\; \epsilon \text{ es un infinitésimo para } x \longrightarrow a$$

Igualdad que establece, de acuerdo con la definición de límite expresada en (3), que:

$$\boxed{\lim_{x \to a} [f(x) + \varphi(x) - g(x)] = l_1 + l_2 - l_3}$$

La demostración es válida, para la suma algebraica de más de 3 funciones, siempre que sean en número finito, luego queda demostrado en general:

El límite del producto de dos funciones, cada una de las cuales tiene límite para $x \longrightarrow a$ es el producto de los límites.

H) $\lim_{x \to a} f(x) = l_1$ T) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = l_1 \cdot l_2$

$\lim_{x \to a} \varphi(x) = l_2$

Demostración:

$\lim_{x \to a} f(x) = l_1 \iff f(x) = l_1 + \epsilon_1 \;/\; \epsilon_1 \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow a$

$\lim_{x \to a} \varphi(x) = l_2 \iff \varphi(x) = l_2 + \epsilon_2 \;/\; \epsilon_2 \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow a$

se multiplican $f(x) \cdot \varphi(x) = (l_1 + \epsilon_1)(l_2 + \epsilon_2)$
se efectúa la multiplicación en el segundo miembro
$f(x) \cdot \varphi(x) = l_1 l_2 + \epsilon_1 l_2 + l_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_2$

que se puede escribir $[f(x) \cdot \varphi(x)] = (l_1 l_2) + (\epsilon_1 l_2 + l_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_2)$

La expresión encerrada en el último paréntesis $(\epsilon_1 l_2 + l_1 \epsilon_2 + \epsilon_1 \epsilon_2)$ es la suma de tres infinitésimos para $x \longrightarrow a$, pues: $\epsilon_1 l_2$ es el producto de un infinitésimo ϵ_1 por el número l_2 análogamente $l_1 \epsilon_2$; el tercero $\epsilon_1 \epsilon_2$ es el producto de dos infinitésimos, por lo tanto, dicha suma es un infinitésimo para $x \longrightarrow a$.

Se reemplaza y se tiene:

$[f(x) \cdot \varphi(x)] = l_1 l_2 + \epsilon \;/\; \epsilon$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a$. Esta igualdad implica que:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = l_1 l_2$$

El límite en un punto, del cociente de dos funciones cada una de las cuales tiene límite, y el límite de la función denominador es distinto de cero, es igual al cociente de los límites.

H) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1$ T) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$

$\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = l_2 \neq 0$

Demostración:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1 \iff f(x) = l_1 + \epsilon_1 \ / \ \epsilon_1 \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow a$

$\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = l_2 \iff \varphi(x) = l_2 + \epsilon_2 \ / \ \epsilon_2 \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow a$.

se divide $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{l_1 + \epsilon_1}{l_2 + \epsilon_2}$

se resta de ambos miembros $\dfrac{l_1}{l_2}$ $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} - \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{l_1 + \epsilon_1}{l_2 + \epsilon_2} - \dfrac{l_1}{l_2}$

se efectúa la operación en el segundo miembro

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{(l + \epsilon_1)\, l_2 - l_1\,(l_2 + \epsilon_2)}{(l_2 + \epsilon_2)\, l_1}$$

o sea $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} - \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{l_1\, l_2 + \epsilon_1\, l_2 - l_1\, l_2 - l_1\, \epsilon_2}{l_2^2 + \epsilon_2\, l_2}$

se reducen los términos $l_1\, l_2 - l_1\, l_2$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{\epsilon_1\, l_2 - l_1\, \epsilon_2}{l_2^2 + \epsilon_2\, l_2}$$

El segundo miembro es un infinitésimo para $x \longrightarrow a$, pues el numerador es la diferencia de dos infinitésimos y el denominador tiende al número l_2^2 cuando $x \longrightarrow a$. Por lo tanto:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{l_1}{l_2} = \epsilon \ / \ \epsilon \text{ es un infinitésimo para } x \longrightarrow a$$

Se pasa $\dfrac{l_1}{l_2}$ al segundo miembro, y resulta:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{l_1}{l_2} + \epsilon \ / \ \epsilon \text{ es un infinitésimo para } x \longrightarrow a$$

igualdad que implica:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{l_1}{l_2}}$$

Se demuestra también, mediante procesos más laboriosos, que:

El límite del logaritmo de una función que tiene límite finito y positivo para $x \longrightarrow a$, es el logaritmo del límite.

En símbolos:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} [\log_b f(x)] = \log_b [\lim f(x)]$

El límite del coseno, es el coseno del límite.

En símbolos:

$\lim\limits_{x\to a} [\cos \varphi(x)] = \cos [\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)]$

El límite de la exponencial, es la exponencial de límite.

En símbolos:

$\lim\limits_{x\to a} [b^{\varphi(x)}] = [b]^{\lim\limits_{x\to a} \varphi(x)}$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 1} [9^{2x-3}] = [9]^{\lim\limits_{x\to 1} (2x-3)} = 9^{-1} = \dfrac{1}{9}$

Si la base es una función y el exponente otra función y cada una de ellas tiene límite, se toma límite en la base y en el exponente (siempre que no sean ambos nulos):

En símbolos:

$$\lim_{x\to a} \left\{ \left[\varphi(x) \right]^{f(x)} \right\} = \left[\lim_{x\to a} \varphi(x) \right]^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$$

Ejercicios resueltos

Ejemplos:

1°) $$\lim_{x\to 2}\left[\left(3x^3+1\right)^{\frac{x+1}{x+4}}\right] = \left[\lim_{x\to 2}\,(3x^3+1)\right]^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x+4}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

2°) $$\lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{x^2-3x+2}{x+1}\right)^{2x+3}\right] = \left[\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x+1}\right]^{\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)} = \left[\frac{0}{2}\right]^5 = 0^5 = 0$$

3°) $$\lim_{x\to 0}\left[(\operatorname{sen} 2x + 2\cos x)^{x+3}\right] = \left[\lim_{x\to 0}\,(\operatorname{sen} 2x + 2\cos x)\right]^{\lim\limits_{x\to 0}(x+3)} = [0+2\,.\,1]^3 = 2^3 = 8$$

NOTA: A continuación, y como ejercitación para fijar el concepto, figura la demostración del límite de la suma y el límite del producto de dos funciones, cuando se aplica únicamente la definición de límite de una función en un punto.

1°) Límite de la suma de dos funciones

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1 \\ \\ \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = l_2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\,[\,f(x)+\varphi(x)\,] = l_1 + l_2$$

En efecto:

De acuerdo con la definición de límite de una función en un punto, para un σ positivo tan pequeño como se quiera, se verifica:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \iff l_1 - \frac{\sigma}{2} < f(x) < l_1 + \frac{\sigma}{2} \text{ en un } E'_a$$

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = l_2 \iff l_2 - \frac{\sigma}{2} < \varphi(x) < l_2 + \frac{\sigma}{2} \text{ en un } E'_a$$

Se suma $$l_1 - \frac{\sigma}{2} + l_2 - \frac{\sigma}{2} < f(x)+\varphi(x) < l_1 + \frac{\sigma}{2} + l_2 + \frac{\sigma}{2} \text{ en el } E'_a \text{ menor}$$

se efectúan operaciones: $$(l_1 + l_2) - \sigma < [f(x)+\varphi(x)] < l_1 + l_2 + \sigma \quad \text{en un } E'_a$$

Es decir que: la función suma $[\,f(x) + \varphi(x)\,]$, en un entorno reducido de a toma valores comprendidos entre el número $(l_1 + l_2)$ menos σ y el número $(l_1 + l_2)$ más σ. Como σ es tan pequeño como se quiera, de acuerdo con la definición de límite de una función en un punto, resulta:

$$\lim_{x\to a}\,[\,f(x)+\varphi(x)\,] = l_1 + l_2$$

o sea $$\lim_{x\to a}\,[\,f(x)+\varphi(x)\,] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} \varphi(x)$$

La demostración es válida para el límite de la suma de 3 o más funciones y también para la diferencia de dos funciones, luego es válida para la suma algebraica de un número finito de funciones.

En particular, los infinitésimos para $x \longrightarrow a$ son funciones que tienen límite 0 para $x \longrightarrow a$, luego como consecuencia de la demostración anterior, resulta: **la suma algebraica de un número finito de infinitésimos para $x \longrightarrow 0$, tiene por límite 0, por lo tanto, es otro infinitésimo para $x \longrightarrow a$.**

2°) **Límite del producto de dos funciones:**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x) = l_1 \\ \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = l_2\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to a}\,[\,f(x)\,.\,\varphi(x)\,] = l_1\, l_2$$

En efecto:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \iff f(x) - l_1 = \epsilon_1 \;/\; \epsilon_1 \text{ es un infinitésimo para } x \longrightarrow a$$

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = l_2 \iff \varphi(x) - l_2 = \epsilon_2 \;/\; \epsilon_2 \text{ es un infinitésimo para } x \longrightarrow a$$

Se debe demostrar que el valor absoluto de la diferencia $f(x) \cdot g(x) - l_1\, l_2$ es menor que cualquier número σ por pequeño que éste sea en un E'_a. Para ello, se suma y resta a esa expresión $l_2\, f(x)$ y se tiene:

$$|\,f(x)\,.\,g(x) - l_1\, l_2\,| = |\,f(x)\,.\,g(x) - l_1\, l_2 + l_2\, f(x) - l_2\, f(x)\,|$$

en el segundo miembro se saca factor común $f(x)$ entre el primero y el último término y el factor común l_2 entre el segundo y el tercer términos y resulta:

$$|f(x) \cdot g(x) - l_1\, l_2| = |f(x)\,[g(x) - l_2] + l_2\,[f(x) - l_1]| \quad \text{o sea}$$

$$|f(x) \cdot g(x) - l_1\, l_2| \leqslant |f(x)\,[g(x) - l_2]| + |l_2\,[f(x) - l_1]| \quad \text{pues}$$

el módulo de la suma es menor o igual que la suma de los módulos.

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1 \Rightarrow f(x)$ está acotada en un E'_a o sea $f(x) < k > 0$ en E'_a.

$g(x) - l_2 = \epsilon_2 \ / \ \epsilon_2$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a \Rightarrow \epsilon_2$ puede considerarse tan pequeño como se quiera en un E'_a, por ejemplo $\epsilon_2 < \dfrac{\sigma}{2k}$ en E'_a por pequeño que sea σ.

Si $l_2 = 0$ el último término se anula, si $l_2 \neq 0$ como $f(x) - l_1 = \epsilon_1$ que es un infinitésimo para $x \longrightarrow a$, se puede hacer $\epsilon_1 < \dfrac{\sigma}{2\,l_2}$.

Reemplazando:

$$|f(x) \cdot g(x) - l_1\, l_2| < k\,\frac{\sigma}{2k} + l_2\,\frac{\sigma}{2\,l_2} = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \quad \text{en el menor de los } E'_a$$

anteriores. O sea:

$$|f(x) \cdot g(x) - l_1\, l_2| < \sigma \text{ en un } E'_a \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a}\, [f(x) \cdot g(x)] = l_1\, l_2$$

que es lo que se quería demostrar.

Como casos particulares se tiene: la función constante y los infinitésimos, por lo tanto, de acuerdo con la demostración anterior, se establece:

El límite del producto de un número por una función que tiene límite en un punto, es igual al producto del número por el límite de la función.

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0}\, [5 \cos x] = 5 \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 5 \cdot 1 = 5$

El producto de un infinitésimo para $x \longrightarrow a$ por un número, es otro infinitésimo para $x \longrightarrow a$.

El producto de 2 infinitésimos para $x \longrightarrow a$ es otro infinitésimo para $x \longrightarrow a$.

Veremos que:

$$\boxed{\text{Si} \quad \lim_{x \to a} \varphi(x) = l_2 \neq 0 \quad \text{es} \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{l_2}}$$

probar este límite, es equivalente a probar que la diferencia $\dfrac{1}{\varphi(x)} - \dfrac{1}{l_2}$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a$.

En efecto:

$$\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{l_2} = \frac{l_2 - \varphi(x)}{\varphi(x) \cdot l_2} = [\,l_2 - \varphi(x)\,]\ \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{1}{l_2} \qquad (1)$$

Por ser $\lim \varphi(x) = l_2 \iff |\varphi(x) - l_2| < \sigma$ en E'_a por pequeño que sea σ.
Por otra parte

$$\big|\,|\varphi(x)| - |l_2|\,\big| \leqslant |\varphi(x) - l_2|$$

por transitividad

$$\big|\,|\varphi(x)| - |l_2|\,\big| < \sigma \quad \text{en un } E'_a$$

se elige

$$\sigma = \frac{|l_2|}{2} \qquad \big|\,|\varphi(x)| - |l_2|\,\big| < \frac{|l_2|}{2}$$

de acuerdo con la acotación del módulo

$$-\frac{|l_2|}{2} < |\varphi(x)| - |l_2| < \frac{|l_2|}{2} \quad \text{se suma } |l_2| \text{ a cada miembro}$$

$$-\frac{|l_2|}{2} + |l_2| < |\varphi(x)| < \frac{|l_2|}{2} + |l_2|$$

$$\text{o sea} \quad \frac{|l_2|}{2} < |\varphi(x)| < \frac{3}{2}\,|l_2|$$

Se considera solamente la primera desigualdad

$$\frac{|l_2|}{2} < |\varphi(x)| \Rightarrow |\varphi(x)| > \frac{|l_2|}{2}$$

se invierte cada miembro y cambia el sentido de la desigualdad

$$\frac{1}{|\varphi(x)|} < \frac{2}{|l_2|}$$

se reemplaza en (1) $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ por $\dfrac{2}{|\, l_2 \,|}$ que es mayor y se tiene:

$$\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{l_2} < [\, l_2 - \varphi(x) \,] \; \frac{2}{|\, l_2 \,|} \cdot \frac{1}{l_2}$$

Como $[\, l_2 - \varphi(x) \,]$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a$ por ser l_2 el límite de $\varphi(x)$ y el factor $\left(\dfrac{2}{|\, l_2 \,|} \cdot \dfrac{1}{l_2} \right)$ es un número, resulta que el segundo miembro es el producto de un infinitésimo para $x \longrightarrow a$, por un número, luego es otro infinitésimo para $x \longrightarrow a$, es decir:

$\dfrac{1}{\varphi(x)} - \dfrac{1}{l_2} = \epsilon \,/\, \epsilon$ es un infinitésimo para $x \longrightarrow a$. Esta expresión implica

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{\varphi(x)} = \dfrac{1}{l_2}$ que es lo que queríamos demostrar.

De esta propiedad y del límite del producto de 2 funciones, se deduce que:

El límite del cociente de dos funciones, cada una de las cuales tiene límite finito para $x \longrightarrow a$ y el límite del denominador es distinto de cero, es igual al cociente de los límites.

Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1 \\[2ex] \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = l_2 \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{l_1}{l_2}$$

La demostración se reduce a multiplicar $f(x)$ por $\dfrac{1}{\varphi(x)}$, en efecto

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to a} \left[f(x) \; \frac{1}{\varphi(x)} \right] = l_1 \; \frac{1}{l_2} = \frac{l_1}{l_2}$$

EJERCICIOS DE LIMITES

Calcular los siguientes límites

1°) $\lim\limits_{x \to 2} \; [\, (x+1)\,(2\,x - 1) \,]$ — Rta.: 9

2°) $\lim\limits_{x \to 2} \; [\, ln\,(x - 1) \,]$ — Rta.: 0

3°) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\sqrt[3]{3\,x - 2} + ln\,(2\,x - 1) + 5 \right]$ — Rta.: 6

4°) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 - 2}{x - 1}$ — Rta.: $\dfrac{3}{2}$

5°) $\lim\limits_{x \to 0} \; [\, sen\, x + \sqrt{3\,x} - cos\, 2\,x \,]$ — Rta.: -1

6°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x-1)^2\,(x+2)}{4\,cos\,x}$ — Rta.: $\dfrac{1}{2}$

7°) $\lim\limits_{x \to 0} \left[e^x + sen\,3\,x - cos\,2\,x \right]$ — Rta.: 0

8°) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\sqrt[3]{x - 1} - (2 + x^2)^{2x} - ln\,(x+1) \right]$ — Rta.: -2

9°) $\lim\limits_{t \to 0} \left[(2\,t + 3)\,(t - 2) - 2^{t+2} \right]$ — Rta.: -10

10°) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x + 1}{8\,x + 3}}$ — Rta.: $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

11°) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{\dfrac{3\,x - 1}{1 + 2\,x}}$ — Rta.: 2

12°) $\lim\limits_{t \to -2} t^{-2}$ — Rta.: $\dfrac{1}{4}$

13°) $\lim\limits_{x \to 2} x^{-3}$ — Rta.: $\dfrac{1}{8}$

14°) $\lim\limits_{x \to 3} x^{1-x}$ Rta.: $\dfrac{1}{9}$

15°) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z^2 - 2}{z^2 + 2}$ Rta.: -1

16°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 5}{x + 5}$ Rta.: -1

17°) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ Rta.: 1

18°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$ Rta.: 0

19°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ Rta.: 0

20°) $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1 + t}{2^0 + 2^{-t}}$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

21°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + e^{x^2+4} + 3x}{e^5 + 2x}$ Rta.: $\dfrac{1}{e}$

22°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2 + x)\, e^{-x}}{2x + 4}$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

23°) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{(z + 1)\, e^{-z}}{2z^2 + 1 - z}$ Rta.: 1

24°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 + e^{3x^3+3} - x}{e^2 + 2x}$ Rta.: e

25°) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1 + e^h}{e^h - 1}$ Rta.: ∞

26°) $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{a - t}{a + t}$ Rta.: $\dfrac{a - 2}{a + 2}$

27°) $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{\dfrac{9 - x^2}{3 - x}}$ Rta.: 0

28°) $\lim\limits_{z \to 2} \dfrac{\sqrt{z} - \sqrt{2}}{z - 2}$ Rta.: $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

29°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos x + 3 \cos x + 2}$ Rta.: 0

30°) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{2} - x}{x^2 + 1}$ Rta.: 0

31°) $\lim\limits_{t \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen}^2 t + 3 \operatorname{sen} t - 4}{\operatorname{sen}^3 t + 1}$ Rta.: 0

32°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - e^{3x^2}}{2}$ Rta.: $-\dfrac{1}{2}$

Calcular los siguientes límites

1°) $\lim\limits_{x \to 2} (x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 5x - 1)$

En estos casos, como ya se indicó, lo más cómodo es aplicar el Teorema del Resto, dividiendo el polinomio por $x - 2$ y para obtener el resto se utiliza la disposición práctica de la Regla de Ruffini.

Así:

$$\begin{array}{l|l} x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 5x - 1 & x - 2 \\ \hline R = 1 & x^4 + 2x^3 + 3x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & -4 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & & 2 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 & \boxed{1} \end{array}$$

Luego $\lim\limits_{x \to 2} (x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 5x - 1) = 1$

2°) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (x^6 + 3x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1)$ Rta.: $\dfrac{25}{64}$

3°) $\lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{1}{27} x^7 - 6x^4 + 13x^2 + 5\right)$ Rta.: 455

4°) $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{2}} (2x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x + 4)$ Rta.: $-\dfrac{187}{8}$

5°) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} (4x^6 - x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 3)$ Rta.: -4

6°) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 1}{3x - 1}$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

7°) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 3x - 3}{x^2 - 2x - 2}$ Rta.: $\dfrac{5}{3}$

8°) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^5 + 3x^3 - x^2 + 20}{2x^4 + 6x^3 - 7x - 3}$ Rta.: 8

9°) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(2x + 3)(3x - 1)}{3x^4 - 5x^2 - 6x - 5}$ Rta.: 4

Calcular los siguientes límites

1°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2\, x}{x}$

Para la resolución de este tipo de ejercicios hay que tener en cuenta que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x} = 1$, luego el ejercicio dado se descompone en producto de 2 factores, así:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2\, x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\text{sen}\, x}{x} \cdot \text{sen}\, x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \text{sen}\, x =$$

$$= 1 \times 0 = 0$$

2°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^3\, x}{3\,x}$ Rta.: 0

3°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2\, 3\,x}{2\,x}$ Rta.: 0

4°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2\, x^3}{x^3}$ Rta.: 0

5°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^3\, 2\,x}{3\,x}$ Rta.: 0

6°) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\text{sen}\, 2\,x}{x} \cdot \sqrt{x}\right)$ Rta.: 0

7°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^3\, 3\,x}{5\,x^3}$ Rta.: $\dfrac{27}{5}$

8°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9\,x^4}{\text{sen}^4\, 5\,x}$ Rta.: $\dfrac{9}{625}$

9°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^3\, 3\,x}{\text{sen}^2\, 2\,x}$ Rta.: 0

10°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}^2\, 7\,x}{\text{sen}^2\, 3\,x}$ Rta.: $\dfrac{49}{9}$

11°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

12°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{tg}\, x - \text{sen}\, x}{x^3}$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

13°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2\, 3\,x\ .\ \text{tg}^3\, 2\,x}{7\,x^5}$ Rta.: $\dfrac{72}{7}$

Calcular los siguientes límites

1°) $\lim\limits_{x\to 1} 5^{x+1}$ Rta.: 25

2°) $\lim\limits_{t\to 2} 9^{\frac{t-1}{4-t}}$ Rta.: 3

3°) $\lim\limits_{x\to 0} 3^{\frac{x^2-2x-9}{3\cos x+\text{sen}\, x+x}}$ Rta.: $\dfrac{1}{27}$

4°) $\lim\limits_{x\to -2} 2^{\frac{x^2+x+1}{2x-1}}$ Rta.: $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$

5°) $\lim\limits_{t\to -1} 4^{\frac{x^2+x+1}{2x+1}}$ Rta.: $\dfrac{1}{4}$

6°) $\lim\limits_{x\to -1} 6^{\frac{x+1}{x-1}}$ Rta.: 1

7°) $\lim\limits_{x\to 2} (-3)^{\frac{2x-1}{x-1}}$ Rta.: -27

8°) $\lim\limits_{x\to -1} (-2)^{\frac{x^2-x+2}{x^2+3x}}$ Rta.: $\dfrac{1}{4}$

9°) $\lim\limits_{x\to -2} (-8)^{\frac{3x+7}{x^2+\frac{1}{2}x}}$ Rta.: -2

10°) $\lim\limits_{x\to -1} \left(-\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{x+2}{2x-1}}$ Rta.: 1

11°) $\lim\limits_{x\to -2} (-27)^{\frac{3(x-2)}{2(x^2-3x+8)}}$ Rta.: $-\dfrac{1}{3}$

12°) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} 4^{x-1}$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

13°) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} 8^{\frac{3x^2-x}{3x-1}}$ Rta.: 4

14°) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} \left(\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{x+1}{x^2-x}}$ Rta.: $\dfrac{3}{2}$

15°) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} \left(-1\right)^{\frac{3x-1}{2x-\frac{1}{3}}}$ Rta.: 1

Calcular los siguientes límites de la forma $\lim\limits_{x\to a} \left[\varphi(x)\right]^{g(x)}$

1°) $\lim\limits_{x\to 0} \left[(3-\cos x)^{2x+3}\right]$ Rta. 8

2°) $\lim\limits_{x\to 0} \left[(2+3\cos x)^{\text{sen}\, x+2}\right]$ Rta. 25

3°) $\lim\limits_{z\to 0} \left[(2-\text{sen}\, 2z)^{3-2\,\text{sen}\, z}\right]$ Rta. 8

4°) $\lim\limits_{x\to 0} \left[(\text{sen}\, 2x - 3\cos x)^{\text{sen}\, x - 2\cos x - 1}\right]$ Rta. $-\dfrac{1}{27}$

5°) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \left[\left(\dfrac{4x^4 - 3x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 2x - 1}{2x^2 + x - 2} \right)^{\frac{4x-1}{2x+1}} \right]$ Rta. $\dfrac{1}{4}$

6°) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\left(\dfrac{2x^3 + x^2 - x}{3x^2 + 5} \right)^{\frac{2x^2 - x}{x+1}} \right]$ Rta. $\dfrac{1}{2}$

7°) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \right)^{x+1}$ Rta. 1

8°) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\left(\dfrac{x^2 + 5\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x}{5x + \cos x} \right)^{x^2 + \mathrm{sen}\,x} \right]$ Rta. 1

9°) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\left(\dfrac{\mathrm{sen}\,3x - \cos 2x}{x + \cos x} \right)^{\frac{x - 2\cos x}{x+1}} \right]$ Rta. 1

10°) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\left(\dfrac{e^{2x} - 3e^{3x}}{2^{x-1} - x} \right)^{\frac{3-x}{x+1}} \right]$ Rta. -8

11°) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\left(\dfrac{\mathrm{sen}\,2x}{x} \right)^{x+1} \right]$ Rta. 2

12°) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\left(\dfrac{\mathrm{sen}\,7x}{14x} \right)^{x^2+2} \right]$ Rta. $\dfrac{1}{4}$

13°) $\lim\limits_{t \to \frac{1}{2}} \left[\left(\dfrac{t^2 + 1}{1 + \sqrt{2t + 8}} \right)^{4t+1} \right]$ Rta.: $\left(\dfrac{5}{16} \right)^3$

14°) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\left(1 + \sqrt[3]{\dfrac{27x^3 + 4x - 4}{x^{10} + 4x^2 + 3x}} \right)^{\frac{2x-1}{x-2}} \right]$ Rta.: $\dfrac{2}{3}$

15°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\dfrac{x + 1}{2x + 1} \right)^{x} \right]$ Rta.: 0

16°) $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\left(\dfrac{2x - 3}{x + 1} \right)^{\frac{3x+1}{x}} \right]$ Rta.: 8

17°) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\left(\dfrac{x^4 - 3x + 5}{x^4 + 2x + 2} \right)^{\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}} \right]$ Rta.: $\dfrac{5}{2}$

18°) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\left(\dfrac{x^2 - 5x + 1}{x^2 + 6x + 3} \right)^{\frac{\mathrm{sen}\,2x}{x}} \right]$ Rta.: $\dfrac{1}{9}$

19°) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\left(\dfrac{3x + \cos x + 1}{x^2 - 2x} \right)^{\frac{\mathrm{sen}\,3x}{x}} \right]$ Rta.: 8

Calcular los siguientes límites

1°) Si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \forall x \neq 3 \\ 10 \quad \text{para} & x = 3 \end{cases}$

calcular $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ Rta.: 6

2°) Si $\varphi(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2 & \forall x > 0 \\ 9 \quad \text{para} & x = 0 \\ 2x + 2 & \forall x < 0 \end{cases}$

calcular $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ Rta.: 2

3°) Si $g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+1}{x+1} & \forall x \neq 1 \\ 3 \quad \text{para} & x = 1 \end{cases}$

calcular $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ Rta.: 2

Estos ejercicios ponen en evidencia que el límite de la función es independiente del valor de la misma en el punto, así en el segundo ejemplo $\varphi(0) = 9$ y $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 2$.

Generalización del concepto de límite

Límites laterales. Cuando las condiciones que exigen la existencia de límite de una función en un punto a, se verifican solamente para valores de x menores que a, se dice que existe límite por la izquierda de a.

En símbolos:

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l_1$ Recuérdese que a^- significa por la izquierda de a.

Si las condiciones se verifican únicamente para valores de x mayores que a, se dice que existe límite por la derecha de a.

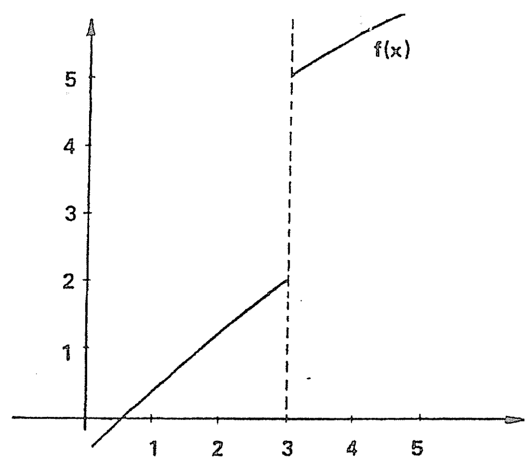
En símbolos:

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_2$ Recuérdese que a^+ significa por la derecha de a.

Ejemplo 1°)

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 5$



Ejemplo 2°) Para la función signo x

$\lim\limits_{x \to 0^-} sg.\, x = -1$ $\lim\limits_{x \to 0^+} sg.\, x = 1$

Límite finito de una función cuando $x \longrightarrow \infty$

Sea la función $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+1}$

su dominio es el conjunto de todos los números reales. Construimos una tabla de valores:

x	$f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+1}$
0	0
1	$\dfrac{4}{3} \cong 1{,}33$
3	3,6
10	$\dfrac{400}{101} \cong 3{,}9603$
100	$\dfrac{40000}{10001} \cong 3{,}9996$
1000	$\dfrac{4000000}{1000001} \cong 3{,}999996$

Se observa que a medida que los valores de x aumentan, los que determina la función se aproximan cada vez más a 4; es decir que, considerando un x suficientemente grande los valores de $f(x)$ difieren de 4 tan poco como se quiera. Esto se expresa diciendo que el límite de esta función para x tendiendo a $+\infty$ es 4.

En símbolos:

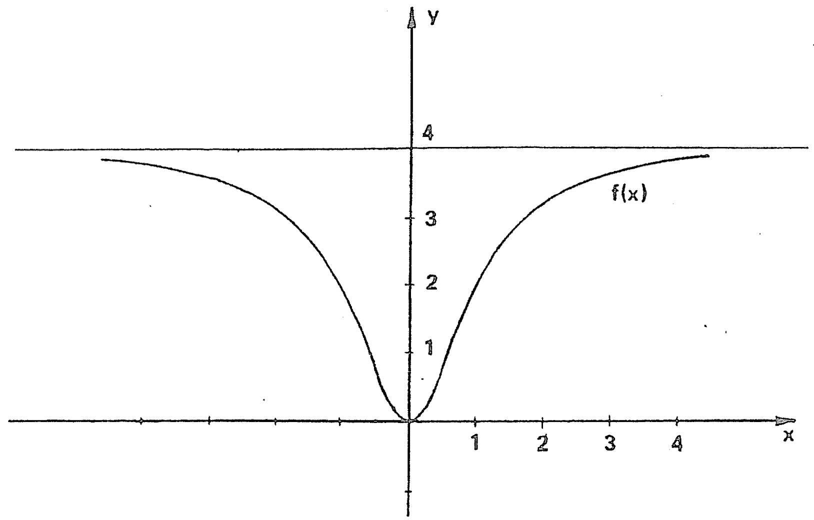
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{x^2+1} = 4$$

Como en la expresión de la función figura solamente el cuadrado de x ella determina valores iguales para valores opuestos de x, o sea que cuando $x \longrightarrow -\infty$ los valores de $f(x)$ se aproximan también cada vez más a 4.

Luego:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2}{x^2+1} = 4$$

La gráfica de la función es:



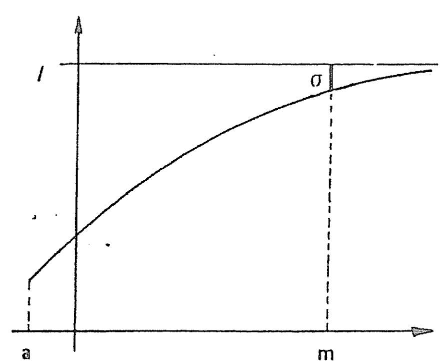
Definición: Si la función $f(x)$ tiene como dominio, el conjunto de todos los números reales, o bien dado un número a el dominio está determinado

$\forall x / x > a$, es $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$

si dado un número σ por pequeño que sea, existe otro número m tal que el valor absoluto de la diferencia entre los valores que determina la función y el límite l es menor que σ para todo x mayor que m.

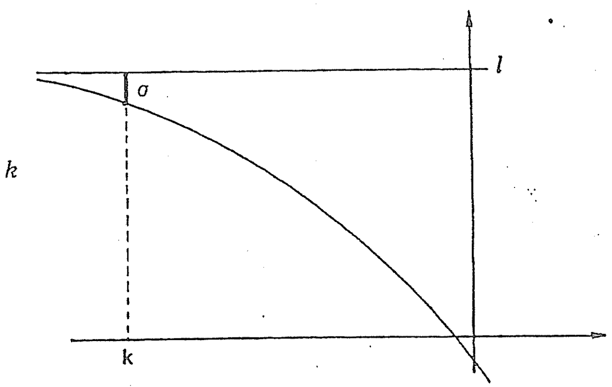
En símbolos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff \left| f(x) - l \right| < \sigma \qquad \forall x / x > m$$



Análogamente, se define el límite l si existe cuando $x \longrightarrow -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \iff \left| f(x) - l \right| < \sigma \qquad \forall x / x < k$$



En el ejemplo dado, $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2+1}$ el límite para $x \longrightarrow +\infty$ y para $x \longrightarrow -\infty$ es el mismo.

Las operaciones con estos límites son las mismas que las estudiadas para el límite finito l en un punto a.

NOTA: Es conveniente estudiar el límite para $x \longrightarrow \pm\infty$ de la función $f(x) = \dfrac{k}{x^p}$ donde k es un número real cualquiera y p es un número entero positivo.

Se demuestra que:

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{k}{x^p} = 0}$$

En efecto, si se aplica la definición de límite para $x \longrightarrow +\infty$ se debe verificar:

$$\left| \frac{k}{x^p} - 0 \right| < \sigma \qquad \forall x / x > m \implies \left| \frac{k}{x^p} \right| < \sigma \qquad \forall x / x > m$$

donde σ es positivo y tan pequeño como se quiera.

Se considera $x \ / \ |x| > \left| \dfrac{k^{\frac{1}{p}}}{\sigma^{\frac{1}{p}}} \right| = m$ donde p es positivo.

Se dividen ambos miembros por $\left| k^{\frac{1}{p}} \right|$

$$\left| \frac{x}{k^{\frac{1}{p}}} \right| > \left| \frac{1}{\sigma^{\frac{1}{p}}} \right|$$

Se invierten las razones y como consecuencia cambia el sentido del signo de desigualdad:

$$\left| \frac{k^{\frac{1}{p}}}{x} \right| < \sigma^{\frac{1}{p}}$$ no se pone módulo a σ porque es positivo.

Se elevan ambos miembros a la potencia positiva p

$$\left| \frac{k}{x^p} \right| < \sigma \Rightarrow \left| \frac{k}{x^p} - 0 \right| < \sigma \iff \lim_{x \to +\infty} \frac{k}{x^p} = 0$$

También se demuestra para $x \longrightarrow -\infty$

Ejemplos:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^3} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3}{5}}{x^4} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{-9}{x^2} = 0 \ ; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x^5} = 0$$

Análogamente:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{k}{P(x)} = 0$$

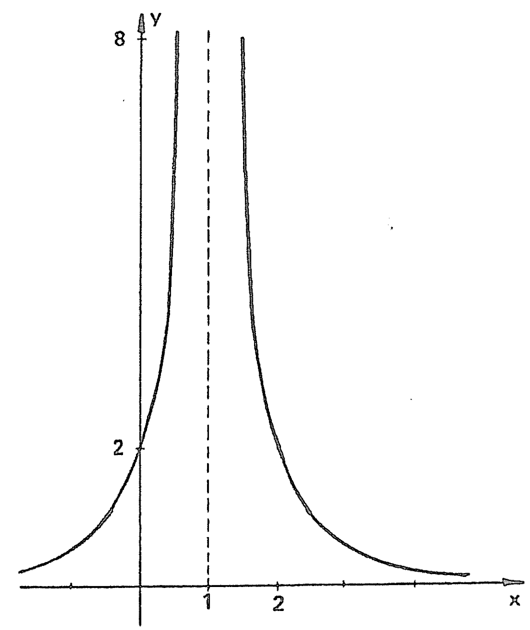
Ejemplo: $\lim_{x \to \infty} \dfrac{5}{x^2 - 3x + 1} = 0$

Límites infinitos

1°) **Límite infinito en un punto**

La función $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$ no está definida en el punto $x = 1$; pero en la siguiente tabla, se calculan los valores que determina la función cuando x se aproxima a 1 por la izquierda, es decir por valores menores que 1 y cuando x se aproxima a 1 por la derecha, es decir por valores mayores que 1.

	x	$f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$
Valores de x que se aproximan a *1* por la izquierda, es decir se aproximan a *1* por valores menores que *1*	0	2
	0,5	8
	0,8	50
	0,99	20000
	0,999	2000000
	0,9999	200000000
Valores de x que se aproximan a *1* por la derecha, es decir que se aproximan a *1* por valores mayores que *1*	2	2
	1,5	8
	1,2	50
	1,01	20000
	1,001	2000000
	1,0001	200000000



Se observa que cuando los valores de x se aproximan a 1 tanto por la derecha como por la izquierda, los valores que determina la función crecen indefinidamente.

Esto se expresa diciendo que: cuando x tiende a 1 por la izquierda, es decir por valores menores que 1 la función tiende a más infinito, que en símbolos se expresa:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2}{(x-1)^2} = +\infty$$

y también que cuando x tiende a 1 por la derecha, es decir por valores mayores que 1, la función tiende a más infinito, que en símbolos se expresa:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2}{(x-1)^2} = +\infty$$

En la gráfica de la función, se hace la misma observación anterior; en otros términos, que los valores que determina la función superan a cualquier número por grande que éste sea, con tal de considerar valores de x suficientemente próximos a 1; por ejemplo: si se quiere que el valor de $f(x)$ supere a 8, basta con tomar valores de x que disten de 1 menos que 0,5; si se quieren valores de $f(x)$ que superen a 50 basta tomar valores de x que estén más cerca de 1 que 0,8, por ejemplo, $x = 0,85$ ó $x = 1,15$. En general, se da la siguiente:

Definición: Una función tiene límite $+\infty$ o tiende a $+\infty$ en un punto de acumulación a, si dado un número positivo k por grande que éste sea, los valores que determina la función superan a dicho número, con tal de considerar valores de x en un cierto entorno reducido de a.

En símbolos:

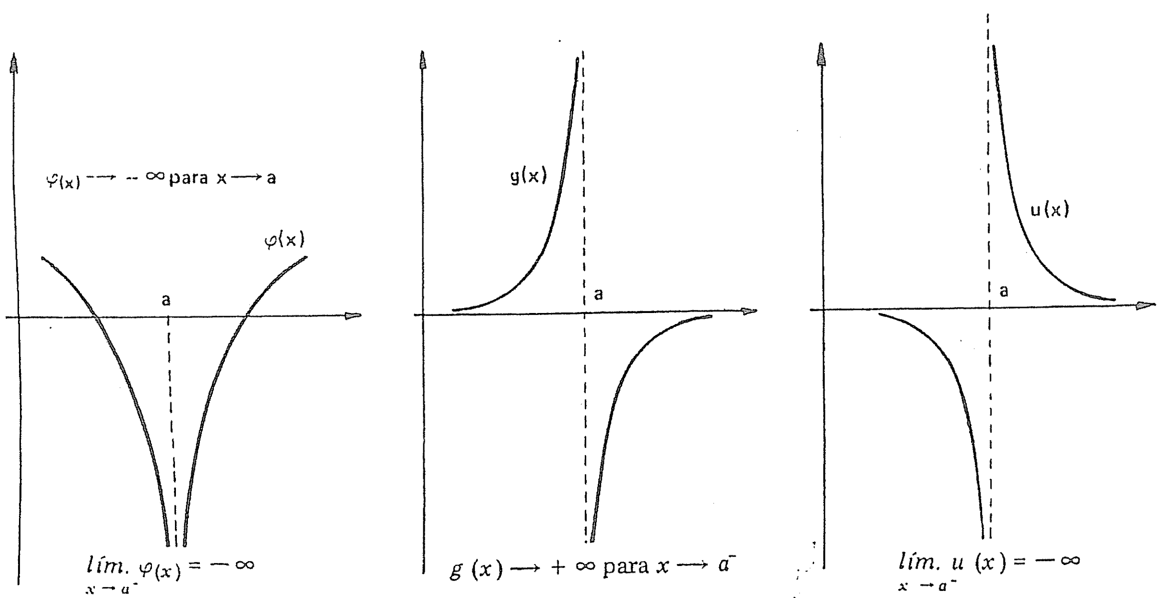
$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall k > 0 \quad \text{es} \quad f(x) > k \quad \text{en un } E'_a$$

Se expresa también:

$$f(x) \longrightarrow +\infty \qquad \text{cuando } x \longrightarrow a,$$

que se lee, $f(x)$ tiende a más infinito cuando x tiende a a.

Hay casos en que la función tiende a $-\infty$ y otros que tiende a $+\infty$ por la izquierda del punto igualmente por la derecha o viceversa. Estos casos se indican en los siguientes gráficos:



$\lim_{x\to a^-} \varphi(x) = -\infty$ $\qquad$ $g(x) \longrightarrow +\infty$ para $x \longrightarrow a^-$ $\qquad$ $\lim_{x\to a^-} u(x) = -\infty$

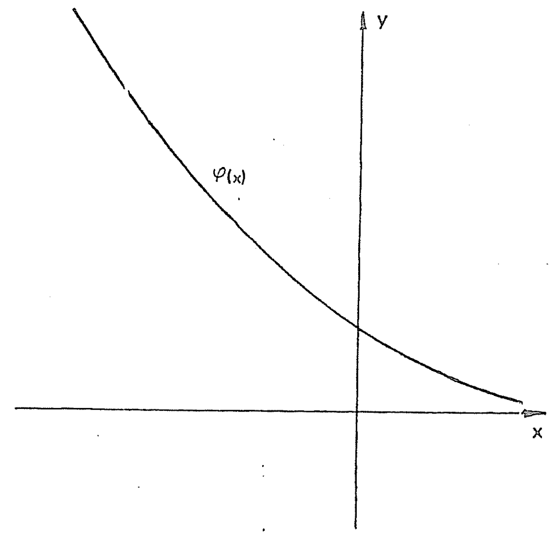
$\lim_{x\to a^+} \varphi(x) = +\infty$ $\qquad$ $g(x) \longrightarrow -\infty$ para $x \longrightarrow a^+$ $\qquad$ $\lim_{x\to a^+} u(x) = +\infty$

A veces no se puede determinar el signo, en tal caso se dice que el límite es ∞, refiriéndose a los valores absolutos de la función.

2°) Límite infinito en el infinito

Cuando la función está definida para todo número real, o bien a la izquierda de un cierto número a, puede ocurrir que cuando $x \longrightarrow -\infty$ la función $\longrightarrow +\infty$ ó a $-\infty$.

Así se ve en los casos siguientes:

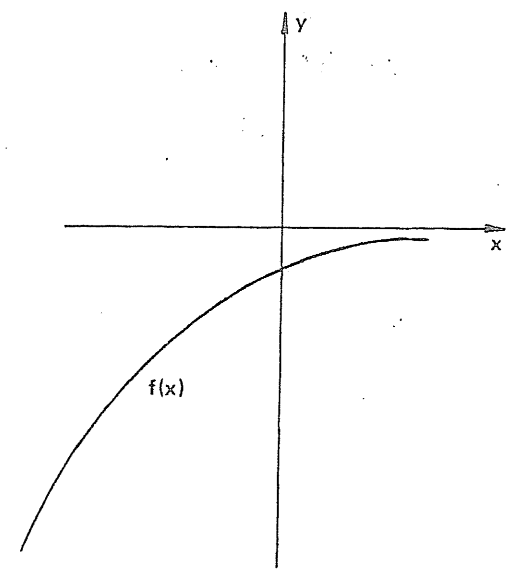


$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = +\infty$

dado un número $k > 0$

por grande que sea $|k|$

$\exists\, r \,/\, f(x) > k \qquad \forall x \,/\, x < r$



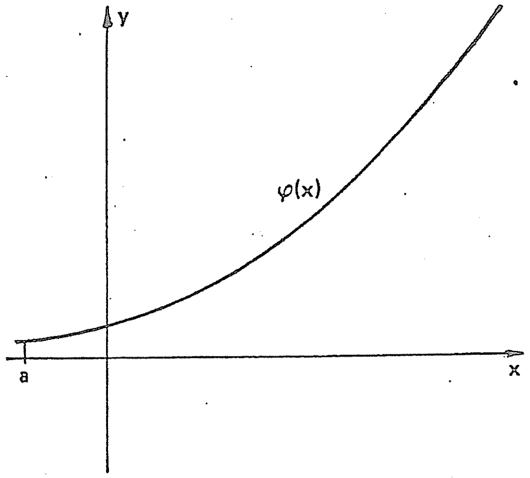
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

dado un número $k < 0$

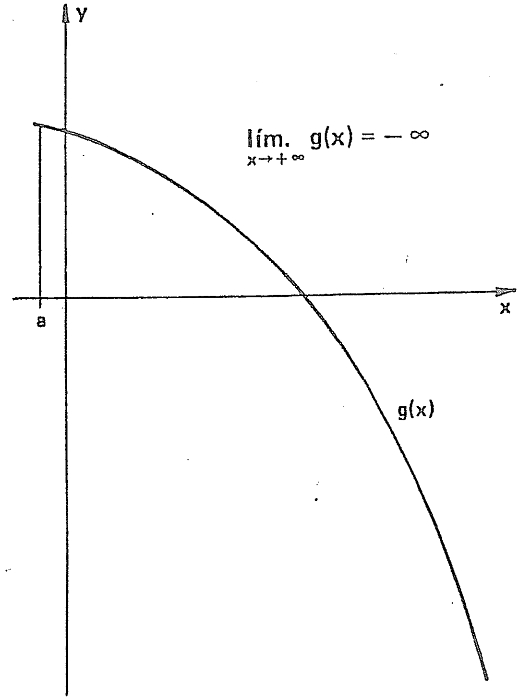
por grande que sea $|k|$

$\exists\, r \,/\, f(x) < k \qquad \forall x \,/\, x < r$

Cuando la función está definida para todo número real, o para todo $x > a$, puede ocurrir que la función tienda a $+\infty$ ó a $-\infty$ para $x \longrightarrow +\infty$. Así se destaca en los siguientes gráficos:



$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$



Cuando la función está definida para todo número real pueden presentarse los siguientes casos:

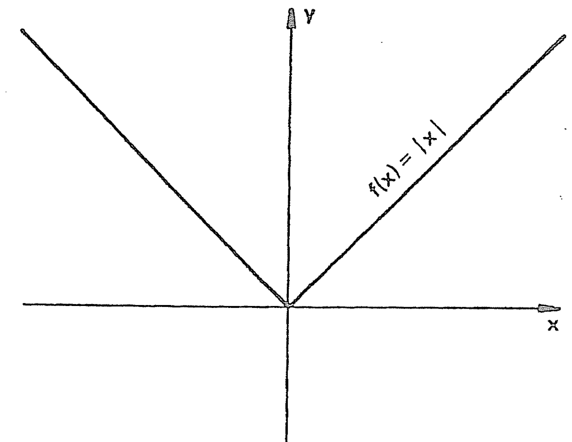
1°) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$

2°) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

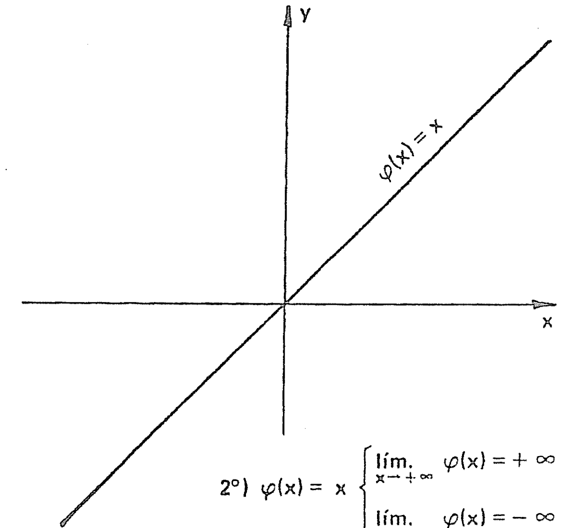
3°) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$

4°) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

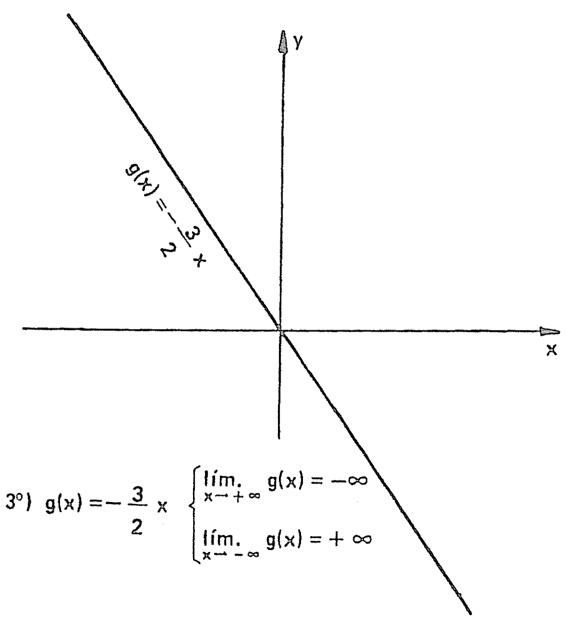
A continuación figuran gráficas correspondientes a estos casos:



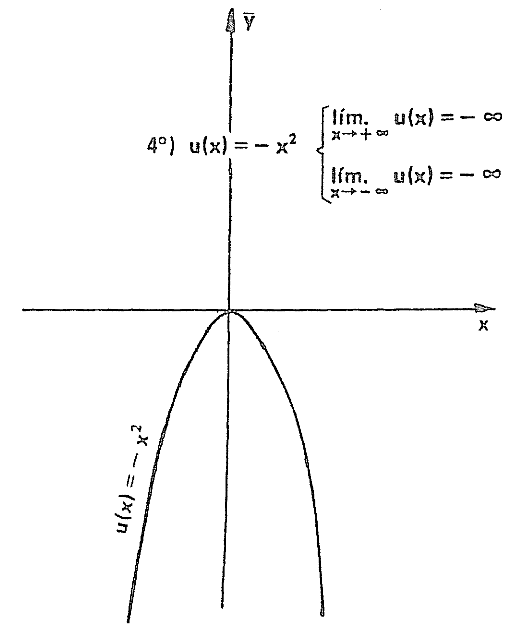
1°) $f(x) = |x| \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$



2°) $\varphi(x) = x \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty \end{cases}$



3°) $g(x) = -\dfrac{3}{2}x \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$



4°) $u(x) = -x^2 \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = -\infty \end{cases}$

Límite de operaciones con funciones, que tienen límite infinito

Si se tienen en cuenta las operaciones que se estudiaron con los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ resultan los siguientes límites de operaciones con funciones:

1°) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = l \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to a} \left[\varphi(x) + g(x)\right] = +\infty$$

2°) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = l \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to a} \left[\varphi(x) + g(x)\right] = -\infty$$

3°) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = l \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{si } l > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \left[\varphi(x) \,.\, g(x)\right] = +\infty \\ \text{si } l < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \left[\varphi(x) \,.\, g(x)\right] = -\infty \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = l \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{si } l > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \left[\varphi(x) \,.\, g(x)\right] = -\infty \\ \text{si } l < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \left[\varphi(x) \,.\, g(x)\right] = +\infty \end{array}$$

4°) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = l > 0 \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{si } g(x) \longrightarrow 0 \text{ por valores positivos es: } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi(x)}{g(x)} = +\infty \\ \text{si } g(x) \longrightarrow 0 \text{ por valores negativos es: } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi(x)}{g(x)} = -\infty \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = l < 0 \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{si } g(x) \longrightarrow 0 \text{ por valores positivos es: } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi(x)}{g(x)} = -\infty \\ \text{si } g(x) \longrightarrow 0 \text{ por valores negativos es: } \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi(x)}{g(x)} = +\infty \end{array}$$

5°) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} \left[\varphi(x) + g(x)\right] = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} \left[\varphi(x) + g(x)\right] = -\infty$$

6°) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{g(x)} = 0$$

EJERCICIOS PROPUESTOS (con límites infinitos)

1°) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{x}$ Rta.: $+\infty$

2°) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2}{x}$ Rta.: $-\infty$

3°) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x}$ Rta.: 0

4°) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x}$ Rta.: 0

5°) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$ Rta.: 0

6°) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$ Rta.: 0

7°) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x^2 - 1}$ Rta.: 0

8°) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3 - x^2}{x}$ Rta.: $-\infty$

9°) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2 + x}{3 - x}\right)^x$ Rta.: 1

10°) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$ Rta.: 0

11°) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^x$ Rta.: 0

12°) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x^2 - 9}$ Rta.: $+\infty$

13°) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x - 2}$ Rta.: $+\infty$

14°) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n$ Rta.: $+\infty$

15°) $\lim\limits_{x\to +\infty} (-2)\, x^n$ Rta.: $-\infty$

16°) $\lim\limits_{x\to -\infty} 3^x$ Rta.: 0

17°) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1 + 5^x}{2 + 3^x}$ Rta.: $+\infty$

18°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x+1}{2^x+3}$ Rta.: 1

19°) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^x+1}{2^x+3}$ Rta.: $\dfrac{1}{3}$

20°) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x}$ Rta.: 0

21°) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}^+} \dfrac{x^2\,(x+1)}{x^2-\frac{1}{9}}$ Rta.: $-\infty$

22°) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{\sqrt[3]{x+9}}{x^2-2x+1}$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

23°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{\frac{5}{x}-\frac{10}{x^2}}$ Rta.: $\dfrac{1}{5}$

24°) $\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{5-x^2}{x+2}$ Rta.: $+\infty$

25°) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt[3]{2+x^4}}{x}$ Rta.: $+\infty$

26°) $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\sqrt[3]{2+x^4}}{x}$ Rta.: $-\infty$

27°) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$ Rta.: 1

28°) $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{5}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$ Rta.: 0

29°) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1+e^{-x}}{6}$ Rta.: $\dfrac{1}{3}$

30°) $\lim\limits_{x\to0^+} \left[\dfrac{3}{2}\left(e^{\frac{3}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}\right)\right]$ Rta.: $+\infty$

Casos de indeterminación de límites

Hasta ahora hemos establecido límites de operaciones con funciones, en que los resultados finitos o infinitos se pueden anticipar. Pero hay ciertos casos, en los que no se puede establecer con antelación si el límite del resultado es infinito o cero o un número finito distinto de cero, por eso se llaman casos de indeterminación, y se dan reglas para calcular en cada caso, el límite del resultado.

1° Caso: Límite del cociente de dos funciones, cada una de las cuales tiene límite 0 para $x \longrightarrow a$:

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{g(x)} \quad \text{en símbolos} \quad \frac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$$

Ejemplo 1°

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1} (x^2+5x-6) &= 0\\ \lim_{x\to1} (x^2-x) &= 0\end{aligned}\right\} \text{ el límite del cociente es } \lim_{x\to1} \frac{x^2+5x-6}{x^2-x}$$

se factorea el numerador y el denominador y se simplifica:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-x} = \frac{(x-1)\,(x+6)}{x\,(x-1)} = \frac{x+6}{x} \Rightarrow \lim_{x\to1} \frac{x^2+5x-6}{x^2-x} = \lim_{x\to1} \frac{x+6}{x} = \frac{7}{1} = 7$$

en este ejemplo el límite es 7, un número finito $\neq 0$.

Ejemplo 2°

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to3} (2x-6) &= 0\\ \lim_{x\to3} (x^2-6x+9) &= 0\end{aligned}\right\} \text{ el límite del cociente es } \lim_{x\to3} \frac{2x-6}{x^2-6x+9}$$

se factorea el numerador y el denominador y se simplifica:

$$\frac{2x-6}{x^2-6x+9} = \frac{2\,(x-3)}{(x-3)^2} = \frac{2}{x-3} \Longleftrightarrow \lim_{x\to3} \frac{2x^2-6}{x^4-6x+9} = \lim_{x\to3} \frac{2}{x^2-3} \to \frac{2}{0} = \infty$$

en este caso el límite del cociente es ∞.

Ejemplo 3°

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to2} x^3-6x^2+12x-8 &= 0\\ \lim_{x\to2} 3x^2-12 &= 0\end{aligned}\right\} \text{ el límite del cociente es } \lim_{x\to2} \frac{x^3-6x^2+12x-8}{3x^2-12}$$

se factorea el numerador y el denominador y se simplifica:

$$\frac{x^3-6x^2+12x-8}{3x^2-12} = \frac{(x-2)^3}{3\,(x-2)\,(x+2)} = \frac{(x-2)^2}{3\,(x+2)} \Rightarrow \lim_{x\to2} \frac{x^3-6x^2+12x-8}{3x^2-12} =$$

3(x-4)

$$= \lim_{x\to2} \frac{(x-2)^2}{3\,(x+2)} = \frac{0}{12} = 0$$

en este caso el límite del resultado es 0.

Como se ve en estos ejemplos, en uno de ellos el resultado es un número distinto de cero, en otro es ∞ en otro es 0, es decir, resultados distintos que no se pueden anticipar. Luego el primer caso de indeterminación que estudiamos es el del cociente en que el numerador y el denominador tienden a 0.

Simbólicamente $\dfrac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$ que a veces más impropiamente se escribe $\dfrac{0}{0}$.

Para resolver este caso, se factorea y efectúan todas las sustituciones y las simplificaciones posibles, y luego se calcula el límite.

1) Cuando hay que calcular el límite para $x \longrightarrow a$ y el numerador y el denominador son polinomios, en los que no es inmediato el valor de cada uno para $x = a$, ni el factoreo, es conveniente aplicar la distribución práctica de la regla de Ruffini, para dividir cada uno de ellos por $(x - a)$.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1°

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{4x^5 - x^3 - 2x^2 + 3x - 27}{2x^4 + x^3 - x - 12}$$

Para calcular el valor del numerador y el del denominador para $x = \dfrac{3}{2}$ se divide cada uno de ellos por $x - \dfrac{3}{2}$ y el resto de la división da el valor que se busca.

Así:

numerador

$$4x^5 - x^3 - 2x^2 + 3x - 27 \;\Big|\; x - \frac{3}{2}$$

$$R = 0 \qquad 4x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 10x + 18$$

denominador

$$2x^4 + x^3 - x - 12 \;\Big|\; x - \frac{3}{2}$$

$$R = 0 \qquad 2x^3 + 4x^2 + 6x + 8$$

El resultado y el resto se obtienen de aplica la regla de Ruffini, en su distribución práctica:

	4	0	− 1	− 2	3	− 27
$\frac{3}{2}$		6	9	12	15	27
	4	6	8	10	18	0

	2	1	0	− 1	− 12
$\frac{3}{2}$		3	6	9	12
	2	4	6	8	0

La división es exacta, por lo tanto cada polinomio tiene límite 0 para $x \longrightarrow \dfrac{3}{2}$ y se puede expresar como el producto de $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$ por el cociente o sea:

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{4x^5 - x^3 - 2x^2 + 3x - 27}{2x^4 + x^3 - x - 12} = \lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)(4x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 10x + 18)}{\left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^3 + 4x^2 + 6x + 8)}$$

se simplifica por $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$ y para hallar el valor del nuevo polinomio del numerador y del denominador para $x = \dfrac{3}{2}$ se vuelve a aplicar la regla, así:

	4	6	8	10	18
$\frac{3}{2}$		6	18	39	$\frac{147}{2}$
	4	12	26	49	$\frac{165}{2}$

	2	4	6	8
$\frac{3}{2}$		3	$\frac{21}{2}$	$\frac{99}{4}$
	2	7	$\frac{33}{2}$	$\frac{131}{4}$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{4x^5 - x^3 - 2x^2 + 3x - 27}{2x^4 + x^3 - x - 12} = \frac{\frac{165}{2}}{\frac{131}{4}} = \frac{165}{\cancel{2}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{131} = \frac{330}{131}$$

Para obtener los resultados $\frac{165}{2}$ y $\frac{131}{4}$ no es necesario repetir los coeficientes para aplicar la distribución práctica de la regla; así lo hacemos en el siguiente

Ejemplo 2°

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^5 - 7x^4 + 18x^3 - 23x^2 + 17x - 6}{x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 80x - 96}$$

numerador

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -7 & 18 & -23 & 17 & 6 \\
2 & & 2 & -10 & 16 & -14 & 6 \\ \hline
 & 1 & -5 & 8 & -7 & 3 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & -6 & 4 & -6 & \\ \hline
 & 1 & -3 & 2 & -3 & \boxed{-3} &
\end{array}$$

denominador

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -5 & -10 & 80 & 96 \\
2 & & 2 & -6 & -32 & 96 \\ \hline
 & 1 & -3 & -16 & 48 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & -2 & -36 & \\ \hline
 & 1 & -1 & -18 & \boxed{12} &
\end{array}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^5 - 7x^4 + 18x^3 - 23x^2 + 17x - 6}{x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 80x - 96} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4}$$

Ejemplo 3°

$$\lim_{x \to -1} \left[\left(\frac{2x^3 - 3x^2 - 4x + 1}{x^4 + 2x + 1} \right)^{\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 2x - 3}} \right] = \left[\left(\lim_{x \to -1} \frac{2x^3 - 3x^2 - 4x + 1}{x^4 + 2x + 1} \right)^{\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 2x - 3}} \right]$$

En la base y en el exponente se aplica la regla anterior:

Base

numerador

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -3 & -4 & 1 \\
-1 & & -2 & 5 & -1 \\ \hline
 & 2 & -5 & 1 & \boxed{0} \\
-1 & & -2 & 7 & \\ \hline
 & 2 & -7 & \boxed{8} &
\end{array}$$

denominador

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
-1 & & -1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline
 & 1 & -1 & 1 & 1 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 2 & -3 & \\ \hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{-2} &
\end{array}$$

Exponente

numerador

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -4 & 1 & 6 \\
-1 & & -1 & 5 & -6 \\ \hline
 & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 6 & \\ \hline
 & 1 & -6 & \boxed{12} &
\end{array}$$

denominador

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & -2 & -3 \\
-1 & & -1 & 3 \\ \hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & \\ \hline
 & 1 & \boxed{-4} &
\end{array}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to -1} \left[\left(\frac{2x^3 - 3x^2 - 4x + 1}{x^4 + 2x + 1} \right)^{\frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^4 - 2x - 3}} \right] = \left(\frac{8}{-2} \right)^{\frac{12}{-4}} = (-4)^{-3} =$$

$$= \left(-\frac{1}{4} \right)^3 = -\frac{1}{64}$$

Los ejemplos del tipo $\dfrac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$ en que no figuran polinomios como en los anteriormente resueltos, se resuelven, por ahora, mediante transformaciones y simplificaciones.

Ejemplo:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{2x}$ se multiplica el numerador y denominador por la conjugada del numerador, es decir por $\sqrt{x+1}+1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1}{2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}+\cancel{1}-\cancel{1}}{2\cancel{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{1}{2(1+1)} = \frac{1}{4}$$

Ejercicios propuestos

1°) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{3x-6} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{3(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{4}{3}$

2°) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{2x+2}$ Rta.: -1

3°) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x+4}{3x^2-12}$ Rta.: $-\dfrac{1}{6}$

4°) $\lim\limits_{z\to -\frac{1}{2}} \dfrac{4z^2-1}{10z+5}$ Rta.: $-\dfrac{2}{5}$

5°) $\lim\limits_{t\to -4} \dfrac{t^2+3t-4}{t^2-16}$ Rta.: $\dfrac{5}{8}$

6°) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ Rta.: $\dfrac{5}{4}$

7°) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ Rta.: 0

Ejercicios propuestos Indeterminación del tipo $\dfrac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$

1°) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5-2x^3+4x^2-10x-12}{3x^4-x^3-9x^2-4}$ Rta.: $\dfrac{31}{24}$

2°) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+3x-2}{x^2-6x+8}$ Rta.: $-\dfrac{3}{2}$

3°) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-7x^3+12x^2-x}{2x^5-4x^4+3x^3-6x^2-5x+10}$ Rta.: $-\dfrac{5}{39}$

4°) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-2x^2-18}{2x^4-15x^2-5x+3}$ Rta.: $\dfrac{7}{5}$

5°) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^5+2x^3+x^2+2}{x^3-3x^2-2x+2}$ Rta.: $\dfrac{9}{7}$

6°) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^5-3x^4+\frac{1}{4}x^2+2x-1}{6x^4-x^3+3x^2-1}$ Rta.: $\dfrac{8}{21}$

7°) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} \dfrac{4x^5-x^3-12x^2+2x-3}{2x^4+x^3+2x-\frac{33}{2}}$ Rta.: $\dfrac{22}{13}$

8°) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}} \dfrac{4x^5-x^3-10x+12}{2x^5-x^4+x^2-8x+6}$ Rta.: $\dfrac{676}{425}$

9°) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}} \dfrac{8x^4-2x^3+4x^2-3x+\frac{1}{2}}{4x^5-9x^4+\frac{5}{2}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}}$ Rta.: $\dfrac{56}{47}$

10°) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} \dfrac{6x^5+x^4-\frac{7}{2}x^2+1}{2x^7-x^6+3x^5+2x^4+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}$ Rta.: $\dfrac{52}{9}$

11°) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \dfrac{3x^6 - 2x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 5x - 2}{9x^5 + 2x^3 - 5x^2 + x + 1}$ Rta.: $-\dfrac{589}{450}$

12°) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 - 7x^2 - 21x + 27}{3x^4 + 9x^3 + 5x^2 + 14x - 3}$ Rta.: $-\dfrac{48}{97}$

13°) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^2 - 2x + 1)(x + 3)}{(x - 1)(x + 2)}$ Rta.: 0 se factorea el trinomio

14°) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x^2 - x - 6)(x - 2)}{x\,(x + 2)}$ Rta.: -10

15°) $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{3}} \left[\left(\dfrac{3x^4 - 2x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{2}{9}}{9x^3 + 3x^2 + \frac{4}{3}}\right)^{\frac{3x^2 - x - 2}{6x + 2}}\right]$ Rta.: $-\dfrac{1}{32}$

16°) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\left(\dfrac{2x^3 + x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 7x + 4}\right)^{\frac{8x^3 + 2x - 10}{4x^2 - 9x + 5}}\right]$ Rta.: $\dfrac{1}{81}$

17°) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \left[\left(\dfrac{8x^4 - 2x^2 + 5x - \frac{5}{2}}{3x^4 - x^3 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}}\right)^{\frac{8x^3 + 2x - 2}{4x^2 + 4x - 3}}\right]$ Rta.: 8

18°) $\lim\limits_{x \to -1} \left[\left(\dfrac{2x^3 - 3x^2 - 4x + 1}{x^4 + 2x + 1}\right)^{\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}}\right]$ Rta.: 1

19°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 + 2x}{x}$ Rta.: 2
1° se simplifica

20°) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x^4 - 5x^3 + 2x}{2x^2}$ Rta.: $+\infty$

21°) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x\,(x - 1)}$ Rta.: 7

22°) $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{x - 5}{x^2 - 10x + 25}$ Rta.: $+\infty$

23°) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 + x - 6}$ Rta.: $\dfrac{1}{5}$

24°) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 + 2x - 15}$ Rta.: $\dfrac{1}{8}$

25°) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^3 - 27}$ Rta.: $\dfrac{2}{9}$

26°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{x \operatorname{tg} x}$ Rta.: 0

27°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - 1}{3 \operatorname{sen} x - 3}$ Rta.: $\dfrac{1}{3}$

28°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos^2 x - 2}{\cos x - 1}$ Rta.: 4

29°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos^2 x - 2\cos x + 1}{2\cos x - 2}$ Rta.: 0

30°) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos x + 1}$ Rta.: -2

31°) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{2x}}$ Rta.: 0

32°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} 3x}{x - \operatorname{sen} 2x}$ Rta.: 2

En efecto, si se divide numerador y denominador por x

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 3\,\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}{1 - 2\,\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x}} =$$

$$= \frac{1 - 3}{1 - 2} = 2$$

33°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} 4x}{x - \operatorname{sen} 5x}$ Rta.: $\dfrac{3}{4}$

34°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$ Rta.: 0

35°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 9x}{\operatorname{sen} 5x}$ Rta.: $\dfrac{9}{5}$

36°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen^2\, x}{x^2}$ Rta.: 1

En efecto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen^2\, x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{sen\, x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$$

37°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen^3\, x}{x^3}$ Rta.: 1

38°) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{sen\,(x^2-1)}{x-1}$ Rta.: 2

39°) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{sen\,(x^2-1)}{x+1}$ Rta.: 0

40°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen^2\, x}{sen\, 2x}$ Rta.: 0

Se reemplaza $sen\, 2\, x = 2\, sen\, x\,.\, cos\, x$

41°) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{sen\, 2\, x}{cos^2\, x}$ Rta.: $+\infty$

42°) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$ Rta.: $+\infty$

En efecto

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{(x+1)\,(x-1)}}{x-1} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{(x+1)\,(x-1)}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$$

43°) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ Rta.: $+\infty$

En los siguientes ejercicios es cómodo multiplicar y dividir por la conjugada de los binomios en que figuran raíces cuadradas

44°) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ Rta.: 6

En efecto se multiplica y divide por $3+\sqrt{x^2+5}$

$$\frac{(4-x^2)\,(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})\,(3+\sqrt{x^2+5})} = \frac{(4-x^2)\,(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)} = \frac{(4-x^2)\,(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5} =$$

$$= \frac{(4-x^2)\,(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2} = 3+\sqrt{x^2+5} \quad ; \qquad \lim_{x\to 2}\ (3+\sqrt{x^2+5}) = 3+\sqrt{9} = 6$$

45°) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ Rta.: $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

46°) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$ Rta.: $\dfrac{1}{4}$

47°) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{x^2-4}$ Rta.: $-\dfrac{1}{8\sqrt{2}}$

48°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ Rta.: 1

49°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

50°) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}-1}$ Rta.: 0

51°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ Rta.: ∞

52°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\,x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x^2}}$ Rta.: 4

53°) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ Rta.: 2

54°) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+14}-4}$ Rta.: 2

55°) $\lim\limits_{x\to 2} \left[\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)^{2x-1}\right]$ Rta.: $\dfrac{1}{64}$

56°) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)^{x+1}\right]$ Rta.: 4

Otros casos de límites indeterminados

2°) El límite del cociente cuando el numerador y el denominador tienden a infinito. En símbolos $\dfrac{\to\infty}{\to\infty}$ se suele indicar $\dfrac{\infty}{\infty}$.

3°) El límite del producto de dos factores cuando uno de ellos tiende a cero y el otro a infinito.

En símbolos $(\to 0)\,(\to\infty)$ se suele indicar $0.\infty$.

4°) El límite de la suma de dos términos cuando uno de ellos tiende a $-\infty$ y el otro a $+\infty$.

En símbolos $(+\infty) + (-\infty)$ se suele indicar $+\infty - \infty$.

5°) El límite de una expresión en que la base tiende a 1 y el exponente a infinito.

En símbolos $\longrightarrow 1^{\to\infty}$ se suele indicar 1^{∞}.

6°) El límite de una expresión en que la base tiende a cero y el exponente a cero.

En símbolos $\longrightarrow 0^{\to 0}$ se suele indicar 0^0.

7°) El límite de una expresión en que la base tiende a infinito y el exponente a 0.

En símbolos $(\longrightarrow \infty)^{\to 0}$ se suele indicar ∞^0.

Cuando se ha estudiado derivación el cálculo de estos límites se puede hacer mediante la aplicación de una regla, pero creemos conveniente, porque resulta sencillo, y como ejercitación dar procedimientos algebraicos, para obtener algunos de ellos.

2°) Caso $\dfrac{\longrightarrow \infty}{\longrightarrow \infty}$ si el numerador y el denominador son polinomios, puede ocurrir: que sean los dos del mismo grado, o de distinto grado.

Si son del mismo grado, se divide cada uno de ellos por x elevada a la potencia que indica el grado de los mismos.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4 + 2x^3 + 9}{3x^4 + 7x^2 + x + 1}$$

Los dos polinomios son de 4° grado, luego se divide el numerador y el denominador por x^4.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4 + 2x^3 + 9}{3x^4 + 7x^2 + x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 + \frac{2}{x} + \frac{9}{x^4}}{3 + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = \frac{5}{3}$$

pues todos los otros términos del numerador y del denominador: $\frac{2}{x}$; $\frac{9}{x^4}$; $\frac{7}{x^2}$ etc. tienden a 0 cuando $x \longrightarrow \infty$.

Observación: $\frac{5}{3}$ es el cociente de los coeficientes de los términos de más alto grado del numerador y del denominador; esta conclusión es general, así:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5 + 7x^3 - 8x^2 + 9x}{7x^5 + 4x^4 + 6x} = \frac{2}{7}$$

Cuando el numerador y el denominador son de distinto grado, se divide cada uno de ellos, por x elevada a la potencia del de menor grado.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3 + x^2 - 5x + 2}{x^5 + 2x^4 - x^3}$$

el numerador es de 3° grado y el denominador de 5° grado; se divide numerador y denominador por x^3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^3 + x^2 - 5x + 2}{x^5 + 2x^4 - x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{8 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{x^2 + 2x - 1} = \frac{8}{\infty} = 0$$

Al mismo resultado se llega dividiendo numerador y denominador por x^5.

Observación: siempre que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, el límite es cero.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^6 + 4x^5 - 1}{3x^2 + 6x - 2}$$

el numerador es de 6° grado, y el denominador de 2° grado; se dividen ambos por x^2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^6+4x^5-1}{3x^2+6x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^4+4x^3-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2}} = \frac{\infty}{3} = \infty$$

Al mismo resultado se llega dividiendo numerador y denominador por x^6.

Observación: siempre que el grado del numerador es mayor que el del denominador el límite es ∞.

Hay algunos ejercicios que corresponden a este caso de indeterminación, pero que el numerador y el denominador no son polinomios, sin embargo se pueden resolver por el mismo procedimiento anterior.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-x+5\sqrt{9x^4+7x}}{x^2+2x+4\sqrt[3]{8x^6-2x}}$$

Se divide el numerador y el denominador por x^2. Hay que tener en cuenta que para dividir el término $5\sqrt{9x^4+7x}$, basta dividir uno de los dos factores, se divide la raíz cuadrada, pero dividir la raíz cuadrada por x^2 es equivalente a dividir el radicando por x^4. En el denominador, para dividir la raíz cúbica por x^2 se divide el radicando por x^6. Luego:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-x+5\sqrt{9x^4+7x}}{x^2+2x+4\sqrt[3]{8x^6-2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{1}{x}+5\sqrt{9+\frac{7}{x^3}}}{1+\frac{2}{x}+4\sqrt[3]{8-\frac{2}{x^5}}} =$$

$$= \frac{3+5\times 3}{2+4\times 2} = \frac{18}{9} = 2$$

Ejercicios propuestos Del tipo $\dfrac{\to\infty}{\to\infty}$

1°) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-2x+1}{7x^4+x^2-5x+2}$ Rta.: $\dfrac{3}{7}$

2°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+3x^2-1}{2x^3-4x^2+x}$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

3°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2+6x-2}{3x^2+x-1}$ Rta.: $\dfrac{4}{3}$

4°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^6+2x^4+3}{x^2+5x}$ Rta.: $+\infty$

5°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^5+x^3+1}{x^3+3x-2}$ Rta.: $+\infty$

6°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\left(\dfrac{2x^5-3x^4+2x}{3x^5+2x-1}\right)^{\frac{6x^2-1}{3x^2-1}}\right]$ Rta.: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

7°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\left(\dfrac{x^4+x^2-1}{9x^4-x+2}\right)^{\frac{x^3+1}{2x^3+3}}\right]$ Rta.: $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$

8°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{2x^2+3x}{7x^2+4}\right)^{\frac{2x+3}{x^2+1}}\right]$ Rta.: $\left(\dfrac{2}{7}\right)^0 = 1$

9°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{4x^3+3x^2+2x}{9x^2-x+5}\right)^{\frac{5-3x^2}{6x^2+2}}\right]$ Rta.: 0

10°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sqrt{x^4-5x}}{x-2+\sqrt[3]{27x^6-2}}$ Rta.: 1

11°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+1}{x-3+\sqrt{9x^2-3}}$ Rta.: $\dfrac{5}{4}$

12°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+1}{x-3+\sqrt{9x^2-3}}$ Rta.: $-\dfrac{5}{2}$

13°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x+2\sqrt{9x^4+2}}{x^2+2x+3\sqrt[3]{8x^6-2x}}$ Rta.: $\dfrac{9}{7}$

14°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+1-4\sqrt{x^6-3}}{5x^3+x+3\sqrt[3]{27x^9+x}}$ Rta.: $-\dfrac{1}{7}$

15°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+2\sqrt[3]{125x^6+x-1}}{7x^2+3\sqrt[4]{16x^8-3}}$ Rta.: $\dfrac{11}{3}$

16°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+1-6\sqrt[3]{8x^3+2x}}{x^2+1-\sqrt[4]{81x^4+2x-3}}$ Rta.: $\dfrac{7}{2}$

17°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt[3]{x^3+2}}$ Rta.: 1

18°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x+1}$ Rta.: 1

19°) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$ Rta.: 1

20°) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x}{x^2+3}$ Rta.: 0

21°) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x+4}{x+\sqrt[3]{x}}$ Rta.: 3

22°) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^4+2}}$ Rta.: 2

23°) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+3}}{x+3}$ Rta.: 0

24°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ Rta.: 1

25°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ Rta.: -1

26°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{25x^2+2}}$ Rta.: $\dfrac{2}{5}$

27°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+3}{\sqrt{25x^2+2}}$ Rta.: $-\dfrac{2}{5}$

28°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-1}{5x+2}\right)^{\sqrt{x}}$ Rta.: 0

29°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+4}{2x-9}\right)^{\sqrt{x}}$ Rta.: ∞

30°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{3x+1}\right)^{\sqrt{2x}}$ Rta.: 0

31°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{3x-1}\right)^{x}$ Rta.: 0

32°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+2}\right)^{x^2}$ Rta.: 0

33°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+1}{3x-2}\right)^{x}$ Rta.: $+\infty$

34°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x+1}{3x-2}\right)^{x}$ Rta.: 0

35°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2^{x}-2^{-x}}{2^{x}+2^{-x}}\right)$ Rta.: 1

36°) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3^{x}-3^{-x}}{3^{x}+3^{-x}}\right)$ Rta.: -1

37°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1-x}{1-16x}}^{\,\frac{3x+1}{2x-1}}$ Rta.: $\dfrac{1}{8}$

38°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1-8x}{1-x}}^{\,\frac{2x+1}{3x-1}}$ Rta.: 2

Caso de indeterminación $(\longrightarrow+\infty)+(\longrightarrow-\infty)$

Ejemplo 1°)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+7x+5}-\sqrt{x^2+2x-1}\right)$ se multiplica y divide por la conjugada

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+7x+5}-\sqrt{x^2+2x-1}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+7x+5}-\sqrt{x^2+2x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+7x+5}+\sqrt{x^2+2x-1}\right)}{\sqrt{x^2+7x+5}+\sqrt{x^2+2x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+7x+5}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+2x-1}\right)^2}{\sqrt{x^2+7x+5}+\sqrt{x^2+2x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+7x+5-(x^2+2x-1)}{\sqrt{x^2+7x+5}+\sqrt{x^2+2x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+7x+5-x^2-2x+1}{\sqrt{x^2+7x+5}+\sqrt{x^2+2x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+6}{\sqrt{x^2+7x+5}+\sqrt{x^2+2x-1}}$$

Corresponde al caso anterior, se divide numerador y denominador por x

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\dfrac{6}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{7}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{5}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{5}{2}$$

Ejemplo 2°)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4+2}-\sqrt{x^4+1}\right)$ se multiplica y divide por la conjugada

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+2}-\sqrt{x^4+1}\right)\left(\sqrt{x^4+2}+\sqrt{x^4+1}\right)}{\sqrt{x^4+2}+\sqrt{x^4+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^4+2)-(x^4+1)}{\sqrt{x^4+2}+\sqrt{x^4+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4+2}+\sqrt{x^4+1}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Ejercicios propuestos del tipo $(\longrightarrow+\infty)+(\longrightarrow-\infty)$

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{5+x}-\sqrt{x-1}\right)$ Rta.: 0

2°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$ Rta.: 0

3°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ Rta.: 0

4°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3x-1}\right)$ Rta.: $-\dfrac{3}{2}$

5°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x}\right)$ Rta.: ∞

6°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}\right)$ Rta.: 0

7°) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2+8}}{2}$ Rta.: 0

8°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+10x+1} - \sqrt{x^2+4x+3}\right)$ Rta.: 3

9°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x-1} - \sqrt{x^2+x-2}\right)$ Rta.: $\dfrac{3}{2}$

10°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-2bx+a} - \sqrt{x^2-2cx+d}\right)$ Rta.: $-(b+c)$

11°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$ Rta.: ∞

12°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x+2}}$ Rta.: ∞

13°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x-2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$ Rta.: ∞

14°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+5\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$ Rta.: $\dfrac{5}{2}$

15°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}\right)$ Rta.: 1

16°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\left(\sqrt{x+6} - \sqrt{x}\right)\sqrt{x}\right]$ Rta.: 3

17°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x(x+4)} - x\right)$ Rta.: 2

18°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x(x+1)}\right)$ Rta.: $-\dfrac{1}{2}$

19°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x}\left(\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4}\right)\right]$ Rta.: 4

20°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x}\left(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5}\right)\right]$ Rta.: 5

21°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{(x+2)(x+4)} - x\right)$ Rta.: 3

22°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{(x+3)(x+1)} - x\right)$ Rta.: 2

23°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x}\right)$ Rta.: ∞

Para resolver este ejercicio se aplica: $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

24°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3-2x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+x}\right)$ Rta.: $-\dfrac{2}{3}$

25°) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}\right)$ Rta.: 0

26°) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}\right)$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

27°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x-\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$ Rta.: $-\dfrac{1}{2}$

28°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}}$ Rta.: ∞

Casos de indeterminación $\longrightarrow 1^{\to\infty}$

Este caso se resuelve mediante el número irracional $e = 2{,}718281\ldots\ldots$ que se puede definir, como justificaremos luego, por el límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x\to 0}\,(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

el denominador debe ser igual al exponente, así:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\boxed{2x}}\right)^{\boxed{2x}} = e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\boxed{x^2+3}}\right)^{\boxed{x^2+3}}$$

el 2° término del paréntesis debe ser igual al denominador del exponente, así:

$$\lim_{x\to 0}\,(1+\boxed{3x})^{\frac{1}{\boxed{3x}}} = e$$

$$\lim_{x\to 0}\,(1+\boxed{2x^2})^{\frac{1}{\boxed{2x^2}}} = e$$

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1°)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x^3}$$

para llevar la expresión encerrada en el paréntesis a la forma requerida, se puede escribir:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{2x^3}$$

como en el exponente debe figurar $\dfrac{x}{3}$, se multiplica y divide el exponente dado por $\dfrac{x}{3}$, es decir:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\,\frac{3}{x}\,2x^3} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{6x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty} 6x^2} = e^{\infty} = \infty$$

pues la base es mayor que 1 y el exponente $\longrightarrow +\infty$

Ejemplo 2°)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{3x-1}\right)^{9x}$$

para llevar la expresión comprendida en el paréntesis a la forma requerida se puede escribir:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\dfrac{3x-1}{2}}\right)^{9x}$$

Se multiplica y divide el exponente por $-\dfrac{3x-1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\dfrac{3x+1}{2}}\right)^{-\frac{3x+1}{2}\left(-\frac{2}{3x+1}\right)9x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\dfrac{3x+1}{2}}\right)^{-\frac{3x+1}{2}}\right]^{-\frac{18x}{3x+1}}$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\dfrac{3x+1}{2}}\right)^{-\frac{3x+1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{18x}{3x+1}} = e^{-6} = \frac{1}{e^{6}}$$

Ejemplo 3°)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+7}{5x+4}\right)^{3x}$$

Para llevar la expresión del paréntesis, a la forma $1+\dfrac{1}{\varphi(x)}$ se suma y resta al numerador el número 4.

$$\frac{5x+7}{5x+4} = \frac{5x+4-4+7}{5x+4} = \frac{5x+4+3}{5x+4} = \frac{5x+4}{5x+4}+\frac{3}{5x+4} =$$

$$= 1+\frac{3}{5x+4}$$

y ya se transformó en uno de los tipos de los ejemplos anteriores, pues

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+7}{5x+4}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{5x+4}\right)^{3x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{5x+4}{3}}\right)^{\frac{5x+4}{3}\cdot\frac{3}{5x+4}\cdot 3x}$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{5x+4}{3}}\right)^{\frac{5x+4}{3}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x}{5x+4}} = e^{\frac{9}{5}}$$

Observación: para pasar de la forma $\dfrac{5x+7}{5x+4}$ a $1+\dfrac{3}{5x+4}$ se puede proceder de otra forma que es efectuar la división:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{5x}+7 & 5x+4 \\ \cline{2-2} -\cancel{5x}-4 & 1 \\ \hline 3 & \end{array} \implies 5x+7 = (5x+4)\,1+3 \implies \frac{5x+7}{5x+4} = 1+\frac{3}{5x+4}$$

NOTA: Para que la determinación del número e como límite $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ no se presente al alumno como una imposición difícil de aceptar, daremos una idea aproximada de la justificación de la misma. Para ello, recordemos la fórmula de Newton para la potencia del binomio:

$$(a+b)^n =$$

$$= a^n + n\,a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} a^{n-4} b^4 + \dots + b^n$$

Para el caso particular:

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es $a=1$ por lo tanto, en cada término del desarrollono se escriben los factores que son potencias de a; y $b=\frac{1}{n}$; luego se tiene:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$1 + \cancel{n}\,\frac{1}{\cancel{n}} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)$$

El tercer término:

$$\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2!}\,\frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{1}{2!}\,\frac{n-1}{n} = \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

El cuarto término:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3!}\,\frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)}{n^{\cancel{3}\,2}} = \frac{1}{3!}\,\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n} =$$

$$= \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

El quinto término:

$$\frac{n(n-)(n-2)(n-3)}{4!}\left(\frac{1}{n}\right)^4 = \frac{1}{4!}\,\frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)(n-3)}{n^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{1}{4!}\,\frac{n-1}{n}\,\frac{n-2}{n}\,\frac{n-3}{n} =$$

$$= \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)$$

Se reemplaza cada término, en la expresión de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ y se tiene:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)+\dots\dots$$

Se toma límite para $n \longrightarrow \infty$. Si bien en el segundo miembro el número de términos tiende a ∞, se ve al estudiar series que, dado la característica de la misma, se puede tomar límite término a término, y resulta que cada paréntesis del segundo miembro, tiende a 1 cuando $n \longrightarrow \infty$. En efecto:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)=1 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)=1 \qquad \text{etc.}$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots\dots$$

Se ve la ley de formación de los términos del segundo miembro, en el cual podemos escribir algunos términos más:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\dots\dots$$

este es el número $e = 2{,}718281\dots\dots$ o sea que cuantos más términos se consideren en el segundo miembro, la suma se aproxima cada vez más a $2{,}718281\dots\dots$ Así es, pues, sumemos los ocho primeros términos:

$$
\begin{aligned}
1 + 1 + \frac{1}{2!} &= 2{,}5 \\
\frac{1}{3!} &= 0{,}166667 \\
\frac{1}{4!} &= 0{,}041666 \\
\frac{1}{5!} &= 0{,}008333 \\
\frac{1}{6!} &= 0{,}0001389 \\
\frac{1}{7!} &= 0{,}000198 \\
\hline
1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} &= 2{,}718253
\end{aligned}
$$

Se observa que al considerar solamente los ocho primeros términos se obtienen las cifras de las unidades y las cuatro primeras cifras decimales del número e, cuyo valor es 2,7182. . . . . .; cuantos más términos se sumen, irán apareciendo más cifras decimales de e. Es más fácil admitir ahora que el $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ es el número e. En el desarrollo anterior se consideró n número natural, pero se demuestra que también es válido para $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ cuando x es un número real.

Ejercicios propuestos del tipo $\longrightarrow 1^{\to\infty}$

1°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x$ Rta.: $e^{\frac{1}{3}}$

2°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$ Rta.: $e^{\frac{1}{2}}$

3°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{8x+1}$ Rta.: e^2

4°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{2x}$ Rta.: e^{10}

5°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{3}{2x}\right)^{x+1}$ Rta.: $e^{\frac{3}{2}}$

6°) $\lim\limits_{x\to 2} \left(1 + \frac{4}{3x}\right)^{x-2}$ Rta.: $e^{\frac{4}{3}}$

7°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x-2}\right)^{4x}$ Rta.: e^4

8°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{3x-2}$ Rta.: e^3

9°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{2x+3}$ Rta.: e^6

10°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{x-2}\right)^{2x^2+1}$ Rta.: $+\infty$

11°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x+3}\right)^{x^3-2}$ Rta.: $+\infty$

12°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$ Rta.: e

13°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x}$ Rta.: $\frac{1}{e^6}$

14°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{4x}$ Rta.: $\frac{1}{e^{12}}$

15°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{4}{x}\right)^{\frac{1}{8}x}$ Rta.: $\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$

16°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{x-1}\right)^{x+3}$ Rta.: $\frac{1}{e^2}$

17°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{x+2}\right)^{3x+4}$ Rta.: $\frac{1}{e^9}$

18°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{x+1}\right)^{2x^2-1}$ Rta.: 0

19°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x+2}\right)^{x^2+x}$ Rta.: 0

20°) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{1}{x+2}\right)^{x^2+x}$ Rta.: $+\infty$

21°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x^2}$ Rta.: 0

22°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ Rta.: 0

23°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+4}$ Rta.: e^2

24°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{4x+5}{4x-1}\right)^{3x+2}$ Rta.: $e^{\frac{9}{2}}$

25°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-4}\right)^{6x}$ Rta.: e^{15}

26°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+1}{2x+4}\right)^{4x}$ Rta.: e^{-6}

27°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x+5}\right)^{2x+1}$ Rta.: e^{-2}

28°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)^{3x+2}$ Rta.: e^{-21}

29°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{7x}{7x+2}\right)^{x-1}$ Rta.: $e^{-\frac{2}{7}}$

30°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x}{3x-4}\right)^{\frac{x^2+2}{x-1}}$ Rta.: $e^{\frac{3}{4}}$

31°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{x^2+1}$ Rta.: $+\infty$

32°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2+5x-1}{2x^2+3x-2}\right)^{3x}$ Rta.: e^3

33°) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2+4x+2}{3x^2-x+1}\right)^{2x+3}$ Rta.: $e^{\frac{10}{3}}$

34°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2-3x-4}{x^2+x+1}\right)^{\frac{1}{2}x}$ Rta.: e^{-2}

35°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2x+1}\right)^{x^2}$ Rta.: $+\infty$

36°) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2x+1}\right)^{x^3}$ Rta.: 0

37°) $\lim\limits_{x\to0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$ Rta.: e^2

38°) $\lim\limits_{x\to0} (1+3x)^{\frac{1}{6x}+1}$ Rta.: $e^{\frac{1}{2}}$

39°) $\lim\limits_{x\to0} (1+4x)^{\frac{1}{x^2+x}}$ Rta.: e^4

40°) $\lim\limits_{x\to0} (1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$ Rta.: e

41°) $\lim\limits_{x\to0} (1+\operatorname{sen} 2x)^{\frac{1}{2x}}$ Rta.: e

42°) $\lim\limits_{x\to0} (1+\operatorname{sen} 3x)^{\frac{6}{x}}$ Rta.: e^{18}

43°) $\lim\limits_{x\to0} (1+\operatorname{sen} 2x)^{\frac{1}{x}}$ Rta.: e^2

44°) $\lim\limits_{x\to0} (1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2x}}$ Rta.: $e^{\frac{1}{2}}$

45°) $\lim\limits_{x\to0} (1+2\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$ Rta.: e^2

46°) $\lim\limits_{x\to0} (1+3\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2\operatorname{tg} x}}$ Rta.: $e^{\frac{3}{2}}$

47°) $\lim\limits_{x\to0} (1+4\operatorname{tg} x)^{\frac{2}{\operatorname{tg} x}}$ Rta.: e^8

Otros ejercicios propuestos
(con cambio de variables y combinación de reglas)

1°) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ Rta.: $\dfrac{3}{2}$

Se resuelve mediante el cambio de variable

$z = \sqrt[6]{x}$

Observar que 6 es el mínimo común múltiplo de los índices 2 y 3.

2°) $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}}{x-8}$ Rta.: $\dfrac{1}{6}$

3°) $\lim\limits_{x\to8} \dfrac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{2}-\sqrt{x}}$ Rta.: $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

4°) $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{(x+k)^3-x^3}{k}$ Rta.: $3x^2$

5°) $\lim\limits_{k\to0} \dfrac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x}}{k}$ Rta.: $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

6°) $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{(2x+h)^2-4x^2}{3h}$ Rta.: $\dfrac{4}{3}x$

7°) $\lim\limits_{k\to1} \dfrac{1-k}{1-\sqrt{k}}$ Rta.: 2

8°) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{x}$ Rta.: 0

9°) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$ Rta.: $\dfrac{1}{4}$

10°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

11°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\ (1 + 2\,x)}{x}$ Rta.: 2

se hace la transformación $\dfrac{\ln\ (1 + 2\,x)}{x} =$

$= \ln\ (1 + 2\,x)^{\frac{1}{x}}$

12°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\ (1 + x)}{x}$ Rta.: 1

13°) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\ln\ x}$ Rta.: 1

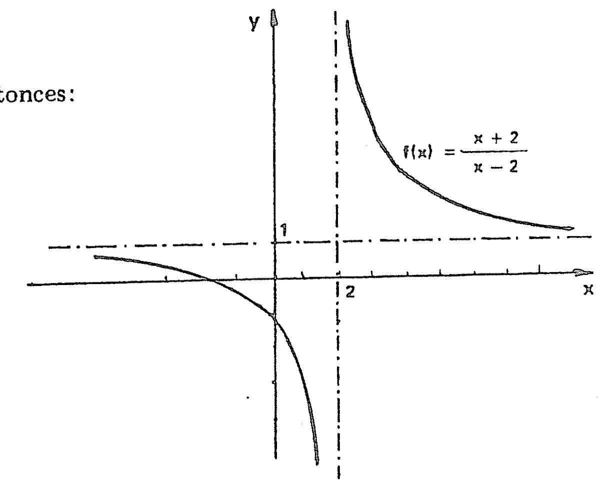
es cómodo hacer el cambio de variable

$z = x - 1$

14°) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\ln\ (2 - x)}{x - 2}$ Rta.: 0

4 Asíntotas

Cuando estudiamos las gráficas de las funciones del tipo $f(x) = \dfrac{a\,x + b}{c\,x + d}$ vimos que hay rectas que se llaman **asíntotas** a dichas curvas.



Así en el ejemplo que consideramos entonces:

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 2}$$

las asíntotas son las rectas

$$y = 1$$
$$x = 2$$

La primera es la asíntota horizontal.

La segunda es la asíntota vertical.

Obsérvese que a medida que $|\,x\,|$ aumenta, la distancia entre el punto de la curva y la asíntota horizontal $y = 1$ se hace cada vez menor, o sea que la diferencia entre la ordenada de la curva y la correspondiente a la asíntota se hace cada vez más pequeña, tiende a 0 cuando $x \longrightarrow +\infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$ esto implica que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$
$$\wedge$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$$

por esta razón la asíntota horizontal es $y = 1$.

Vale decir que **para determinar las asíntotas horizontales se calcula el límite de $f(x)$ cuando $x \longrightarrow +\infty$ y cuando $x \longrightarrow -\infty$** y si esos límites son números finitos dichos números dan las ordenadas de las asíntotas horizontales. Para la asíntota vertical $x = 2$ se observa que a medida que

x se aproxima a 2 tanto por la derecha como por la izquierda los puntos de la curva se aproximan cada vez más a la recta, están a menor distancia de la asíntota, las ordenadas que determina la función crecen indefinidamente en valor absoluto.

Es decir

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{la asíntota vertical es } x = 2$$

O sea que para hallar las asíntotas verticales se determinan los valores de x para los cuales los valores de la función tienden a ∞.

En símbolos:

$x = a$ es asíntota vertical de $f(x) \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$

El límite puede ser $+\infty$ o $-\infty$ si x tiende a a por la derecha o por la izquierda.

Si la función es racional $f(x) = \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$, los valores de x que son las asíntotas verticales, son aquellos por los cuales el denominador $P_2(x)$ tiende a 0, pero no el numerador $P_1(x)$.

Ejemplo: determinar las asíntotas verticales y horizontales de la función

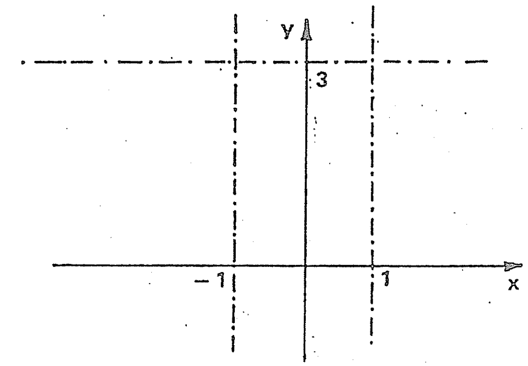
$$f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

Asíntotas horizontales

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+2}{x^2-1} = 3 \\ \\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2+2}{x^2-1} = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{asíntota horizontal } \quad y = 3$$

Asíntotas verticales: los valores de x para los cuales la función tiende a ∞, son aquellos que anulan el denominador pero no el numerador. En este caso:

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$



Hay curvas que tienen asíntotas oblicuas, el ejemplo más común es el de la hipérbola cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{y sus asíntotas} \begin{cases} y = \dfrac{b}{a}\, x \\ y = -\dfrac{b}{a}\, x \end{cases}$$

según se vio en la sinopsis.

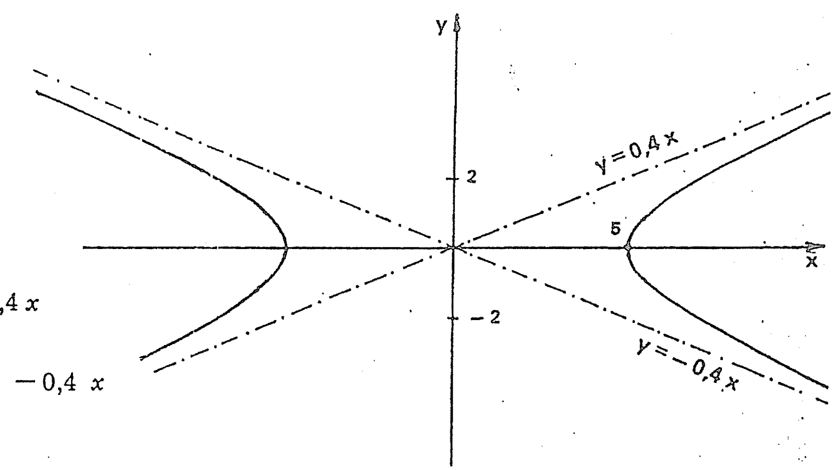
Ejemplo:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$a = 5$

$b = 2$

$$\text{asíntotas} \begin{cases} y = \dfrac{2}{5}\, x = 0{,}4\, x \\ y = -\dfrac{2}{5}\, x = -0{,}4\, x \end{cases}$$



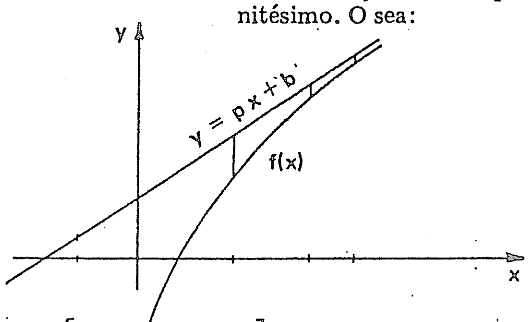
Las primeras curvas en que se estudiaron las asíntotas fueron las hipérbolas, pero luego se vio que hay otras curvas que también tienen asíntotas ya sean horizontales, verticales y oblicuas.

Se presenta entonces el siguiente problema: dada una función determinar las rectas que son sus asíntotas. Es decir dada la función $f(x)$ encontrar las rectas $y = p\,x + b$ que son sus asíntotas oblicuas si $p \neq 0$ y horizontales si $p = 0$. Para determinar estas rectas es preciso calcular el número p que es la pendiente y el número b que es la ordenada del punto en que la recta corta al eje y.

Para ello se procede como se indica a continuación:

Asíntotas oblicuas y horizontales

Según se ha visto, tanto para las asíntotas oblicuas como para las horizontales, cuando $x \longrightarrow \infty$ la diferencia entre la ordenada del punto de la gráfica de la función y del correspondiente de la asíntota tiende a cero, es decir es un infinitésimo. O sea:



$$\left.\begin{array}{l} y = p\ x + b \quad \text{es} \\ \text{asíntota de } f(x) \end{array}\right\} \iff \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - (p\,x + b) \right] = 0$$

Para determinar la pendiente p se procede así: de acuerdo con la definición de límite es:

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - (p\,x + b) \right] = 0 \iff f(x) - (p\,x + b) = \epsilon \Big/ \begin{array}{l} \epsilon \longrightarrow 0 \\ \text{cuando } x \longrightarrow 0 \end{array}$$

Se pasa el paréntesis al segundo miembro

$$f(x) = p\,x + b + \epsilon \Big/ \begin{array}{l} \epsilon \longrightarrow 0 \\ \text{cuando } x \longrightarrow \infty \end{array}$$

se dividen ambos miembros por x

$$\frac{f(x)}{x} = p + \frac{b}{x} + \frac{\epsilon}{x}$$

se toma límite para x tendiendo a infinito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = p + \lim_{x\to\infty} \frac{b}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{\epsilon}{x}$$

en el segundo miembro p es un número, y los límites de los otros términos son 0 pues b es un número y $\epsilon \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow \infty$.

Luego:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = p \iff \boxed{p = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

vale decir que para obtener la pendiente de la asíntota, se divide la expresión de la función por x y luego se toma límite para $x \longrightarrow \infty$. Si $p \neq 0$ la asíntota es oblicua, si $p = 0$ es asíntota horizontal, no hay oblicua. Conocida la pendiente p para obtener b se parte de la igualdad anterior:

$$f(x) = p\,x + b + \epsilon$$

se pasa $p\,x$ al primer miembro

$$f(x) - p\,x = b + \epsilon$$

se toma límite para $x \longrightarrow \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - p\,x \right] = b + \lim_{x\to\infty} \epsilon$$

como $\epsilon \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow \infty$ resulta:

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x) - p\,x \right] = b \iff \boxed{b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - p\,x \right]}$$

NOTA: 1°) En algunos ejemplos los límites son distintos para $x \longrightarrow +\infty$ y para que $x \longrightarrow -\infty$ por eso se considera cada uno por separado. 2°) Las funciones polinómicas no tienen asíntotas.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1°)

$$f(x) = \frac{2\,x^2 - x}{x - 2}$$

Asíntotas horizontales no hay pues $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-x}{x-2} = \infty$

Asíntotas verticales están dadas por los valores de x que anulan el denominador es decir

$x-2=0 \Longrightarrow x=2$ es la asíntota vertical

Obsérvese que el numerador para $x=2$ es $\neq 0$. Además

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-x}{x-2} = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-x}{x-2} = -\infty$$

Asíntotas oblicuas:

Para obtener p se divide $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\frac{2x^2-x}{x-2}}{x} = \dfrac{2x^2-x}{x^2-2x}$

$$p = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^2-2x} = 2$$

es decir que hay una asíntota oblicua de pendiente 2. Para obtener b se halla

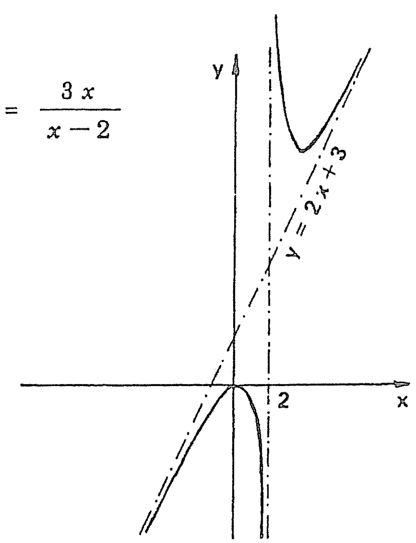
$$f(x)-px = \frac{2x^2-x}{x-2} - 2x = \frac{2x^2-x-2x^2+4x}{x-2} = \frac{3x}{x-2}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x)-px\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x-2} = 3$$

Luego la ecuación de la asíntota oblicua es:

$y = 2x+3$

El trazado de las asíntotas ayuda a obtener la gráfica de la función, pero se facilita aún más cuando se sabe determinar los máximos y los mínimos relativos, estudio que se realiza más adelante. En este caso el gráfico es aproximadamente el que se indica:



Ejemplo 2°)

Hallar las asíntotas de la curva que es gráfica de la función

$x^2y - y - 2x^2 + x = 0$

si bien esta función está dada en forma implícita, es fácil despejar y y pasar a la forma explícita pues se puede escribir

$$y(x^2-1) - 2x^2 + x = 0 \Longrightarrow y = \frac{2x^2-x}{x^2-1}$$

es decir

$$f(x) = \frac{2x^2-x}{x^2-1}$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^2-1} = 2 \Longrightarrow y = 2 \quad \text{asíntota horizontal}$$

Asíntotas verticales

$$x^2-1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

es decir hay dos asíntotas verticales $x=1$ y $x=-1$.

Asíntotas oblicuas

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2-x}{x^3-x^2} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^3-x^2} = 0 \Longrightarrow p = 0$$

la pendiente es 0 no hay asíntota oblicua.

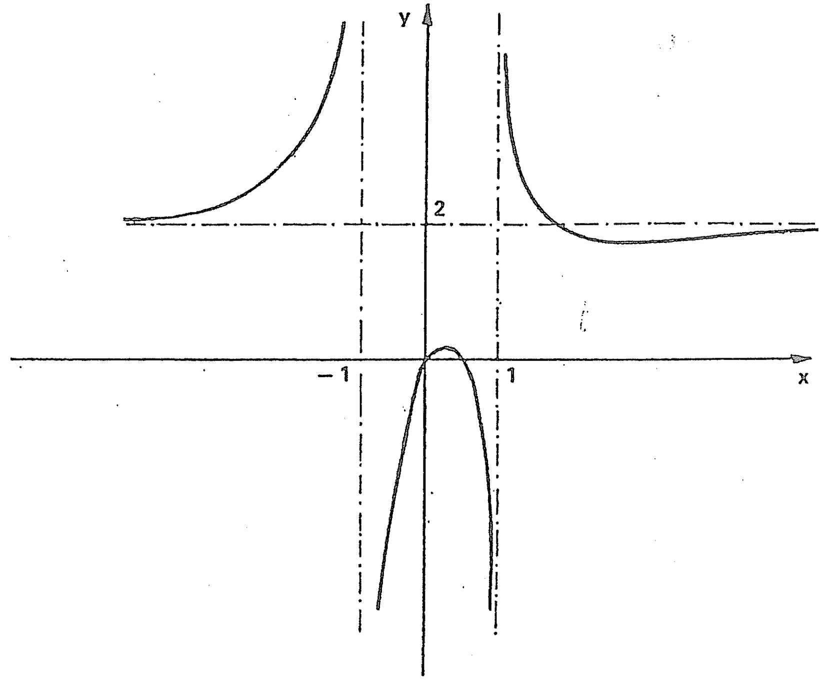
Al ser $p=0$ se ratifica la existencia de la asíntota horizontal que ya hemos obtenido. Determinamos b.

$$b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x)-px\right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^2-x}{x^2-1} - 0x\right] = 2 \Longrightarrow b = 2.$$

es decir la recta $b = 0x+2 \Longrightarrow y = 2$ que coincide con la asíntota horizontal que ya encontramos.

Se dibujan las tres asíntotas y con el siguiente cuadro de valores se obtiene aproximadamente la gráfica

x	y
0	0
0,5	0
0,3	0,13
1,5	2,4
2	2
4	1,86
10	1,91
- 0,5	- 2
- 0,7	- 3,9
- 1,5	4
- 2	3
- 3	2,6



Ejemplo 3°)

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-x-6}$$

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^2-x-6} = \infty$$ <u>no</u> hay asíntota horizontal

Asíntotas verticales

$$x^2-x-6 = 0 \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$$ que son las dos asíntotas verticales

Asíntotas oblicuas

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3+1}{x^3-x^2-6x} \quad ; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3-x^2-6x} = 1 \Longrightarrow p=1$$

hay una asíntota oblicua de pendiente 1.

$$f(x)-p\,x = \frac{x^3+1}{x^2-x-6} - x = \frac{x^3+1-x^3+x^2+6x}{x^2-x-6} = \frac{x^2+6x+1}{x^2-x-6}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[f(x)-p\,x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+6x+1}{x^2-x-6} = 1 \Longrightarrow b=1$$

luego, la asíntota oblicua es

$$y = x+1$$

Ejemplo 4°)

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

El resultado de la raíz cuadrada debe ser un número real y además distinto de cero porque está en el denominador, por lo tanto el radicando debe ser positivo:

$$x^2-1>0 \Longrightarrow x^2>1 \Longrightarrow -1>x>1$$

es decir que: en el dominio de la función quedan excluidos los puntos del intervalo $[-1\,;1]$. Por lo tanto, al tratar las asíntotas horizontales y las oblicuas hay que considerar $x\longrightarrow+\infty$ a la derecha de 1 y $x\longrightarrow-\infty$ a la izquierda de -1.

Asíntota horizontal: no existe pues $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \infty$

Asíntotas verticales:

El denominador $\sqrt{x^2-1}$ se anula cuando $x^2-1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

es decir hay dos asíntotas verticales $x=1$ y $x=-1$.

Asíntotas oblicuas

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$ se divide numerador y denominador por x

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = 1 \Longrightarrow p = 1$$

$$f(x) - p\,x = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - x = \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2 - \sqrt{x^4-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$$

se introdujo x en el radical. Al tomar límite, para evitar la indeterminación se multiplica y divide el segundo miembro por la conjugada del numerador

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - p\,x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2 - \sqrt{x^4-x^2}\right)\left(x^2 + \sqrt{x^4-x^2}\right)}{\sqrt{x^2-1}\ \left(x^2 + \sqrt{x^4-x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 - \left(\cancel{\sqrt{x^4-x^2}}\right)^{\cancel{2}}}{x^2\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-1}\ \sqrt{x^4-x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^4} - \cancel{x^4} + x^2}{x^2\sqrt{x^2-1} + \sqrt{(x^2-1)(x^4-x^2)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^6-x^4-x^4+x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - p\,x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-2+\frac{1}{x^2}}} = 0 \Longrightarrow b = 0$$

por lo tanto la asíntota oblicua a la derecha de 1 es

$y = x$

Para obtener la asíntota a la izquierda de $x = -1$, hay que tomar límite para $x \longrightarrow -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= -1 \Longrightarrow p = -1$$

$$f(x) - p\,x = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} + x = \frac{x^2 + x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

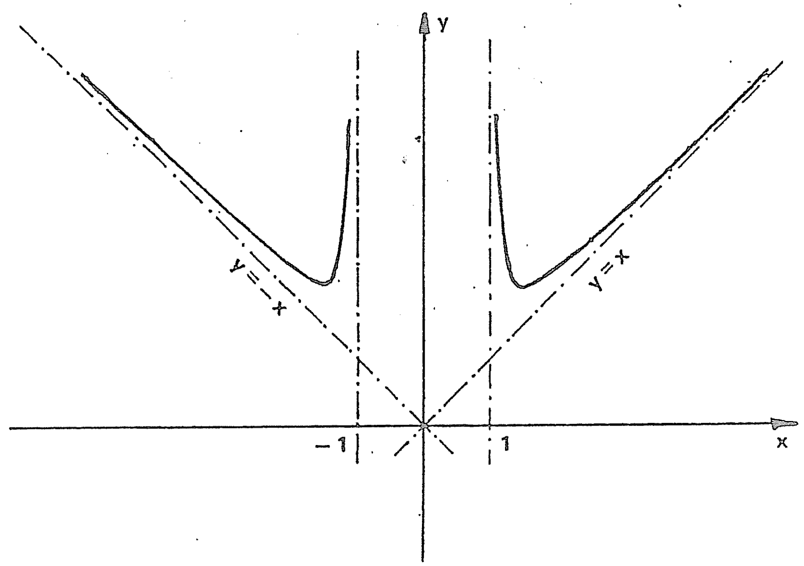
se divide por x el numerador y denominador

$$f(x) - px = \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$$ se multiplica y divide por la conjugada del numerador

$$f(x) - p\,x = \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\ \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)} = \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\ \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)}$$

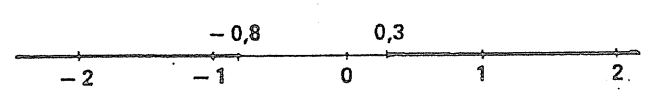
$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - p\,x \right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)} = 0 \implies b = 0$$

Luego la asíntota oblicua a la izquierda de $x = -1$ es $y = -x$.



Ejemplo 5°)

$f(x) = \sqrt{4\,x^2 + 2\,x - 1}$ el dominio está determinado por los valores de x tales que $4\,x^2 + 2\,x - 1 \geqslant 0$ como las raíces de la ecuación $4\,x^2 + 2\,x - 1 = 0$ son $\begin{cases} x_1 \simeq 0{,}3 \\ x_2 \simeq -0{,}8 \end{cases}$ resulta que el dominio es el conjunto de todos los números reales excluidos los del intervalo abierto $-0{,}8\,;\,0{,}3$



Para determinar las asíntotas hay que considerar los límites para $x \longrightarrow +\infty$ a la derecha de $x = 0{,}3$ y para $x \longrightarrow -\infty$ a la izquierda de $x = -0{,}8$

No hay asíntota horizontal pues

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \sqrt{4\,x^2 + 2\,x - 1} = \infty$$

Tampoco hay asíntota vertical pues para ningún número real los valores de la función tienden a infinito.

Para obtener las asíntotas oblicuas, es cómodo extraer x fuera del radical, así:

$$f(x) = x\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \implies \frac{f(x)}{x} = \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

Para determinar la asíntota a la derecha de 0,3 se toma límite para $x \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = 2 \Longrightarrow p = 2$$

$$f(x) - p\,x = \sqrt{4\,x^2 + 2\,x - 1} - 2\,x$$

y para calcular el límite para $x \longrightarrow +\infty$, se multiplica y divide por la conjugada:

$$f(x) - p\,x = \frac{\left(\sqrt{4\,x^2 + 2\,x - 1} - 2\,x\right)\left(\sqrt{4\,x^2 + 2\,x - 1} + 2\,x\right)}{\sqrt{4\,x^2 + 2\,x - 1} + 2\,x}$$

$$= \frac{4\,x^2 + 2\,x - 1 - 4\,x^2}{\sqrt{4\,x^2 + 2\,x - 1} + 2\,x} = \frac{2\,x - 1}{\sqrt{4\,x^2 + 2\,x - 1} + 2\,x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - p\,x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\,x - 1}{\sqrt{4\,x^2 + 2\,x - 1} + 2\,x}$$

ahora se divide por x el numerador y el denominador:

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+2} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow b = \frac{1}{2}$$

por lo tanto la asíntota a la derecha de $x = 0{,}3$ es:

$$y = 2x + \frac{1}{2}$$

Para determinar la asíntota a la izquierda de $-0{,}8$ se toma límite para $x \longrightarrow -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2x-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}{-1} = -2 \Longrightarrow p = -2$$

$$f(x) - p\,x = \sqrt{4x^2+2x-1} + 2x$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - p\,x\right] = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x-1} + 2x\right)$$

como para $x \longrightarrow -\infty$ queda la indeterminación $+\infty - \infty$ para evitarla se multiplica y divide por la conjugada

$$\lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - p\,x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2+2x-1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x-1}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+2x-1}-2x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+2x-1-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x-1}-2x} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2+2x-1}-2x}$$

$$= \frac{-2}{2+2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow b = -\frac{1}{2}$$

Luego la asíntota oblicua, a la izquierda de $-0{,}8$ es

$$y = -2x - \frac{1}{2}$$

Ejercicios propuestos

Determinar el dominio y las asíntotas de las gráficas de las siguientes funciones y dibujar las asíntotas:

1°) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x - 4}$ Rta.: D = los números reales excepto -1 y 4.

Asíntotas $\begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$

2°) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 9}$ Rta.: D = los números reales excepto -3 y 3.

Asíntotas $\begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

3°) $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x - 1}$ Rta.: D = los reales excepto $\frac{1}{2}$.

Asíntotas $\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

4°) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 2}$ Rta.: D = los reales, excepto 2.

Asíntotas $\begin{cases} x = 2 \\ y = x + 4 \end{cases}$

5°) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + x}$ Rta.: $D = \{\, x \,/\, x \neq -1 \ \wedge\ x \neq 0 \,\}$

Asíntotas $\begin{cases} x = 0 \\ y = x - 4 \end{cases}$

Obsérvese en este ejercicio que $x = -1$ no es asíntota vertical, pues $x = -1$ anula el numerador.

6°) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ Rta.: D = los reales, excepto 1 y 2.

$$\text{Asíntotas} \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

7°) $f(x) = \dfrac{-x}{x^2 + 1}$ Rta.: $D = R$

$$\text{Asíntota} \begin{cases} y = 0 \end{cases}$$

8°) $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 + 4x}{x^3 - 4x^2 + 3x}$ Rta.: D = los reales excepto 0; 1 y 3.

$$\text{Asíntotas} \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Obsérvese que $x = 0$ no es asíntota vertical pues 0 anula el numerador.

9°) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 2x - 3}{x^2 - 6x + 8}$ Rta.: D = los reales, excepto 2 y 4.

$$\text{Asíntotas} \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \\ y = 2x + 12 \end{cases}$$

10°) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 3x + 1}{9x^2 - 9}$ Rta.: $D = \{ x / x \neq -1 \ \wedge \ x \neq 1 \}$

$$\text{Asíntotas} \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ y = \dfrac{1}{3} x \end{cases}$$

11°) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 2}{4x^2 - 1}$ Rta.: D = los reales, excepto $-\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{1}{2}$.

$$\text{Asíntotas} \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} x - \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

12°) $f(x) = \dfrac{-x}{x^3 + 1}$ Rta.: D = los reales, excepto -1.

$$\text{Asíntotas} \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

13°) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x - 2}$ Rta.: D = los reales, excepto 2.

$$\text{Asíntotas} \begin{cases} x = 2 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

14°) $f(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$ Rta.: D = los reales, excepto 2 y -2.

$$\text{Asíntotas} \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ y = -x \end{cases}$$

15°) $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x}{x^2 - 3x - 4}$ Rta.: D = los reales, excepto -1 y 4.

$$\text{Asíntotas} \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \\ y = 3x + 9 \end{cases}$$

16°) $f(x) = \dfrac{3x^3 - x^2 - 4x + 4}{2x^3 + 5x^2 - 3x}$

Rta.: D = los reales, excepto 0 ; $\dfrac{1}{2}$ y -3.

$$\text{Asíntotas}\begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \\ x = -3 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

17°) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{2(x+1)}$

Rta.: D = los reales, excepto -1.

$$\text{Asíntotas}\begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

18°) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3}{x^2 + 4}$

Rta.: $D = R$.

$$\text{Asíntota}\ \{ y = 5$$

19°) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$

Rta.: D = reales, excepto 2 y -2.

$$\text{Asíntotas}\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

20°) $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt[3]{x^6 - 1}}$

Rta.: D = reales, excepto -1 y 1.

$$\text{Asíntotas}\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

21°) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

Rta.: D = los reales, tales que $x < -2$ ó $x > 2$.

$$\text{Asíntotas}\begin{cases} x = 2 & \text{para } x \longrightarrow 2^+ \\ x = -2 & \text{para } x \longrightarrow 2^- \\ y = 2 & \text{para } x \longrightarrow +\infty \\ y = -2 & \text{para } x \longrightarrow -\infty \end{cases}$$

22°) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x - 3}$

Rta.: $D = x$ reales que

$$x \leqslant \frac{-1 - \sqrt{13}}{4} \quad \text{ó} \quad x \geqslant \frac{-1 + \sqrt{13}}{4}$$

$$\text{Asíntotas}\begin{cases} y = 2x + \dfrac{1}{2} & \text{para } x \longrightarrow +\infty \\ y = -2x - \dfrac{1}{2} & \text{para } x \longrightarrow -\infty \end{cases}$$

23°) $f(x) = \sqrt{9x^2 + 3x - 2}$

Rta.: $D = x$ reales, tales que

$$x \leqslant -\frac{2}{3} \quad \text{ó} \quad x \geqslant \frac{1}{3}$$

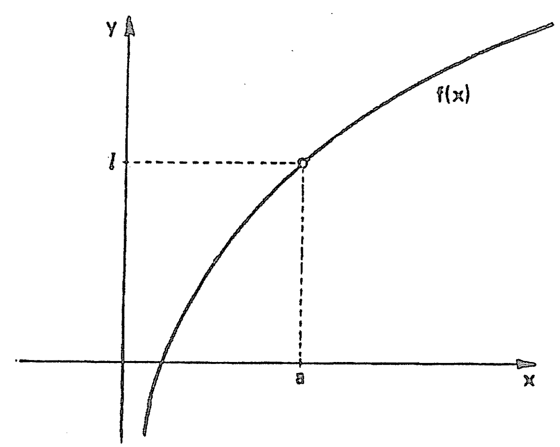
$$\text{Asíntotas}\begin{cases} y = 3x + 1 & \text{para } x \longrightarrow +\infty \\ y = -3x - \dfrac{1}{2} & \text{para } x \longrightarrow -\infty \end{cases}$$

5 Continuidad

Función continua de un punto

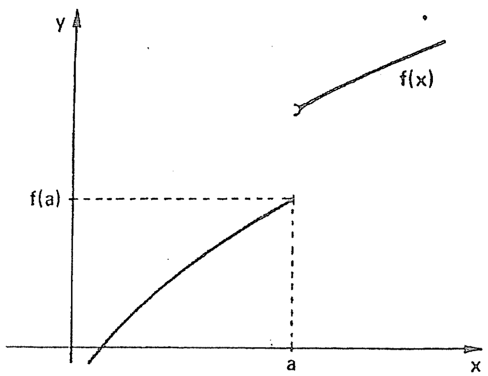
En Matemática, siempre se trata de utilizar las palabras, con la misma acepción, el mismo significado, que en el lenguaje corriente. Cuando decimos que un suceso es continuo, queremos decir que no se interrumpe, que no se corta, así también, decimos que una función es continua en un punto, cuando la gráfica de esa función no se corta, no se interrumpe, no da un salto en ese punto. A continuación consideramos algunos ejemplos en los que se ponen en evidencia las condiciones que debe cumplir una función para ser continua en un punto.

Ejemplo 1°)



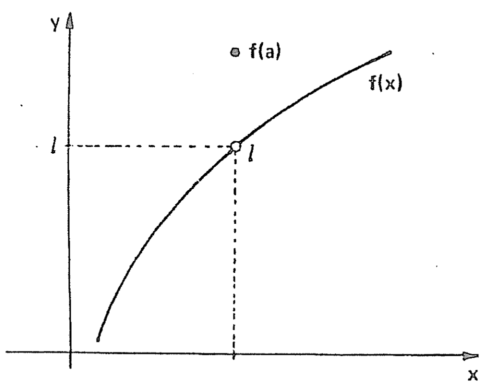
Si se trata de una función como la de la figura adjunta, que no está definida en el punto $x = a$, resulta que la curva está cortada, tiene un agujero, luego no es continua en ese punto. Por lo tanto, si no es continua en el punto a por no estar definida en él, **para ser continua debe estar definida en el punto.**

Ejemplo 2°)



La función está definida en el punto $x = a$ pero como indica la gráfica, no tiene límite en ese punto; como consecuencia, la función da un salto, no es continua en ese punto. Si por no tener límite no es continua, para ser continua en un punto debe tener límite finito en él.

Ejemplo 3°)



Si la función está definida en el punto $x = a$ donde toma el valor $f(a)$ y tiene límite l en el punto, pero el límite l es distinto de $f(a)$ como se ve en la figura, la curva está interrumpida en ese punto, no es continua. Si por ser distintos $f(a)$ y l la función no es continua en a se comprende que para que la función sea continua en un punto el valor que determina la función y el límite deben ser iguales.

Estas observaciones se establecen en la siguiente:

Definición:

Una función es continua en un punto de acumulación, si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1°) El punto pertenece al dominio de la función, es decir, la función está definida en él.

2°) Tiene límite finito en ese punto.

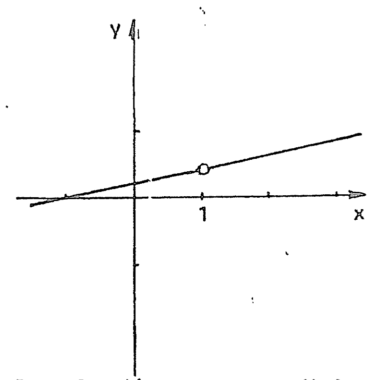
3°) El valor que determina la función en ese punto, es igual al límite en él.

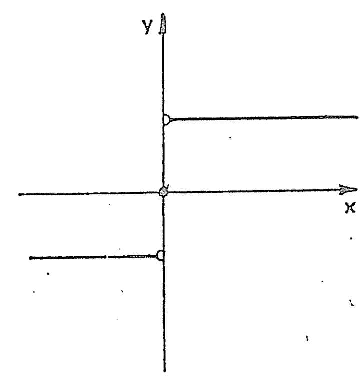
Obsérvese que las tres condiciones que exige la continuidad de la función en un punto, se expresan en la siguiente igualdad:

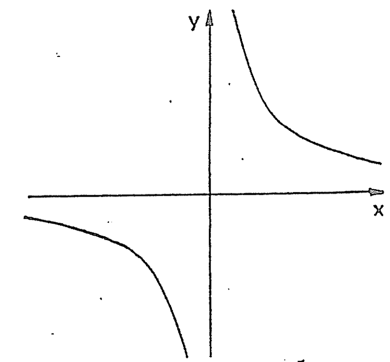
$$\boxed{f(x) \text{ es continua en } x = a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Si en un punto no se verifica alguna o algunas de las 3 condiciones anteriores, el punto se dice de discontinuidad.

Ejemplos de funciones discontinuas en un punto







La función ya estudiada $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{5x - 5}$ no es continua en el punto $x = 1$ porque no está definida en él.

La función $sg\,x$ no es continua en $x = 0$ porque no tiene límite en él.

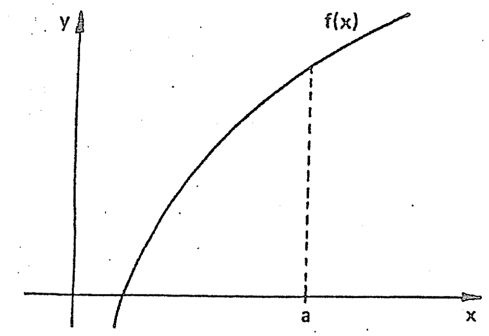
$\dfrac{(x-1)\cdot(x+1)}{5(x-1)}$ $\dfrac{2}{5}$

La hipérbola $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no es continua en $x = 0$ porque no tiene límite ni está definida en él.

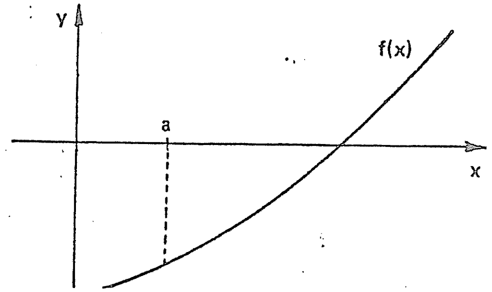
Nota: El caso en que la función no está definida en el punto, pero tiene límite en él, algunos autores la llaman de discontinuidad evitable, porque transforman la función atribuyéndole en el punto, el valor del límite. Así en el primer ejemplo anterior, a $\dfrac{x^2 - 1}{5x - 5}$ en el punto 1 le atribuyen el valor de 0,4 que es el del límite.

De acuerdo con la definición de continuidad de una función en un punto, con las propiedades de los límites y con los límites de las operaciones con funciones, resulta que:

1°)



$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } f(x) \text{ es continua} \\ \text{en } x = a \\ \text{y } f(a) > 0\end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) > 0 \text{ en un } E_a$$



$$\left.\begin{array}{l}\text{Si } f(x) \text{ es continua} \\ \text{en } x = a \\ \text{y } f(a) < 0\end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) < 0 \quad \text{en un } E_a$$

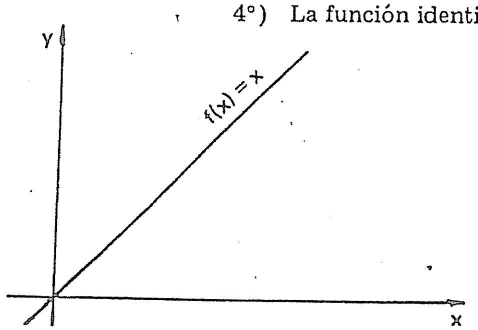
O sea: si una función continua en un punto, toma en él un valor distinto de cero, en un entorno del punto la función toma valores de igual signo que el límite.

Si una función es continua en un punto y toma en él el valor cero, nada se puede anticipar del signo de los valores de la función en un entorno reducido del mismo.

2°) La suma algebraica de dos o más funciones (en número finito) continuas en un punto es otra función continua en el punto.

3°) El producto de dos o más funciones continuas en un punto es otra función continua en ese punto.

4°) La función identidad $f(x) = x$ es continua en todos los puntos.

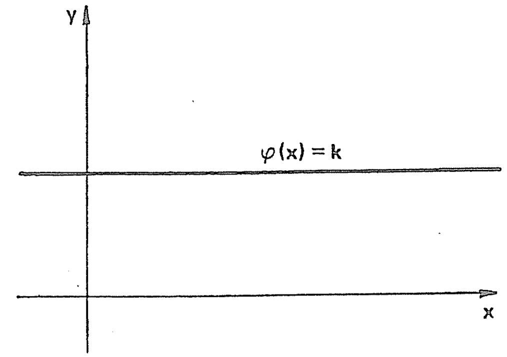


En efecto:
para

$$\left.\begin{array}{l} x = a \text{ es } f(a) = a \\ \wedge \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} x = a \end{array}\right\} \Longrightarrow f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$$

El mismo razonamiento es válido para cualquier otro punto, en consecuencia la función identidad $y = x$ es continua en todos los puntos.

5°) Toda función constante $\varphi(x) = k$ es continua en todos los puntos.



En efecto: para cualquier punto se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} \text{para } x = a \text{ es } \varphi(a) = k \\ \wedge \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to a} k = k \end{array}\right\} \begin{array}{l} \varphi(a) = \lim\limits_{x \to a} \varphi(x) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \varphi(x) = k \text{ es} \\ \text{continua en } a \end{array}$$

6°) Como consecuencia de las propiedades tercera y quinta el producto de una constante para una función continua es continua.

Es decir: si $f(x)$ es continua en a ; $kf(x)$ es continua en a .

7°) Toda función polinómica, es continua para todo valor de x .

En efecto: $f(x) = x$ se ha visto en 4° que es continua.

Por lo tanto las funciones producto

$$x \,.\, x = x^2 \qquad xxx = x^3 \quad \overbrace{x \,.\, x. \,.\,.\,.\, x}^{n} = x^n$$

son continuas por ser producto de funciones continuas.

También lo es kx^n por la propiedad sexta y también lo es la función polinómica:

$$k_0\, x^n + k_1\, x^{n-1} + k_2\, x^{n-2} + \ldots\ldots + k_{n-1}\, x + k_n$$

por ser suma de funciones continuas.

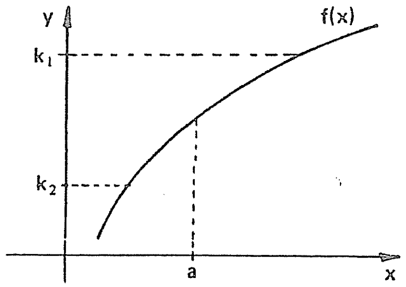
8°) El cociente de dos funciones continuas en un punto, es otra función continua en él, siempre que el valor de la función denominador en ese punto sea distinta de cero.

Como consecuencia, toda función racional $\dfrac{P_1\,(x)}{P_2\,(x)}$ es continua para toda x que no anule el denominador.

Ejemplo:

$$g(x) = \frac{2x^4 - 5x^2 + x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

Es continua para toda x excepto para $x = 2 \wedge x = 1$ porque ellos anulan el denominador



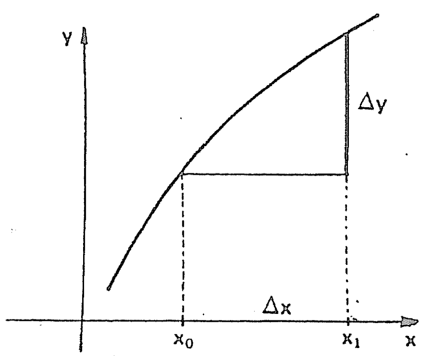
9°) Si una función es continua en un punto, está acotada en un entorno del mismo.

10°) Continuidad de la función de función o función compuesta. Si $\varphi(x)$ es continua en x_0 y $\varphi(x_0) = z_0$ si además $g(z)$ es función continua en z_0, resulta que $g[\varphi(x)]$ es continua en x_0.

Ejemplo:

$\varphi(x) = x^2$ es continua en 3 además $\varphi(3) = 9$ si $g(x) = ln\, z$ esta función es continua en $z = 9$. Luego la función compuesta $g[\varphi(x)] = ln\,(x^2)$ es continua en $x = 3$.

11°) Si la función $y = f(x)$ es continua en el punto de acumulación x_0 y se considera otro punto x_1, del dominio, la diferencia $x_1 - x_0$ se llama incremento de la variable independiente y se lo designa con



Δx, es decir
$\Delta x = x_1 - x_0$

la diferencia entre el valor $f(x_1)$ de la función en x_1 y el valor $f(x_0)$ de la función en x_0 se llama incremento de la función y se lo designa con Δy, es decir $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$

Se observa en la figura que cuando $\Delta x \to 0$ también $\Delta y \to 0$. Esta es una característica de las funciones continuas en un punto, que la destacamos, aunque está tácitamente indicada en la definición.

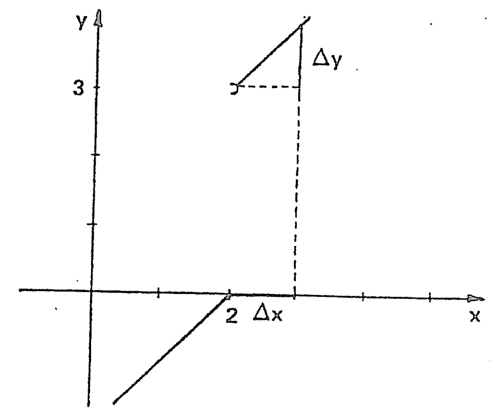
En símbolos:

$f(x)$ continua en $x_0 \Longrightarrow \Delta x \longrightarrow 0 \Longrightarrow \Delta y \longrightarrow 0$ y recíprocamente si $f(x)$ está definida en $x_0 \wedge \Delta x \longrightarrow 0 \Longrightarrow \Delta y \longrightarrow 0$ la función es continua en x_0.

Obsérvese que si la función está definida en el punto pero no es continua en él, esta propiedad no se verifica.

Ejemplo: la función

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \forall x > 2 \\ x - 2 & \forall x \leqslant 2 \end{cases}$$



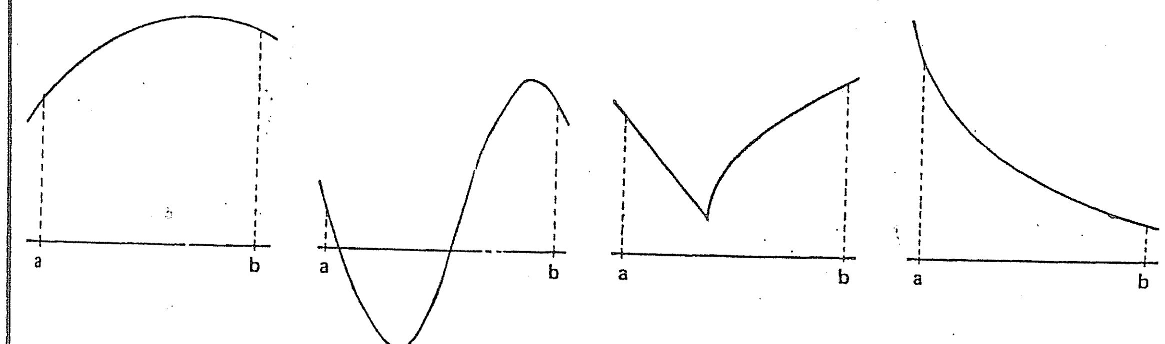
en el punto $x = 2$ por pequeño que sea Δx el Δy correspondiente nunca es menor que 3.

Función continua en un intervalo

Una función es continua en un intervalo cuando es continua en todos los puntos del intervalo.

El gráfico de una función continua en un intervalo es una curva sin cortes, sin interrupciones, sin saltos.

Ejemplos:



son gráficas de funciones continuas en los respectivos intervalos $[a\,;\,b]$.

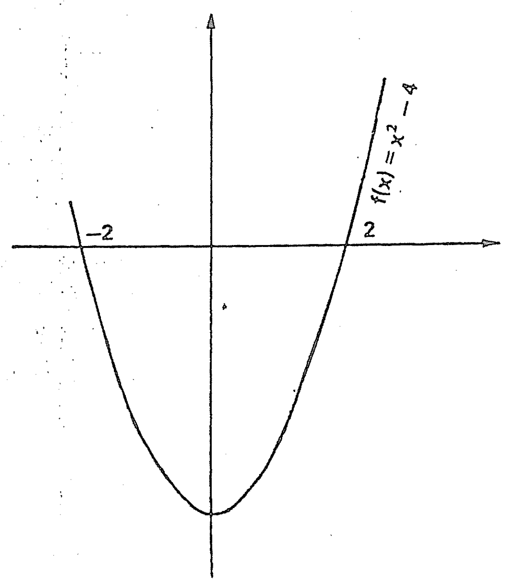
De acuerdo con la definición de continuidad y con las propiedades estudiadas resulta que las funciones *sen x* ; *cos x* ; *ln x* ; e^x son continuas en sus respectivos dominios.

Algunos autores afinan más la definición y exigen que la función sea continua en $[a^+ ; b^-]$ pero dado lo elemental de este texto aceptamos la definición dada.

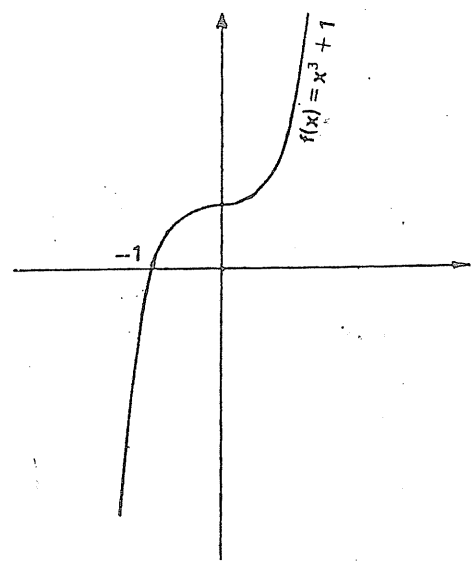
Ceros de la función continua en un intervalo

Si una función $f(x)$ es continua en un intervalo y toma el valor 0 en un punto $x = c$ dicho número c se dice que es un cero de la función $f(x)$.

Ejemplos:

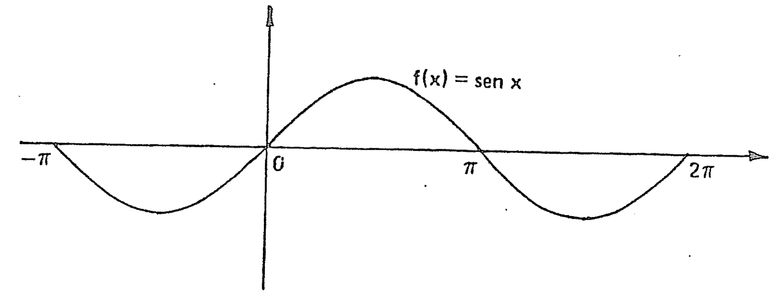


$f(x) = x^2 - 4$ tiene dos ceros que son 2 y −2 pues
$f(2) = 0$
$f(-2) = 0$



$f(x) = x^3 + 1$ tiene un cero que es −1 pues $f(-1) = 0$

la función *sen x* tiene infinitos ceros:
$-\pi$; 0; π; 2π; 3π; etc.

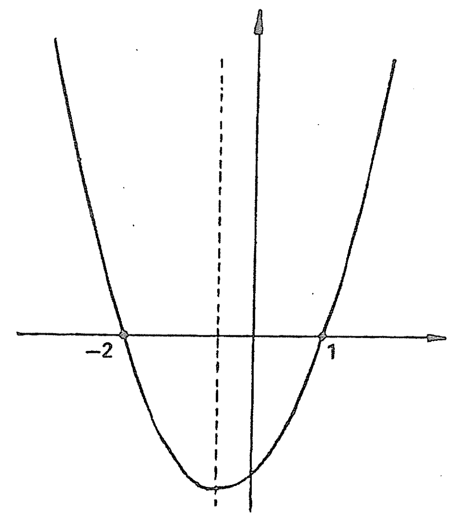


Obsérvese que en los puntos que corresponden a los ceros de la función, la curva que lo representa corta al eje x.

Nota: los ceros de la función $f(x)$ son las raíces de la ecuación que resulta al igualar a 0 la expresión $f(x)$.

Ejemplo:

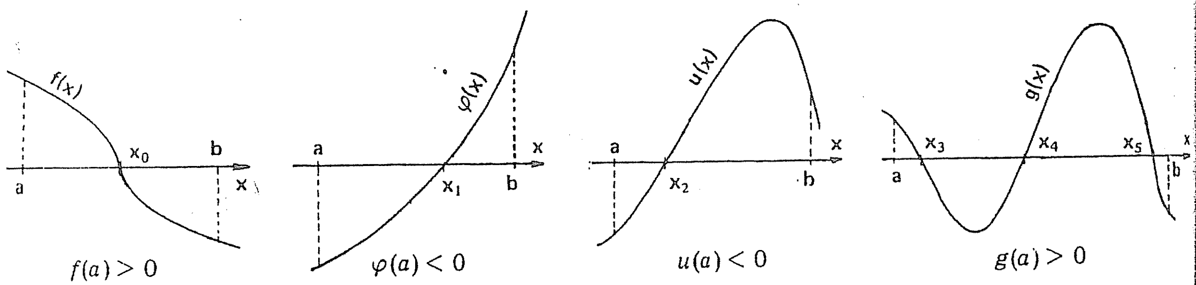
$f(x) = x^2 + x - 2$



La gráfica es la parábola de eje paralelo al eje y cuyo vértice es $V\left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$ y que corta al eje x en los puntos $x_0 = -2 \wedge x_1 = 1$ que son los ceros de la función. Pero a su vez $-2 \wedge 1$ son las raíces de la ecuación:

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{pues} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Consideramos a continuación distintos ejemplos de funciones continuas en un intervalo, que toman valores de distinto signo en los extremos del mismo, es decir que si en un extremo del intervalo la función toma un valor positivo, en el otro extremo es negativo, así:



$f(a) > 0$ $\quad$ $\varphi(a) < 0$ $\quad$ $u(a) < 0$ $\quad$ $g(a) > 0$

$f(b) < 0$ $\quad$ $\varphi(b) > 0$ $\quad$ $u(b) > 0$ $\quad$ $g(b) < 0$

Se observa en todos los casos que la curva corta el eje x por lo menos en un punto interior del intervalo, es decir hay por lo menos un punto interior del intervalo en que la función toma el valor 0. En el primer ejemplo en x_0; en el segundo en x_1; en el tercero en x_2; en el cuarto en x_3; en x_4 y en x_5.

La observación hecha en estos ejemplos es general y se enuncia en el siguiente:

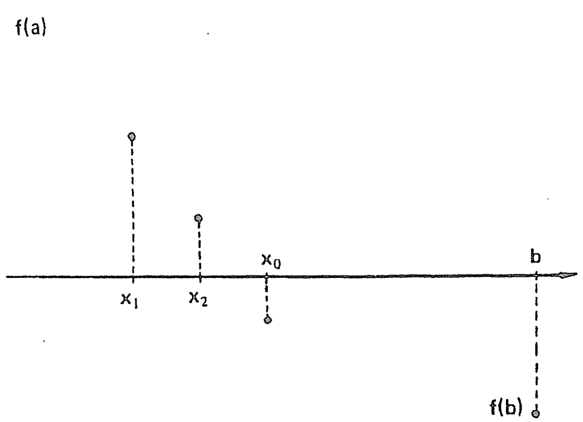
Teorema de los ceros que se llama también Teorema de Bolzano que dice así:

Si una función es continua en un intervalo y toma valores de signo contrario en los extremos del mismo, existe, por lo menos un punto interior del intervalo en que la función toma el valor cero.

En símbolos:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [a\,;\,b] \\ \text{signo de } f(a) \neq \text{signo de } f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, c \,/\, a < c < b \;\wedge\; f(c) = 0$$

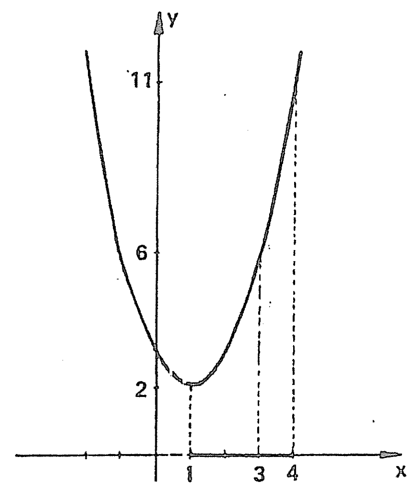
Supongamos $f(a)$ positivo, es decir $f(a) > 0$ en cuyo caso debe ser $f(b)$ negativo, es decir $f(b) < 0$.



Se determina el punto medio del intervalo, sea x_0; si en él la función es 0 el teorema está demostrado; si no es 0 debe ser $f(x_0)$ positivo o negativo. Se considera el intervalo de amplitud igual a la mitad de $[a\,;\,b]$ que tiene por extremos x_0 y el extremo del intervalo anterior en que la función tiene signo contrario, por ejemplo si $f(x_0) < 0$ se considera el intervalo $[a\,;\,x_0]$. Se determina el punto medio de este nuevo intervalo, sea x_1 otra vez, si $f(x_1) = 0$ el teorema está demostrado, si no es cero debe ser positivo o negativo, supongamos que sea positivo: $f(x_1) > 0$, en tal caso, se considera el intervalo $[x_1\,;\,x_0]$ de $\frac{1}{4}$ de la amplitud de $[a\,;\,b]$ y tal que en sus extremos la función toma valores de signo contrario. Se determina el punto medio de este intervalo, sea x_2 otra vez si $f(x_2) = 0$ el teorema está demostrado, si no es 0, se sigue el mismo proceso anterior; si en los puntos medios de los sucesivos intervalos nunca se anula la función, resulta una sucesión de intervalos cada uno contenido en el anterior, y con la propiedad que en cada uno de ellos la función toma valores de signo contrario en los extremos. Además la amplitud de cada uno es igual a la mitad de la amplitud del anterior, es decir cada vez menor amplitud a medida que aumenta el número de los mismos, o sea la amplitud tiende a 0 cuando el número de intervalos tiende a ∞; por lo tanto existe un solo punto c contenido en todos ellos. En ese punto forzosamente la función debe tomar el valor cero, es decir $f(c) = 0$, pues si $f(c)$ fuera positiva, en un E_c, $f(x)$ sería positiva y no lo es porque en los extremos de todo E_c la función toma valores de signo contrario; por la misma razón $f(c)$ no puede ser negativo; por lo tanto si $f(c)$ no puede ser ni positivo ni negativo debe ser $f(c) = 0$; es decir existe un punto c interior al intervalo en que la función toma el valor 0 que es lo que se quería establecer.

El teorema dice que existe por lo menos un punto interior del intervalo en que se anula el valor de la función, pero como se ve en la cuarta figura de los ejemplos, pueden ser 3 y a veces más.

Bernardo Bolzano nació en 1781 y murió en 1848, vale decir contemporáneo de Cauchy. Además de matemático fue profesor de Filosofía. Estudió, entre otras cosas, las propiedades de las funciones continuas y trató siempre de que sus exposiciones fueran claras y accesibles, pero sus trabajos no se divulgaron y es recién después de su muerte que se dio a su obra la importancia que tenía.



Sea la función continua $f(x) = x^2 - 2x + 3$ cuya gráfica es una parábola de eje // al eje y, y vértice $V(1;2)$.

Consideremos el intervalo $[1;4]$

En el extremo 1 es $f(1) = 2$

En el extremo 4 es $f(4) = 11$

Elijamos un número cualquiera comprendido entre 2 y 11, por ejemplo 6. Se observa que hay un punto interior del intervalo en que la función toma el valor 6; en efecto en $x = 3$ es $f(3) = 6$.

Se puede ver que cualquier otro número comprendido entre 2 y 11, lo toma como valor la función en algún punto interior del intervalo, así:

$4{,}25 \;/\; 2 < 4{,}25 < 11$ pues bien en el punto 2,5 interior el intervalo es $f(2{,}5) = 4{,}25$

$3 \;/\; 2 < 3 < 11$ pues bien en el punto 2 interior del intervalo es $f(2) = 3$.

Esta observación es general y se enuncia en el siguiente:

Teorema: Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a\,;b]$ y $f(a) \neq f(b)$ la función toma cada valor k comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ por lo menos una vez en un punto interior del intervalo.

(A este Teorema se lo llama Teorema de Cauchy.)

En símbolos:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ es continua en } [a\,;b] \\ f(a) \neq f(b) \text{ por ejemplo } f(a) < f(b) \\ \text{El número } k \,/\, f(a) < k < f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\ c \,/\, a < c < b \ \wedge \quad f(c) = k$$

La demostración es inmediata, si se emplea el teorema anterior, en efecto:

Si se considera la función:

$\varphi(x) = f(x) - k$ que es continua en $[\,a\,;b\,]$ por ser diferencia de funciones continuas

$\varphi(a) = f(a) - k < 0$ pues $f(a) < k$

$\varphi(b) = f(b) - k > 0$ pues $f(b) > k$

es decir que $\varphi(x)$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, negativo en a positivo en b luego, de acuerdo con el teorema anterior, existe un punto c interior del intervalo, en el que la función $\varphi(x)$ se anula, o sea

$$\varphi(c) = f(c) - k = 0 \iff f(c) = k$$

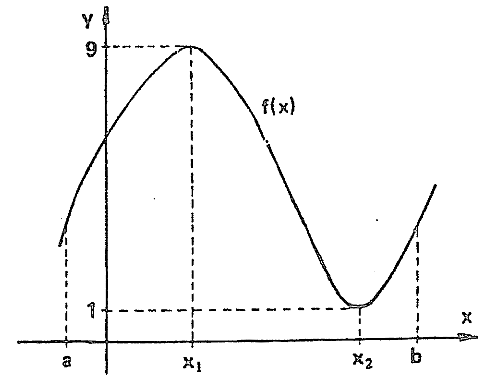
luego en el punto c interior al intervalo, la función toma el valor k y el teorema está demostrado.

La demostración es análoga si $f(a) > f(b)$.

De la definición y propiedades estudiadas, se deduce que una función continua en un intervalo, está acotada en él. Esta propiedad constituye el que se llama: primer Teorema de Weierstrass, y se ratifica al observar la gráfica de toda función continua en un intervalo, pues en ningún punto puede superar cualquier valor.

Carlos Weierstrass nació en 1815 en Westfalia, al sur de Alemania, y murió en 1898. Desde muy joven tenía tal entusiasmo por la investigación que se cuenta que era alumno pupilo y un día faltó a la clase de las 8 de la mañana; cuando fueron a buscarlo a su dormitorio, se encontraron con que había pasado toda la noche escribiendo un tema nuevo de Matemática, y no se había dado cuenta de la hora. Sus trabajos fueron conocidos a través de sus alumnos.

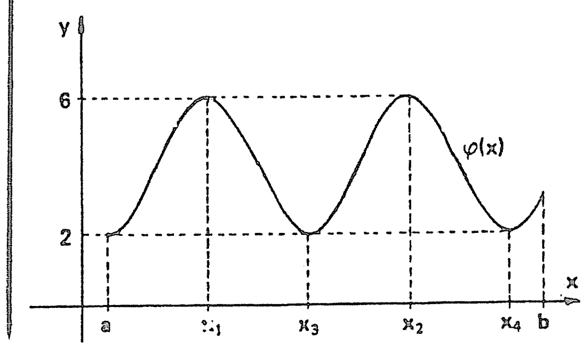
Máximos y mínimos absolutos de una función continua en un intervalo



La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a\,;\,b]$. Se observa que el valor de la función en x_1 que en este caso es $f(x_1) = 9$, es el mayor valor de los valores que determina la función en ese intervalo y por eso se llama máximo absoluto de la función en ese intervalo; en cambio en el punto x_2 es $f(x_2) = 1$ que es el menor de los valores de la función en ese intervalo, y por eso se llama mínimo absoluto de la función en ese intervalo.

En el intervalo $[a\,;b]$ hay un solo número que es máximo absoluto, por eso se dice *el* máximo absoluto; y hay un sólo número que es *el* mínimo absoluto.

A veces el máximo absoluto y el mínimo absoluto puede alcanzarlos la función, más de una vez en el intervalo; ejemplo: la función $\varphi(x)$ continua en $[a\,;\,b]$ alcanza el máximo absoluto 6 en dos puntos en x_1 y en x_2; y el mínimo absoluto 2 lo alcanzan en tres puntos: en a, en x_3 y en x_4.



Estas observaciones se establecen en el siguiente:

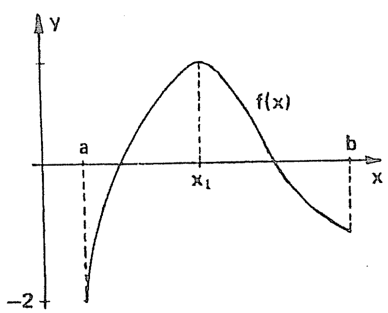
Teorema: Entre los valores que determina una función continua en un intervalo cerrado, hay uno que se llama máximo absoluto que no es superado por ningún otro, y uno que se llama mínimo absoluto que no supera a ninguno. (Este teorema que no demostramos, se llama 2° Teorema de Weierstrass.)

En símbolos:

$$f(x) \text{ es continua en } [\,a\,;b\,] \Longrightarrow \begin{cases} \exists \text{ número } M \,/\, M \geqslant f(x) \quad \forall x \in [\,a\,;b\,] \\ \\ \exists \text{ número } m \,/\, m \leqslant f(x) \quad \forall x \in [\,a\,;b\,] \end{cases}$$

NOTAS:

1°) El máximo y el mínimo absoluto de una función en un intervalo, o uno de ellos; pueden ser positivos, negativos o nulos. Ejemplos:

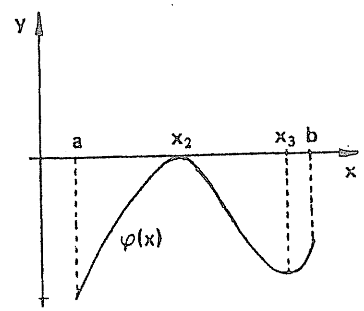


el mínimo absoluto es negativo

$f(b) = -2$

el máximo absoluto es positivo

$f(x_1) = 1{,}5$

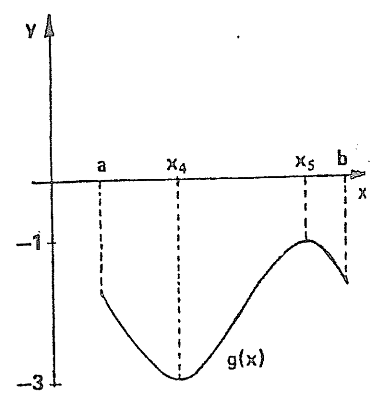


el máximo absoluto es 0

$\varphi(x_2) = 0$

el mínimo absoluto es negativo

$\varphi(a) < 0$



el máximo absoluto es negativo

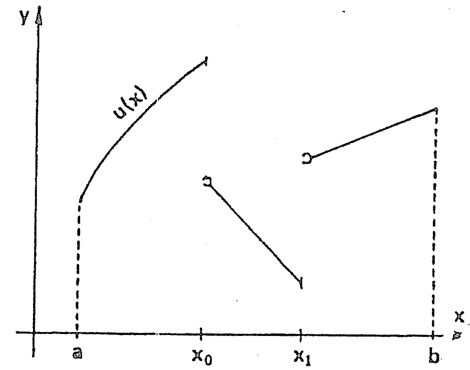
$g(x_5) = -1$

el mínimo absoluto es negativo

$g(x_4) = -3$

2°) Si la función es constante, toma valores iguales en todos los puntos del intervalo, en ese caso el máximo y el mínimo absoluto, se consideran coincidentes con el valor de la función.

3°) Si la función no es continua, pero está definida en todos los puntos del intervalo, son válidas las definiciones de máximo y de mínimo absoluto.



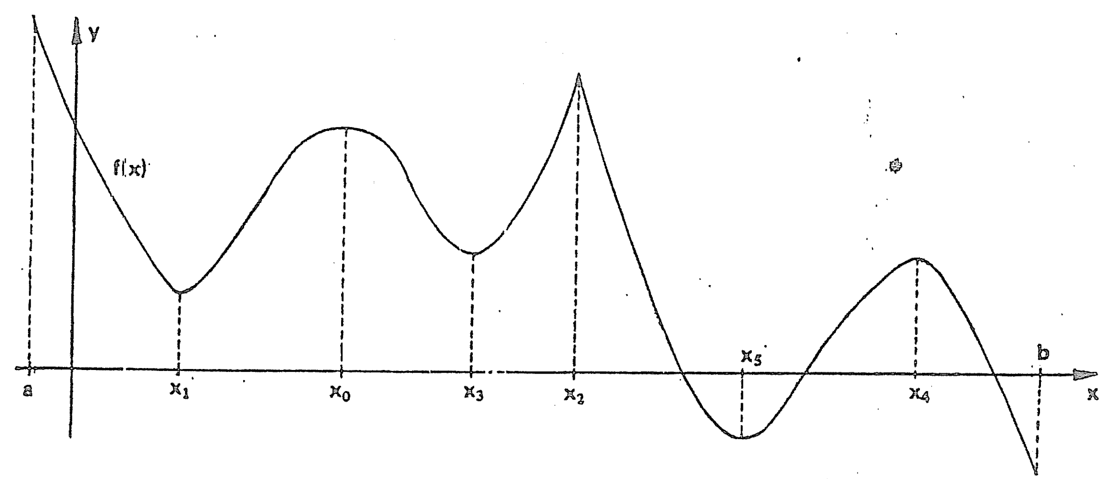
Ejemplo: la función $u(x)$ no es continua en $[\,a\,;\,b\,]$ pero está definida en todos los puntos, alcanza el máximo absoluto en x_0 y el mínimo absoluto en x_1.

Máximos y mínimos relativos o locales

Se dice que una función alcanza en un punto de su dominio, un máximo relativo o local cuando el valor de la función en dicho punto es el mayor de los que toma en un entorno del mismo.

En símbolos: $f(x_0)$ es un máximo relativo de $f(x) \iff f(x_0) > f(x) \;\forall x \,/\, x \in E'_{\delta x_0}$

Ejemplo



En x_0, x_2, x_4 la función alcanza un máximo relativo.

Análogamente, se dice que una función alcanza en un punto un mínimo relativo o local, cuando el valor que determina la función en dicho punto, es el menor de los valores que toma en un entorno del mismo.

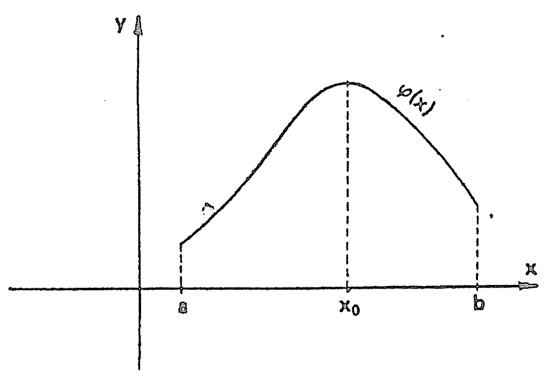
En símbolos: $f(x_1)$ es un mínimo relativo de $f(x) \iff f(x_1) < f(x) \quad \forall x \in E'_{x_1}$

La función de la gráfica anterior alcanza mínimos relativos en los puntos x_1, x_3, x_5.

Estos máximos y mínimos se llaman relativos o locales, porque se consideran valores de la función, en puntos vecinos, próximos al punto considerado; en otros más alejados puede ocurrir que la función tome valores mayores que los máximos relativos y menores que los mínimos relativos, como ocurre en el caso de la figura anterior que en el extremo a es $f(a)$ mayor que cualquiera de los máximos relativos, y en el extremo b es $f(b)$ menor que cualquier mínimo relativo.

Observación: cuando el máximo absoluto lo alcanza la función en un punto interior del intervalo es a la vez máximo relativo.

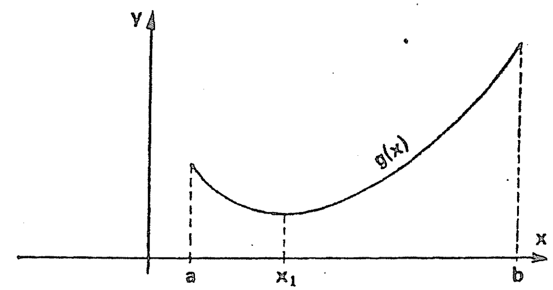
Ejemplo:



La función $\varphi(x)$ alcanza el máximo absoluto en el punto x_0 interior de $[a\ b]$ y se ve que es a la vez máximo relativo. En cambio, el mínimo absoluto lo alcanza en el extremo a del intervalo y no se sabe si es relativo o no.

Análogamente, cuando el mínimo absoluto lo alcanza la función en un punto interior del intervalo, es a la vez mínimo relativo.

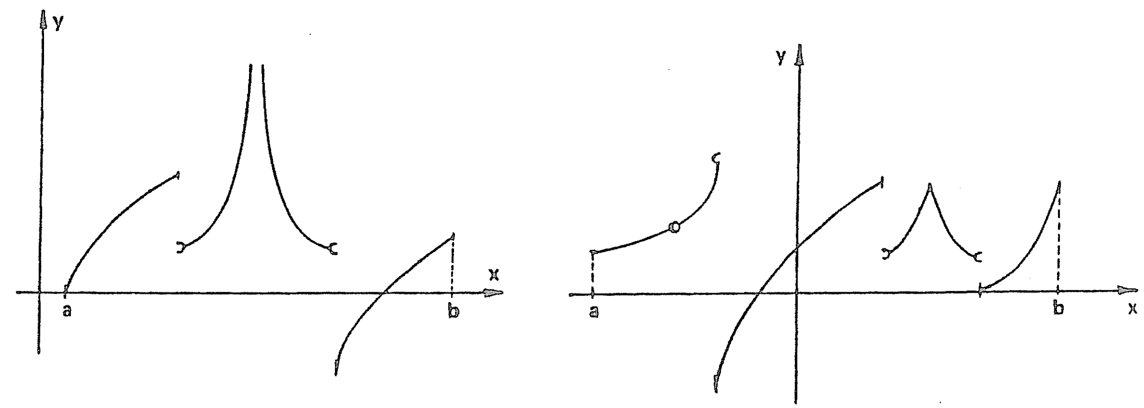
Ejemplo:



El mínimo absoluto en el intervalo $[a\ b]$ lo alcanza la función $g(x)$ en el punto interior x_1 y se ve que es a la vez mínimo relativo. En cambio, el máximo absoluto lo alcanza en el extremo b y no se puede decir si es máximo relativo o no.

Ejercicios de aplicación

1°) Indicar sobre el eje x en qué puntos son discontinuas cada una de las siguientes funciones:



2°) Decir si tienen puntos de discontinuidad, cada una de las siguientes funciones y en tal caso, indicar cuáles son:

$f(x) = sg\,x \qquad \varphi(x) = tg\,x \qquad g(x) = E(x) \qquad w(x) = mant.\ x$

$f(x) = sen\,x \qquad v(x) = |x| \qquad \varphi(x) = \dfrac{9x}{x-1}$

3°) Indicar cuáles son los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^3 - 7x^2 + 12x}$$

Esta función racional es discontinua, en los puntos en que se anula el denominador, siempre que en ellos no se anule el numerador; o sea en los que son raíces de la función:

$$x^3 - 7x^2 + 12x = 0$$

se saca x factor común

$$x(x^2 - 7x + 12) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$

es decir que la función es discontinua en los tres puntos 0; 3; 4; porque en ellos se anula el denominador y no el numerador.

Indicar cuáles son los puntos de discontinuidad de cada una de las siguientes funciones:

4°) $g(x) = \dfrac{x^4 + 6x^2 - 3x + 1}{x^2 - 5x + 6}$ Rta.: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

5°) $\varphi(x) = \dfrac{x + 7}{x^2 - 3x - 4}$ Rta.: $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

6°) $u(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 1}{x^3 - 6x^2 + 8}$ Rta.: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

7°) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ Rta.: $\{x = 1$

8°) $\varphi(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 - 1}$ Rta.: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

9°) $f(x) = \dfrac{3x}{(2x - 1)^2}$ Rta.: $\left\{x = \dfrac{1}{2}\right.$

10°) $f(x) = \dfrac{x + 2}{(3x - 1)^3}$ Rta.: $\left\{x = \dfrac{1}{3}\right.$

11°) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + x}$ Rta.: el denominador

$$x^2 + x = x(x + 1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

el número -1 hay que eliminarlo pues en él se anula el numerador. El punto de discontinuidad es $x = 0$ pues en él no se anula el numerador.

12°) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$ Rta.: $\{x = 2$

13°) $\varphi(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x(x + 1)}$ Rta.: $\{x = 0$

14°) $g(x) = \dfrac{x + 4}{e^x - e^{-x}}$ Rta.: $\{x = 0$

15°) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$ Rta.: $x = 0$

16°) $\varphi(x) = \dfrac{9}{e^{2x} - 1}$ Rta.: $x = 0$

17°) $g(x) = \dfrac{3}{2e^{3x} - 2}$ Rta.: $x = 0$

18°) $f(x) = \dfrac{2x + e^x}{e^x - 1}$ Rta.: $x = 0$

19°) $f(x) = \dfrac{x + 1}{e^{2x} - e^{-2x}}$ Rta.: $x = 0$

20°) $f(x) = \dfrac{1}{sen\, x}$ Rta.: $x = 0\,;\pi\,;2\pi\,;3\pi$; etc.

21°) $f(x) = \dfrac{1}{cos\, x}$ Rta.: $x = \dfrac{\pi}{2};\ 3\,\dfrac{\pi}{2};\ 5\,\dfrac{\pi}{2}$; etc.

Escribir una función continua en todos los puntos, excepto en:

22°) $x = 0 \quad x = -\dfrac{1}{2} \quad x = 1$

es preciso encontrar una función racional cuyo denominador tenga por raíces $0 \,;\, -\dfrac{1}{2} \,;\, 1$. De acuerdo con la descomposición de un polinomio, dicha ecuación es:

$$x\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1) = 0$$

se efectúa la multiplicación y resulta:

$$x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = 0$$

se busca un numerador que no se anule para ninguno de los tres números, ej.: $4x + 5$, luego una función solución es:

$$f(x) = \frac{4x + 5}{x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x}$$

23°) $x = 2 \;;\; x = -3$

24°) $x = -1 \;;\; x = -3 \;;\; x = 2$

25°) $x = 1 \;;\; x = -1 \;;\; x = 2 \;;\; x = -2$

26°) $x = \dfrac{1}{2} \;;\; x = 4 \;;\; x = -1$

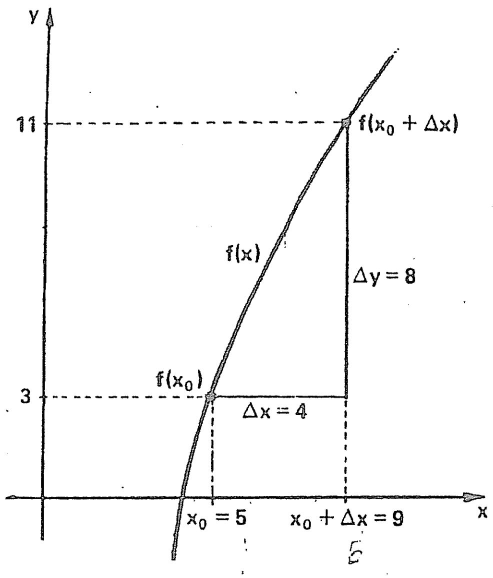
6 Derivadas

GENERALIDADES: La derivación es una de las operaciones que el Análisis Matemático efectúa con las funciones, y permite resolver numerosos problemas de Geometría, Economía, Física y otras disciplinas. Como además las reglas que aplica son muy sencillas, resulta que la derivada es uno de los capítulos más divulgados del Análisis Matemático.

RESEÑA HISTORICA: Los inventores del Cálculo Diferencial fueron los dos matemáticos: el inglés Isaac Newton que vivió entre 1642 y 1727 y el alemán Godofredo Leibniz, que ya citamos en el capítulo de funciones. Durante años se suscitó una polémica entre la Escuela Inglesa y la Alemana, sobre quién de los dos fue el primero en llegar al concepto de derivada; pero hoy se acepta que los dos, simultánea e independientemente llegaron a establecerlo; pues el estudio y la obra de tantos matemáticos anteriores habían llevado los conocimientos a un nivel que permitió a cada uno de ellos, a Leibniz para resolver problemas de Geometría, y a Newton problemas de Astronomía y de Física, a establecer las definiciones rudimentarias y reglas básicas de la derivación, sin conocer ninguno de los dos los trabajos realizados por el otro; pues hay que tener en cuenta la lentitud de los medios de comunicación de entonces.

La precisión de los conceptos fundamentales, el rigor de las definiciones y demostraciones, fueron posteriores, el avance en la investigación, en el Análisis Matemático, y en la ciencia en general, se debió al empuje y optimismo de algunos que como Juan D'Alembert, que vivió entre 1717 y 1783, ante las dificultades y escollos que se presentaban en los nuevos descubrimientos repetía siempre la frase "Allez en avant et la foi vous viendra".

A continuación estudiamos la derivada de una función en un punto, la función derivada de una función dada y las reglas del cálculo de derivación.



Si la función $f(x)$ es continua, y se considera un punto x_0 que pertenece al dominio de la función, se incrementa x_0 en un Δx tal que el punto incrementado $x_0 + \Delta x$ pertenece también al dominio, se tiene: el valor que determina la función

en x_0 es $f(x_0)$

en $x_0 + \Delta x$ es $f(x_0 + \Delta x)$

El incremento correspondiente de la función es:

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ que se designa Δy o sea:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

En el ejemplo de la gráfica:

$$x_0 = 5 \qquad f(x_0) = f(5) = 3$$
$$\Delta x = 4$$
$$x_0 + \Delta x = 9 \qquad f(x_0 + \Delta x) = f(9) = 11$$
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 11 - 3 = 8$$

Es decir, al incremento $\Delta x = 4$ de la variable independiente, le corresponde un incremento de la función $\Delta y = 8$, o sea que la función varía un promedio de 2 unidades, por cada unidad que varía x; este número 2 es lo que se llama la variación media de la función con respecto a la variación de x en el intervalo $[4\,;9]$. Esta variación media, está dada por el cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{11 - 3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

y para cada función, en general, depende del punto x_0 y del incremento Δx. Así, en el ejemplo anterior, para el mismo punto $x_0 = 5$, si se considera otro incremento $\Delta x = 2$, se tiene:

$$x_0 = 5 \qquad f(x_0) = f(5) = 3$$
$$\Delta x = 2 \qquad f(x_0 + \Delta x) = f(7) = 8$$
$$x_0 + \Delta x = 7 \qquad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 8 - 3 = 5$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$ es decir que en el intervalo $[5\,;7]$ la variación media de la función es 2,5.

Para el otro punto y otro incremento, por ejemplo:

$$x_0 = 4 \qquad f(x_0) = f(4) = 0$$
$$\Delta x = 1$$
$$x_0 + \Delta x = 5 \qquad f(x_0 + \Delta x) = f(5) = 3$$
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3 - 0 = 3$$

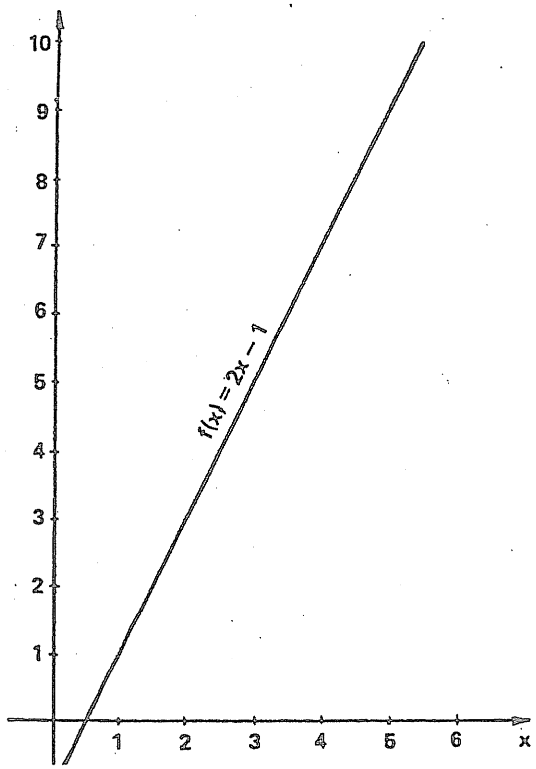
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3}{1} = 3$ es decir que en el intervalo $[4\,;5]$ la variación media de la función es 3.

El único caso en que la variación media de la función con respecto a x se mantiene constante, independientemente del punto x_0 y del incremento Δx es el de la función lineal $f(x) = p\,x + b$.

Ejemplo: $f(x) = 2x - 1$

$$x_0 = 1 \qquad f(x_0) = f(1) = 1$$
$$\Delta x = 5$$
$$x_0 + \Delta x = 6 \qquad f(x_0 + \Delta x) = f(6) = 11$$
$$\Delta y = 11 - 1 = 10$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10}{5} = 2$$



$$x_0 = 2 \qquad f(x_0) = f(2) = 3$$

$$\Delta x = 3$$

$$x_0 + \Delta x = 5 \qquad f(x_0 + \Delta x) = f(5) = 9$$

$$\Delta y = 9 - 3 = 6$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{3} = 2$$

$$x_0 = 0 \qquad f(x_0) = f(0) = -1$$

$$\Delta x = 4$$

$$x_0 + \Delta x = 4 \qquad f(x_0 + \Delta x) = f(4) = 7$$

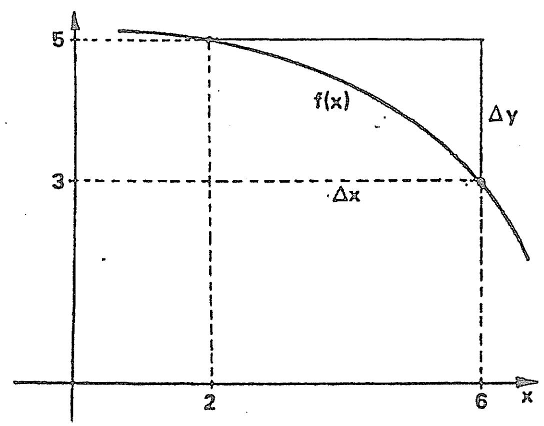
$$\Delta y = 7 - (-1) = 8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{4} = 2$$

Es decir que la variación media de esta función lineal, es siempre 2 para cualquier intervalo; en efecto, el cociente de Δy sobre Δx correspondiente, da siempre 2 que es la pendiente de la recta.

El Δx puede ser negativo y en algunos casos, el Δy resulta negativo:

Ejemplo:



$$x_0 = 2 \qquad f(x_0) = f(2) = 5$$

$$\Delta x = 4$$

$$x_0 + \Delta x = 6 \qquad f(x_0 + \Delta x) = f(6) = 3$$

$$\Delta y = 3 - 5 = -2$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2}{4} = -0{,}5$ es decir, que en el intervalo $[\,2\ ;\ 6\,]$ la variación media de esta función es negativa $-0{,}5$; a Δx positivo le corresponde Δy negativo.

Cociente incremental

El cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ se llama cociente incremental, y representa como se acaba de ver la variación media de crecimiento, o de decrecimiento de la función en el intervalo $[x_0\ ; x_0 + \Delta x]$.

Para tener una idea más aproximada de la rapidez de la variación de la función, se consideran Δx cada vez menores y la variación instantánea de la función en el punto es el límite del cociente incremental, cuando Δx tiende a 0. Este límite se llama derivada de la función en el punto.

Derivada de una función en un punto

Definición: **Se llama derivada de una función continua en un punto, al límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero.**

La derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0 se representa con cualquiera de las dos notaciones siguientes:

$$f'(x_0) \quad \text{o bien un} \quad D f(x_0)$$

De acuerdo con lo dicho:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Este límite finito es un número.

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = x^2 + 3$, y el punto $x_0 = 2$. En el siguiente cuadro, se consideran Δx cada vez más pequeños y los correspondientes cocientes incrementales.

x_0	$f(x_0)$	Δx	$f(x_0+\Delta x)$	$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
2	7	1	$f(3) = 12$	$12 - 7 = 5$	$\frac{5}{1} = 5$
2	7	0,8	$f(2{,}8) = 10{,}84$	$10{,}84 - 7 = 3{,}84$	$\frac{3{,}84}{0{,}8} = 4{,}8$
2	7	0,6	$f(2{,}6) = 9{,}76$	$9{,}76 - 7 = 2{,}76$	$\frac{2{,}76}{0{,}6} = 4{,}6$
2	7	0,4	$f(2{,}4) = 8{,}76$	$8{,}76 - 7 = 1{,}76$	$\frac{1{,}76}{0{,}4} = 4{,}4$
2	7	0,1	$f(2{,}1) = 7{,}41$	$7{,}41 - 7 = 0{,}41$	$\frac{0{,}41}{0{,}1} = 4{,}1$
2	7	0,01	$f(2{,}01) = 7{,}0401$	$7{,}0401 - 7 = 0{,}0401$	$\frac{0{,}0401}{0{,}01} = 4{,}01$

A medida que Δx se hace cada vez menor, el cociente incremental se aproxima cada vez más al número 4; es decir que 4 es el límite del cociente incremental cuando Δx tiende a cero, o sea que el número 4 es la derivada de $f(x) = x^2 + 3$ en el punto $x_0 = 2$.

Por otra parte se llega a este mismo resultado si se aplica la definición de derivada de una función en un punto. En efecto:

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$x_0 = 2 \qquad f(x_0) = f(2) = 2^2 + 3 = 7$$

$$x_0 + \Delta x = 2 + \Delta x \qquad f(x_0 + \Delta x) = f(2 + \Delta x) = (2 + \Delta x)^2 + 3 = 4 + 4\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 3$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2 + \Delta x) - f(2) = 4 + 4\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - 7 = 4\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

Se divide por Δx $\quad \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \dfrac{4\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x$

se toma el límite: $\quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (4 + \Delta x)$

o sea: $\quad f'(x_0) = f'(2) = 4 \quad$ el mismo resultado 4, que obtuvimos según el cuadro.

Si se quiere conocer la derivada de la misma función $f(x) = x^2 + 3$ en el punto $x_0 = -1$ se aplica la definición:

$$x_0 = -1 \qquad f(-1) = (-1)^2 + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$x_0 + \Delta x = -1 + \Delta x \qquad f(-1 + \Delta x) = (-1 + \Delta x)^2 + 3 = 1 - 2\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 = 4 - 2\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$f(-1 + \Delta x) - f(-1) = 4 - 2\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 4 = -2\,\Delta x + (\Delta x)^2$$

se divide por Δx

$$\frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \frac{-2\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = -2 + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-2 + \Delta x)$$

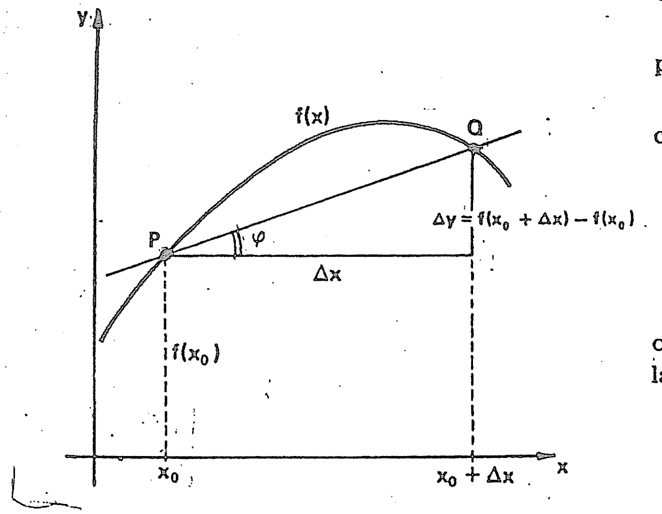
de donde $\quad f'(-1) = -2$

es decir que la derivada de la función $f(x) = x^2 + 3$ en el punto $x_0 = -1$ es el número -2.

Con igual procedimiento se puede calcular la derivada de otra función en un punto determinado.

Es conveniente insistir en que **la derivada de una función en un punto es un número.** Este número depende en general de la función y del punto elegido.

A continuación se considera la interpretación geométrica de este número. Sea $f(x)$ una función continua que admite derivada en x_0 ; a x_0 le corresponde el punto P de la curva.



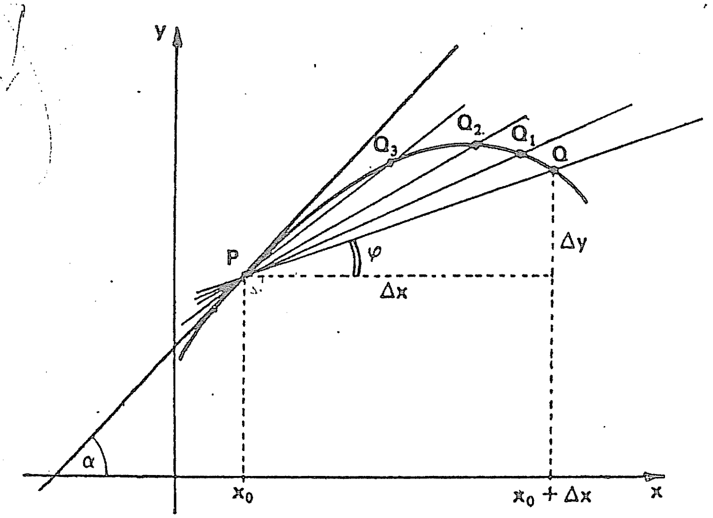
Se considera Δx; a $x_0 + \Delta x$ le corresponde el punto Q.

Se traza la recta PQ secante a la curva. El cociente incremental es la tangente del ángulo φ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = tg\ \varphi$$

o sea, que el cociente incremental es la pendiente de la recta secante PQ.

Cuando Δx se hace más pequeño, el punto Q se aproxima a P, pasa por las distintas posiciones Q_1 ; Q_2 ; Q_3 . Se tiene así, un haz de rectas, una sucesión de secantes que todas pasan por el punto P. Cuando $\Delta x \longrightarrow 0$ la posición límite de estas rectas secantes es la de la tangente a la curva en P, que se destaca en trazo más grueso en la figura y que determina el ángulo α con el semieje positivo x.



Por lo tanto, el límite del cociente incremental cuando $\Delta x \longrightarrow 0$ o sea la derivada en x_0 es un número que mide la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P.

Luego: si la derivada de una función en un cierto x_0 es cero, quiere decir que la recta tangente a la curva en el punto correspondiente a x_0, tiene pendiente cero, es paralela al eje x. Si la derivada es 1, la recta tangente tiene pendiente 1, o sea determina con el semieje positivo x un ángulo de 45°. Si la derivada es -1, la recta tangente a la curva tiene pendiente -1, o sea determina con el semieje positivo x un ángulo de 135°.

Como consecuencia: **si hay derivada de una función para un determinado x, hay tangente a la curva en el punto correspondiente y recíprocamente.**

Pues el problema del Análisis Matemático de la determinación de la derivada de una función en un punto, es equivalente al problema geométrico de determinar la tangente a la curva en el punto correspondiente.

Observaciones:

1°) **Si una función tiene derivada en un punto es continua en él.**

En efecto, si existe $f'(x_0)$ es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \epsilon \ / \ \underset{\text{cuando } \Delta x \to 0}{\epsilon \longrightarrow 0}$$ de acuerdo con la definición de límite.

se pasa Δx al segundo miembro: $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \epsilon \cdot \Delta x$

se toma límite para $\Delta x \longrightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f'(x_0) \cdot \Delta x \right] + \lim_{\Delta x \to 0} \left[\epsilon \cdot \Delta x \right]$$

el segundo miembro es cero, pues: $[f'(x_0) \cdot \Delta x] \longrightarrow 0$ dado que es el *producto del número* $f'(x_0)$ por $\Delta x \longrightarrow 0$ y $[\epsilon \cdot \Delta x] \longrightarrow 0$ dado que es el producto de dos factores que $\longrightarrow 0$ cuando $\Delta x \longrightarrow 0$.

Luego:

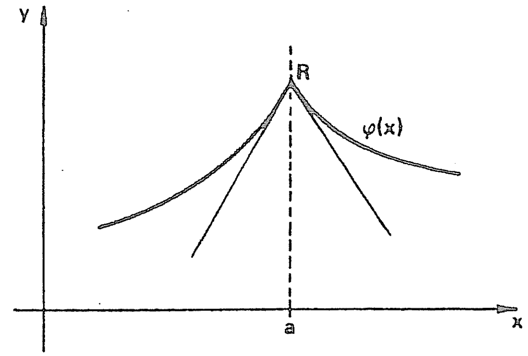
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

que establece que el incremento Δy de la función tiende a 0, cuando el incremento Δx de la variable independiente tiende a 0; y esta condición, como ya se ha visto, es suficiente para que una función definida en un punto sea continua en él.

Pero la recíproca no es cierta, es decir:

2°) No basta que una función sea continua en un punto para que tenga derivada en él.

Por ejemplo, la función $\varphi(x)$ del gráfico tiene un punto cuspidal R para $x = a$, es continua en él, pero en ese punto no hay derivada porque el límite del cociente incremental para $\Delta x \longrightarrow 0$ por la derecha y por la izquierda son distintos; y así se observa en el gráfico, ya que el arco de curva de la izquierda de R y el de la derecha tienen tangentes distintas en ese punto.



RESEÑA HISTORICA: Durante mucho tiempo se admitió que toda función continua tenía derivada en cada uno de sus puntos; esto se debió a que así ocurre con las funciones más simples que fueron las primeras que se estudiaron. Es Carlos Weierstrass, que en 1861 descubre el primer ejemplo de función continua que no admite derivada.

3°) Para el caso en que el límite del cociente incremental por la derecha para $\Delta x \longrightarrow 0$, es distinto al límite por la izquierda, se generaliza el concepto de derivada y se define derivada por la derecha a una y derivada por la izquierda a la otra; la existencia de derivada en el punto implica la igualdad de las dos.

Cuando el límite es infinito se dice que la derivada en ese punto es infinita.

Función derivada

Hasta ahora se ha considerado la derivada de una función en un punto. En los problemas, en general, es necesario conocer la derivada de la función en distintos puntos; para cada uno de ellos sería necesario rehacer todo el proceso que se indicó en la función $f(x) = x^2 + 3$ para obtener

la derivada en $x_0 = 2$; $x_0 = 1$. Este proceso es largo y para otras funciones resulta mucho más complejo. Se reduce el cálculo considerando la:

Función derivada: dada la función continua $f(x)$, la función derivada de ella es $f'(x)$, tal que, para cada punto x_0 que pertenece al dominio de $f(x)$, queda determinado un único valor $f'(x_0)$.

Se define como el límite del cociente incremental para un x cualquiera del dominio, cuando $\Delta x \longrightarrow 0$.

La función derivada de $f(x)$, se indica con las notaciones $f(x)$ o bien $D f(x)$, luego:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

A veces, por comodidad en la escritura, a Δx se la designa con h, en tal caso:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}}$$

Si se designa $y = f(x)$, la función derivada también se expresa:

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Una vez que se tiene la función derivada, se puede determinar el valor de la derivada en un punto cualquiera. Así, la función que ya se consideró: $f(x) = x^2 + 3$ tiene como función derivada, según se justificará más adelante: $f'(x) = 2x$.

La derivada en $x_0 = 2$ es $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$

La derivada en $x_0 = -1$ es $f'(-1) = 2(-1) = -2$

Valores que coinciden con los obtenidos anteriormente.

A toda función que tiene función derivada, se le dice derivable y según ya se vio, es continua.

Función derivada de cada una de las funciones más usuales

De acuerdo con la definición, el camino a seguir para obtener la derivada de una función $f(x)$ es:

Se determina $f(x+\Delta x)$ se le resta $f(x)$ y se tiene así el numerador del cociente incremental. Se divide por Δx, se efectúan todas las simplificaciones posibles y por último se calcula el límite para $\Delta x \longrightarrow 0$.

1°) Si $f(x) = x^n$, n es natural, la derivada es $D\,x^n = n\,x^{n-1}$

En este caso se adopta h en vez de Δx porque facilita la escritura.

Demostración:

$$f(x) = x^n$$

$$f(x+h) = (x+h)^n \qquad \text{Se resta de la segunda la primera}$$

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^n - x^n \qquad \text{Se desarrolla } (x+h)^n \text{ de acuerdo con la regla de Newton}$$

$$f(x+h) - f(x) = x^n + n\,x^{n-1}\,h + \frac{n(n-1)}{2!}\,x^{n-2}\,h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,x^{n-3}\,h^3 + \ldots\ldots + h^n - x^n$$

se anulan los términos x^n y $-x^n$ y se tiene:

$$f(x+h) - f(x) = n\,x^{n-1}\,h + \frac{n(n-1)}{2!}\,x^{n-2}\,h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,x^{n-3}\,h^3 + \ldots + h^n$$

Se dividen ambos miembros por h como el segundo miembro es una suma, se divide cada término por h.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = n\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\,x^{n-2}\,h + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,x^{n-3}\,h^2 + \ldots\ldots + h^{n-1}$$

Se toma el límite para $h \longrightarrow 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = n\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\,x^{n-2} \lim_{h\to 0} h + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,x^{n-3} \lim_{h\to 0} h^2 + \ldots\ldots + \lim_{h\to 0} h^{n-1}$$

En el segundo miembro, el límite del segundo, tercero, etc. términos es 0, pues en cada uno aparece el factor h que tiende a 0. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = n\,x^{n-1} \\ \text{de acuerdo con la definición} \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$$

Como $f(x) = x^n$ es $f'(x) = D\,x^n$, por lo tanto:

$$\boxed{D\,x^n = n\,x^{n-1}}$$ que es lo que se quería demostrar.

Ejemplos:

$D\,x^5 = 5\,x^4$

$D\,x^8 = 8\,x^7$

$D\,x^2 = 2\,x$

Observación: esta demostración es válida para n natural, pero se verá luego que la fórmula es aplicable también cuando n es un número entero o fraccionario.

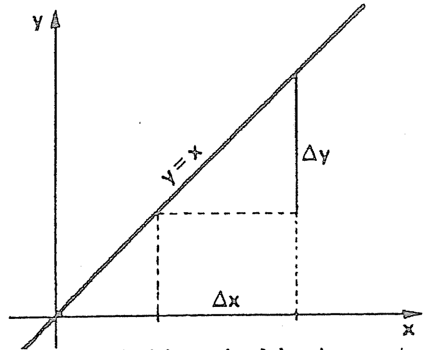
2°) Si se trata de la función identidad $f(x) = x$ es $\boxed{D\,x = 1}$

En efecto:

Analíticamente:

$$f(x) = x$$
$$f(x+\Delta x) = x + \Delta x$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x$$
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 1$$

Gráficamente:



La gráfica es la bisectriz del primer y tercer cuadrante, por consiguiente en cualquier punto $\Delta y = \Delta x$, en consecuencia el cociente incremental es siempre 1.

Es decir que la función $f(x) = x$ tiene como derivada 1 en todos los puntos. Por otra parte $f(x) = x$ es el caso particular x^n cuando $n = 1$; se aplica la regla $D\,x^n = n\,x^{n-1}$ y se tiene:

$D\,x = 1\,x^0 = 1 \,.\, 1 = 1$ el mismo resultado anterior.

3°) Si $f(x) = \sqrt{x}$ es $f'(x) = D\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Demostración:

$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x}$$

se resta de la segunda la primera

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$$

se dividen ambos miembros por Δx

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

se observa que si se toma límite para $\Delta x \longrightarrow 0$, en el segundo miembro aparece la indeterminación $\dfrac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$ para evitarla se multiplica y divide por $\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}$, que es la conjugada del numerador, luego:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

en el numerador la suma por la diferencia es la diferencia de los cuadrados

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(\Delta x\,\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{\cancel{x} + \cancel{\Delta x} - \cancel{x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}$$

o sea:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

se toma límite para $\Delta x \longrightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}}$$

El primer miembro es por definición $f'(x)$ luego:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\[2ex] \text{Como } f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = D\sqrt{x} \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

que es lo que se quería demostrar.

Observación: Como $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ si se acepta la regla $D\,x^n = n\,x^{n-1}$ se tiene: $D\sqrt{x} = D\,x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\,x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

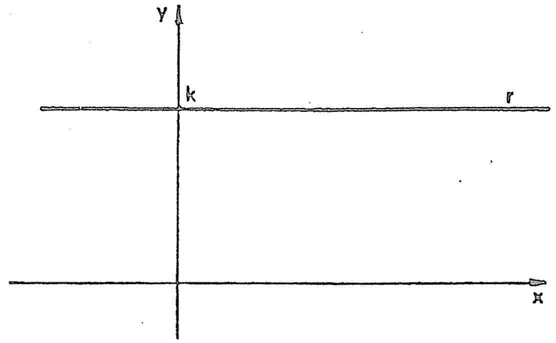
el mismo resultado anterior. Vale decir que hemos probado que la regla es válida para $n = \dfrac{1}{2}$.

4°) La derivada de una función constante es cero

Analíticamente

$$f(x) = k$$
$$f(x+\Delta x) = k$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = k - k = 0$$
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 0 \quad \text{o sea}$$
$$f'(x) = 0$$

Gráficamente



La gráfica es una recta r paralela al eje x. En cualquier punto y para cualquier Δx resulta $\Delta y = 0 \Longrightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$

Además la tg a la gráfica en cada punto es la misma recta r de pendiente 0.

Luego, la derivada de la función constante es 0, es decir

$$\boxed{D\,k = 0}$$

Ejemplos:

$$D\,5 = 0 \quad ; \quad D\,(-8) = 0 \quad ; \quad D\,\frac{2}{3} = 0$$

5°) La derivada del producto de una constante por una función, es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

Si el número o constante lo designamos con k y la función es $\varphi(x)$, vamos a demostrar que: $D\;[\,k\,\varphi(x)\,] = k\,.\,\varphi'(x)$.

Demostración:

$$f(x) = k\,.\,\varphi(x)$$
$$f(x+\Delta x) = k\,.\,\varphi(x+\Delta x)$$

$f(x+\Delta x) - f(x) = k\,.\,\varphi(x+\Delta x) - k\,\varphi(x)$ se saca el factor común k

$f(x+\Delta x) - f(x) = k\,\left[\,\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\,\right]$ se divide por Δx

$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = k\,\dfrac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$ se toma el límite para $\Delta x \longrightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = k \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$$

por definición $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$ análogamente $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x)$

se reemplaza en la igualdad anterior:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = k\,.\,\varphi(x) \\ \text{Como} \quad f(x) = k\,\varphi(x) \Longrightarrow f'(x) = D\;[\,k\,\varphi(x)\,] \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{D\;[\,k\,.\,\varphi(x)\,] = k\,.\,\varphi'(x)}$$

que es lo que se quería demostrar.

Ejemplos:

1°) $D\,5\sqrt{x} = 5\,D\sqrt{x} = 5\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$

2°) $D\,\dfrac{3}{2}\,x^4 = \dfrac{3}{4}\,D\,x^4 = \dfrac{3}{2}\,4\,x^3 = 6\,x^3$

3°) $D\,9\,x = 9\,.\,1 = 9$

4°) $D - 6\sqrt{x} = -6\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

6°) La derivada de la función $sen\ x$ es $cos\ x$

Demostración:

$$f(x) = sen\ x$$
$$f(x+\Delta x) = sen\ (x+\Delta x)$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = sen\ (x+\Delta x) - sen\ x$$

Conviene transformar en producto el segundo miembro, para ello hay que recordar que según figura en la sinopsis al final

$$sen\ p - sen\ q = 2\ cos\ \frac{p+q}{2}\ .\ sen\ \frac{p-q}{2}.$$

En nuestro caso p es $(x+\Delta x)$ y q es x.

El segundo miembro se transforma:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 2\ cos\ \frac{x+\Delta x+x}{2}\ .\ sen\ \frac{x+\Delta x-x}{2}$$

se efectúan operaciones

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 2\ cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) sen\ \frac{\Delta x}{2}$$

Se divide por Δx. Como en el segundo miembro hay 3 factores, basta dividir uno de ellos, se divide el tercero.

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2\ cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{sen\ \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

Antes de tomar límite, conviene pasar el factor 2 como divisor del denominador Δx en el tercer factor, es decir:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{sen\ \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Se toma límite para $\Delta x \longrightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x\to 0} \frac{sen\ \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Sabemos que $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{sen\ x}{x} = 1$ por lo tanto $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{sen\ \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$, luego:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\ 1$$

Como el límite del coseno es el coseno del límite:

$$f'(x) = cos\ \lim_{\Delta x\to 0}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

pero $\lim\limits_{\Delta x\to 0} (x+\Delta x) = x$ por lo tanto:

$$\text{Como}\ \left.\begin{array}{l} f'(x) = cos\ x \\ f(x) = sen\ x \\ f'(x) = D\ sen\ x \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{D\ sen\ x = cos\ x}$$

7°) En forma análoga se demuestra que la derivada de la función $cos\ x$ es igual a menos $sen\ x$.

$$\boxed{D\ cos\ x = -\ sen\ x}$$

8°) La derivada de la función logaritmo natural de x es $\dfrac{1}{x}$

Demostración:

$$f(x) = ln\ x$$
$$f(x+h) = ln\ (x+h)$$
$$f(x+h) - f(x) = ln\ (x+h) - ln\ (x)$$

como $ln\ \dfrac{a}{b} = ln\ a - ln\ b$, el segundo miembro se expresa como ln de un cociente.

O sea:

$$f(x+h) - f(x) = ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$f(x+h) - f(x) = ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

se dividen ambos miembros por h que equivale a multiplicar por $\dfrac{1}{h}$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

como $ln\ a^k = k \,.\, ln\ a$ resulta

$$\frac{1}{h}\ ln\left(1+\frac{h}{x}\right) = ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$ luego,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}.$$

Para proseguir la demostración se multiplica y se divide el exponente por $\frac{1}{x}$, resulta así:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}$$

En el segundo miembro figura una potencia que tiene como exponente el producto de dos factores; se puede expresar como potencia de potencia. Es decir:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = ln\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{x}}}\right]^{\frac{1}{x}}$$

como el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base, se puede escribir el segundo miembro así:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{x}\left(ln\ \ 1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{\frac{1}{h}}{x}}$$

Se toma límite para $h \longrightarrow 0.$

$$\lim_{h\to 0}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{x}\ \lim_{h\to 0}\ ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{\frac{1}{h}}{x}}$$

pero el límite del logaritmo es el logaritmo del límite:

$$f'(x) = \frac{1}{x}\ ln\ \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{\frac{1}{h}}{x}}$$

Como $\lim\limits_{z\to 0}\ (1+z)^{\frac{1}{z}} = e$ resulta:

$$e = \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{\frac{1}{h}}{x}}$$ se reemplaza:

$$f'(x) = \frac{1}{x}\cdot ln\ e = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$$

Como
$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \\ f(x) &= ln\ x \\ f'(x) &= D\ ln\ x \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{D\ ln\ x = \frac{1}{x}}$$

9°) La derivada de la suma algebraica de un número finito de funciones derivables, es la suma algebraica de las respectivas derivadas.

Lo demostraremos para la suma de dos funciones. Sea:

$$f(x) = \varphi(x) + g(x)$$
$$f(x+\Delta x) = \varphi(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = \left[\varphi(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)\right] - \left[\varphi(x) + g(x)\right]$$

se suprimen los corchetes y reúnen los términos en φ y en g

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \left[\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)\right] + \left[g(x+\Delta x) - g(x)\right]$$ se divide por Δx

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

se toma límite para $\Delta x \longrightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\ \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\ \frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\ \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$ o sea:

$$f'(x) = \varphi'(x) + g'(x)$$

Como $f(x) = \varphi(x) + g(x) \Longrightarrow f'(x) = D\left[\varphi(x)+g(x)\right]$ $\Longrightarrow D\left[\varphi(x)+g(x)\right] = \varphi'(x) + g'(x)$

La demostración es válida para la suma de 3 o más funciones y para la diferencia; luego, queda demostrado para la suma algebraica de un número finito de funciones.

Ejercicios resueltos

1°) $D\,(x^3 + \sqrt{x} - 5\,x) = 3\,x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 5$

2°) $D\left(\dfrac{1}{3}\,x^6 + \ln x - 2\,\mathrm{sen}\,x + 4\right) = 2\,x^5 + \dfrac{1}{x} - 2\cos x$

3°) $D\,(x^2 + 3\cos x - x + 7) = 2\,x - 3\,\mathrm{sen}\,x - 1$

Ejercicios propuestos

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1°) $f(x) = 4\sqrt{x} + \ln x - x^3 + 3$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} - 3\,x^2$

2°) $\varphi(x) = x^2 + 3\,\mathrm{sen}\,x - 2\cos x + x$ Rta.: $\varphi'(x) = 2\,x + 3\cos x + 2\,\mathrm{sen}\,x + 1$

3°) $f(x) = \dfrac{1}{3}\,x^3 + 2\,x^2 - 0{,}5\,x^4 - 1$ Rta.: $f'(x) = x^2 + 4\,x - 2\,x^3$

4°) $g(x) = \cos x - \dfrac{1}{2}\sqrt{x} + \pi\,x + \dfrac{2}{3}$ Rta.: $g'(x) = -\,\mathrm{sen}\,x - \dfrac{1}{4\sqrt{x}} + \pi$

5°) $f(t) = 3\ln t + \ln 2 - \dfrac{1}{8}\,t^4 + \dfrac{1}{3}\,t^5$ Rta.: $f'(t) = \dfrac{3}{t} - \dfrac{1}{2}\,t^3 + \dfrac{5}{3}\,t^4$

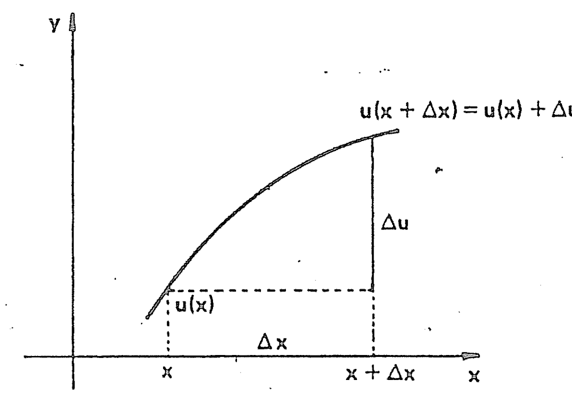
6°) $\varphi(x) = \pi - \mathrm{sen}\,x + x\,.\,\ln 3 - \dfrac{3}{4}\sqrt{x}$ Rta.: $\varphi(x) = -\cos x + \ln 3 - \dfrac{3}{8\sqrt{x}}$

10°) La derivada del producto de dos funciones es igual al producto de la derivada de la primera función por la segunda sin derivar, más el producto de la derivada de la segunda por la primera sin derivar.

Demostración:

Sean $u(x)$ y $v(x)$ dos funciones derivables, en consecuencia continuas, es costumbre escribir u y v para abreviar en vez de $u(x)$ y $v(x)$.

Como $u(x)$ es continua su gráfica es una curva



$$f(x) = u\,.\,v$$
$$f(x + \Delta x) = (u + \Delta u)\,.\,(v + \Delta v)$$
$$f(x + \Delta x) - f(x) = (u + \Delta u)\,.\,(v + \Delta v) - u\,v$$

Análogamente $v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v$

Se efectúa la multiplicación indicada en el segundo miembro:

$f(x + \Delta x) - f(x) = \cancel{u\,v} + \Delta u\,.\,v + u\,.\,\Delta v + \Delta u\,.\,\Delta v - \cancel{u\,.\,v}$ que es cómodo escribir

$f(x + \Delta x) - f(x) = v\,.\,\Delta u + u\,.\,\Delta v + \Delta u\,.\,\Delta v$ Se dividen ambos miembros por Δx

$\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = v\,.\,\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + u\,.\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\,\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$ Se toma límite para $\Delta x \longrightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = v\,.\,\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u\,.\,\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u\,.\,\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Así como $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ es $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = u'$ es $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = v'$, además como $u(x)$ es derivable y en consecuencia continua: es $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$ como se ratifica en la figura anterior.

Luego:

$$f'(x) = v \,.\, u' + u \,.\, v' + 0 \,.\, v' \quad \text{el tercer término es 0, por lo tanto}$$

$$\left.\begin{array}{ll} f'(x) & = u'v + v'u \\ \text{Dado que} \quad f(x) & = u \,.\, v \;\Rightarrow\; f'(x) = D[u \,.\, v] \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{D[u \,.\, v] = u'v + v'u}$$

Ejercicios resueltos

1°) $D(x^4 \,.\, \text{sen}\, x) = 4x^3 \,.\, \text{sen}\, x + \cos x \,.\, x^4 = x^3 (4\, \text{sen}\, x + x \cos x)$

2°) $D(x^5 \,.\, \ln x) = 5x^4 \,.\, \ln x + \dfrac{1}{x}\, x^5 = 5x^4 \,.\, \ln x + x^4 = x^4 (5 \ln x + 1)$

3°) $D(\cos x \,.\, \sqrt{x}) = -\text{sen}\, x \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x$

Esta regla de la derivada del producto de dos funciones, se generaliza para tres o más. Siempre la derivada del producto de dos o más funciones en número finito, es igual a la suma de los productos de la derivada de cada una de ellas por las otras sin derivar. Así, para el caso particular de la derivada del producto de 3 funciones derivables, se tiene:

$$\boxed{D[u \,.\, v \,.\, w] = u' \,.\, v \,.\, w + v' \,.\, u \,.\, w + w' \,.\, u \,.\, v}$$

Ejercicio resuelto

$$D(x^3 \,.\, \text{sen}\, x \,.\, \ln x) = 3x^2 \,.\, \text{sen}\, x \,.\, \ln x + \cos x \,.\, x^3 \,.\, \ln x + \frac{1}{x}\, x^3 \,.\, \text{sen}\, x$$

Ejercicios propuestos

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones

1°) $f(x) = x^3 \,.\, \ln x$ — Rta.: $x^2\, (3 \ln x + 1)$

2°) $\varphi(x) = x^2 : \cos x$ — Rta.: $x\, (2 \cos x - x\, \text{sen}\, x)$

3°) $g(x) = \text{sen}\, x \,.\, \cos x$ — Rta.: $\cos x \,.\, \cos x + \text{sen}\, x\, (-\text{sen}\, x) = \cos 2x$

4°) $f(x) = \ln x \,.\, \sqrt{x}$ — Rta.: $\dfrac{1}{x} \sqrt{x} + \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}$

5°) $f(t) = \cos t \,.\, \sqrt{t}$ — Rta.: $\dfrac{\cos t - 2t\, \text{sen}\, t}{2\sqrt{t}}$

6°) $\varphi(x) = x^2 \,.\, \cos x \,.\, \ln x$ — Rta.: $x\, (2 \cos x \ln x - x\, \text{sen}\, x \ln x + \cos x)$

7°) $f(t) = 2t^3 \,.\, \text{sen}\, t \,.\, \cos t$ — Rta.: $2t^2\, (3\, \text{sen}\, t \,.\, \cos t + t \cos^2 t - t\, \text{sen}^2 t)$

8°) $f(x) = \text{sen}\, x \,.\, \sqrt{x} \,.\, \ln x$ — Rta.: $\cos x \,.\, \ln x \quad x + \dfrac{\text{sen}\, x \ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\text{sen}\, x \sqrt{x}}{x}$

9°) $f(x) = (2 - x)\sqrt{x}$ — Rta.: $\dfrac{(2 - 3x)}{2\sqrt{x}}$

11°) Derivada de la función de función o función compuesta.

Sea la función de función $y = f[u(x)]$

se usa también la notación $y = f \circ u$

Vamos a demostrar a qué es igual la derivada de f con respecto a x, en aquellos puntos x_n en que u es derivable y $f(u)$ es derivable en los u_n correspondientes.

La derivada de $y = f(u)$ con respecto a u es:

$\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$ de acuerdo con la definición de límites es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \epsilon \;/\; \epsilon \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta u \longrightarrow 0$$

Se pasa Δu como factor

$\Delta y = f'(u) \,.\, \Delta u + \epsilon \,.\, \Delta u$ se dividen ambos miembros por Δx

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \epsilon \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ Se toma límite para $\Delta x \longrightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u) \,.\, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \epsilon \,.\, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \epsilon = 0$ pues $u(x)$ es continua, por lo tanto $\Delta x \longrightarrow 0 \Rightarrow \Delta u \longrightarrow 0$
y como $\epsilon \longrightarrow 0$ cuando $\Delta u \longrightarrow 0$ resulta que $\epsilon \longrightarrow 0$ cuando $\Delta x \longrightarrow 0$
Reemplazando los límites en la igualdad anterior se tiene:

$y' = f'(u) . u' + 0 . u'$ pero y' es la derivada de $y = f(x)$ con respecto a x, luego:

$$\boxed{f'(x) = f'(u) \,.\, u'}$$

Es decir: para hallar la derivada de $f[u(x)]$ con respecto a la variable independiente x se deriva f con respecto a u y ese resultado se multiplica por la derivada de u.

Ejercicios resueltos:

1°) $f(x) = \ln (x^2 + 1)$ la función f es $\ln$, la función u es $x^2 + 1$

luego $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}\, 2x = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

2°) $f(x) = \sqrt{x^4 + sen\, x + 2}$ la función f es $\sqrt{\;}$; la función u es $(x^2 + sen\, x + 2)$

luego $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^4 + sen\, x + 2}} \,(4x^3 + \cos x)$

3°) $f(x) = sen^2\, x$ f es la segunda potencia y u es $sen\, x$
$f'(x) = 2\, sen\, x \,.\, \cos x$

4°) $f(x) = sen\, 2x$ f es la función sen; u es $2x$
$f'(x) = \cos 2x \,.\, 2 = 2 \cos 2x$

La misma regla se aplica si se trata de la derivada de una función, de función de función:

$f\left\{\varphi[u(x)]\right\}$ la derivada de f con respecto a x es

$$f'(x) = f'(\varphi) \,.\, \varphi'(u) \,.\, u'(x)$$

Se le suele llamar **derivada en cadena**

Ejemplo:

$f(x) = \left[sen\,(5x^2 + 1)\right]^4$ f es la cuarta potencia; φ es el sen; u es $(5x^2 + 1)$

$f'(x) = 4\left[sen\,(5x^2 + 1)\right]^3 . \left[\cos\,(5x^2 + 1)\right] . 10x$

Ejercicios propuestos

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1°) $f(x) = \cos 3x$ Rta.: $-3 \operatorname{sen} 3x$

2°) $\varphi(x) = 5 \operatorname{sen} 4x$ Rta.: $20 \cos 4x$

3°) $f(x) = \operatorname{sen}(x^3 + 2)$ Rta.: $3x^2 \cos(x^3 + 2)$

4°) $g(x) = \cos(2x + 3)$ Rta.: $-2 \operatorname{sen}(2x + 3)$

5°) $f(x) = \cos(1 - x)$ Rta.: $\operatorname{sen}(1 - x)$

6°) $\varphi(x) = \operatorname{sen}(1 - 3x)$ Rta.: $-3 \cos(1 - 3x)$

7°) $f(x) = \sqrt{x^2 + \cos 2x + 2}$ Rta.: $\dfrac{x - \operatorname{sen} 2x}{\sqrt{x^2 + \cos 2x + 2}}$

8°) $f(t) = \sqrt{(t^3 + 3)^2 + 1}$ Rta.: $\dfrac{3t^2 (t^3 + 3)}{\sqrt{(t^3 + 3)^2 + 1}}$

9°) $f(x) = \ln(3x^2 + 2)$ Rta.: $\dfrac{6x}{3x^2 + 2}$

10°) $\varphi(t) = \ln(\operatorname{sen} 2t + 3)$ Rta.: $\dfrac{2 \cos 2t}{\operatorname{sen} 2t + 3}$

11°) $g(x) = \ln(x^4 + \cos^2 x)$ Rta.: $\dfrac{4x^3 - \operatorname{sen} 2x}{x^4 + \cos^2 x}$

12°) $\varphi(t) = \left(t^3 + \dfrac{1}{2} t^2\right)^3$ Rta.: $3\left(t^3 - \dfrac{1}{2} t^2\right)^2 (3t^2 - t)$

13°) $f(x) = \left[\cos(3x^2 + 2) - x\right]^2$ Rta.: $2\left[\cos(3x^2 + 2) - x\right]\left[-\operatorname{sen}(3x^2 + 2)\, 6x - 1\right]$

14°) $u(x) = \left[\sqrt{x^2 + 3} - \cos 2x\right]^4$ Rta.: $4\left[\sqrt{x^2 + 3} - \cos 2x\right]^3 \left[\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} + 2 \operatorname{sen} 2x\right]$

15°) $f(x) = (2x^2 + 1)^3 \, . \ln(1 + 2x^2)$ Rta.: $4x\,(2x^2 + 1)^2 \left[3 \ln(1 + 2x^2) + 1\right]$

16°) $\varphi(x) = (2 - 3x^2)\sqrt{1 + 4x^2}$ Rta.: $\dfrac{2x(1 - 18x^2)}{\sqrt{1 + 4x^2}}$

17°) $\varphi(x) = \operatorname{sen}^2 3x \, . (x^3 - 1)$ Rta.: $6(x^3 - 1) \operatorname{sen} 3x \cos 3x + 3x^2 \operatorname{sen}^2 3x$

18°) $f(x) = (x^2 - 1) \ln(1 + x)$ Rta.: $2x \ln(1 + x) + x - 1$

19°) $\varphi(t) = \operatorname{sen}(t^2 - 1).(t + 1)^2$ Rta.: $2(t + 1)\left[\cos(t^2 - 1)\, t\,(t + 1) + \operatorname{sen}(t^2 - 1)\right]$

Todas las reglas para obtener la derivada de operaciones con funciones, se pueden obtener aplicando la definición, pero en algunos casos resulta laborioso, entonces en un primer estudio se puede llegar a ellas aplicando la derivada de función de función y de la función logaritmo natural.

Primero, vamos a obtener mediante este procedimiento, la regla que ya conocemos para derivar el producto de 2 funciones.

Sea $y = u \, . \, v$ donde u ; v y en consecuencia y son funciones de x. Se toma $\ln$

$$\ln y = \ln u + \ln v$$

se deriva,

pero hay que tener en cuenta la derivada de función de función, pues en cada caso es la función $\ln$ de una función de x

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{u}\, u' + \frac{1}{v}\, v'$$

que se puede escribir:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

o sea:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'v + v'u}{u\,v}$$ se pasa y como factor al segundo miembro

$$y' = \frac{u'v + v'u}{u\,.\,v}\,.\,y$$ pero $y = u\,.\,v \Longrightarrow y' = D\,(u\,.\,v)$

Se reemplaza y se tiene:

$$D(u\,.\,v) = \frac{u'v + v'u}{u\,.\,v}\;u\,.\,v$$ Se simplifica:

$$D\,(u\,.\,v) = u'v + v'u$$ que es la regla ya conocida.

12°) La derivada del cociente de dos funciones derivables es igual al cociente que tiene por denominador el cuadrado del denominador, y por numerador la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el producto de la derivada del denominador por el numerador sin derivar.

Sea $y = \frac{u}{v}$ donde $u \wedge v$ son funciones derivables de x; por lo tanto y también es función de x. Se toma ln:

$$ln\,y = ln\,u - ln\,v$$

Se deriva:

$$\frac{1}{y}\,.\,y' = \frac{1}{u}\,.\,u' - \frac{1}{v}\,v'$$ que se escribe:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$ o sea:

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'v - v'u}{u\,.\,v}$$ se pasa y como factor al segundo miembro

$$y' = \frac{u'v - v'u}{u\;v}\,.\,y$$ como $y = \frac{u}{v}$ es $y' = D\,\frac{u}{v}$ se reemplaza:

$$D\,\frac{u}{v} = \frac{u'v - v'u}{u\,.\,v}\;\frac{u}{v}$$ En definitiva:

$Cos\,x\,.\,x^3 - 3x^2\,.\,Sen\,x$

$$\boxed{D\,\frac{u}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$$

Ejercicios resueltos

$u = x^3$
$du = 3x^2$

1°) $f(x) = \dfrac{sen\,x}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{cos\,x\,.\,x^3 - 3\,x^2\,.\,sen\,x}{x^6} = \frac{x^2\,(x\,cos\,x - 3\,sen\,x)}{x^6} = \frac{x\,cos\,x - 3\,sen\,x}{x^4}$$

2°) $\varphi(x) = \dfrac{2\,x - 1}{\sqrt{x}}$

$$\varphi'(x) = \frac{2\,\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\,\sqrt{x}}\,(2\,x - 1)}{x} = \frac{2\,\sqrt{x} - \dfrac{2\,x - 1}{2\,\sqrt{x}}}{x} = \frac{\dfrac{4\,x - 2\,x + 1}{2\,\sqrt{x}}}{x} = \frac{2\,x + 1}{2\,x\,\sqrt{x}}$$

En particular, si el numerador es un número y el denominador una función en x

Ejemplo:

$f(x) = \dfrac{3}{x^5}$ se puede derivar como cociente

$$f'(x) = \frac{0\,.\,x^5 - 5\,x^4\,.\,3}{x^{10}} = \frac{-15\,x^4}{x^{10}} = -\frac{15}{x^6}$$

Pero es más cómodo considerar el denominador como factor con exponente negativo, así:

$$f(x) = \frac{3}{x^5} = 3\,x^{-5}$$

$$f'(x) = 3\,.\,(-5)\,x^{-6} = -\frac{15}{x^6}$$

13°) La derivada de la función $tg\,x$ es igual a $\dfrac{1}{cos^2\,x}$

En efecto, como $tg\,x = \dfrac{sen\,x}{cos\,x}$ podemos obtener la derivada de $tg\,x$ como derivada de un cociente:

$$D\;tg\,x = D\,\frac{sen\,x}{cos\,x} = \frac{cos\,x\,.\,cos\,x - (-\,sen\,x)\,.\,sen\,x}{cos^2\,x} \quad \text{o sea}$$

$$D\;tg\,x = \frac{cos^2\,x + sen^2\,x}{cos^2\,x} \qquad \text{pero } cos^2\,x + sen^2\,x = 1 \quad \text{luego:}$$

$$\boxed{D\;tg\,x = \frac{1}{cos^2\,x}}$$

Ejercicios propuestos

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1°) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ Rta.: $f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$

5°) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{6}}{(1-2\,x)^3}$ Rta.: $f'(x) = -\dfrac{1}{(1-2\,x)^4}$

2°) $\varphi(x) = -\dfrac{4}{x^2}$ Rta.: $\varphi'(x) = \dfrac{8}{x^3}$

3°) $f(t) = \dfrac{2}{t^3}$ Rta.: $f'(t) = -\dfrac{6}{t^4}$

4°) $\varphi(x) = \dfrac{3}{(1-x)^2}$ Rta.: $\varphi'(x) = \dfrac{6}{(1-x)^3}$

6°) $f(t) = \dfrac{\frac{1}{2}}{2-t^2}$ Rta.: $f'(t) = \dfrac{t}{(2-t^2)^2}$

7°) $\varphi(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)^3}$ Rta.: $\varphi'(x) = -\dfrac{12}{(x^2+1)^4}$

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1°) $f(x) = tg\,\dfrac{4}{3}\,x$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{4}{3\,cos^2\,\frac{4}{3}\,x}$

2°) $\varphi(x) = tg^2\,x$ Rta.: $\varphi'(x) = \dfrac{2\,sen\,x}{cos^3\,x}$

3°) $g(x) = tg^3\,2\,x$ Rta.: $g'(x) = \dfrac{6\,tg^2\,2\,x}{cos^2\,x}$

4°) $f(x) = tg^2\,\sqrt{1-x^2}$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{-2\,x\,tg\,\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\;cos^2\sqrt{1-x^2}}$

5°) $u(x) = tg\,x - x$ Rta.: $u'(x) = \dfrac{1}{cos^2\,x} - 1 = \dfrac{1-cos^2\,x}{cos^2\,x} = \dfrac{sen^2\,x}{cos^2\,x} = tg^2\,x$

Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones cocientes:

1°) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ Rta.: $f'(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^2}$

2°) $\varphi(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-x+1}$ Rta.: $\varphi'(x) = \dfrac{-2x^2-2x+3}{(x^2-x+1)^2}$

3°) $f(t) = \dfrac{t^3-1}{t^2+2}$ Rta.: $f'(t) = \dfrac{t^4+6t^2+2t}{(t^2+2)^2}$

4°) $g(x) = \dfrac{1+sen\,x}{cos\,x}$ Rta.: $g'(x) = \dfrac{1+sen\,x}{cos^2\,x}$

5°) $\varphi(z) = \dfrac{z^3}{(1+z)^2}$ Rta.: $\varphi'(z) = \dfrac{z^2\,(3+z)}{(1+z)^3}$

6°) $u(x) = \dfrac{1-2x}{\sqrt{1+x}}$ Rta.: $u'(x) = \dfrac{-2x-5}{2\,(1+x)\,\sqrt{1+x}}$

7°) $f(x) = \dfrac{1+cos\,x}{1-cos\,x}$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{-2\,sen\,x}{(1-cos\,x)^2}$

8°) $f(z) = \dfrac{1+tg\,z}{1-tg\,z}$ Rta.: $f'(z) = \dfrac{2}{cos^2\,z\,(1-tg\,z)^2}$

9°) $\varphi(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-9}}$ Rta.: $\varphi'(x) = \dfrac{-27}{(x^2-9)\,\sqrt{x^2-9}}$

10°) $g(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ Rta.: $g'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x}\,\left(1+\sqrt{x}\right)^2}$

11°) $f(t) = \dfrac{2-\sqrt{t}}{2+\sqrt{t}}$ Rta.: $f'(t) = \dfrac{-2}{\sqrt{t}\,\left(2+\sqrt{t}\right)^2}$

12°) $f(x) = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x)^3}$

13°) $f(x) = \dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}$

14°) $\varphi(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{(x+1)^3}$ Rta.: $\varphi'(x) = \dfrac{1-8x}{3\,(x+1)^4\,x^{\frac{2}{3}}}$

14°) Derivada de la función exponencial

$y = a^{\varphi(x)}$ donde como se sabe $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$

$ln\,y = \varphi(x)\,.\,ln\,a$ se deriva teniendo en cuenta que $ln\,a$ es un número

$\dfrac{1}{y}\,.\,y' = ln\,a\,.\,\varphi'(x)$ se pasa y como factor

$y' = ln\,a\,.\,\varphi'(x)\,.\,y$ Como $y = a^{\varphi(x)} \Longrightarrow y' = D\,a^{\varphi(x)}$ se reemplaza

$D\,a^{\varphi(x)} = ln\,a\,.\,\varphi'(x)\,.\,a^{\varphi(x)}$

que es costumbre escribir permutando los factores del segundo miembro así:

$$\boxed{D\,a^{\varphi(x)} = a^{\varphi(x)}\,.\,ln\,a\,.\,\varphi'(x)}$$

Es decir, que la derivada de la exponencial es igual a la misma exponencial, por el logaritmo natural de la base, por la derivada del exponente.

Interesa en particular, el caso en que la base de la exponencial es el número e, pues entonces se aplica la regla anterior y se tiene:

$$D e^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)} . \ln e . \varphi'(x)$$

como $\ln e = 1$ resulta:

$$\boxed{D e^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)} \varphi'(x)}$$

Ejercicios resueltos

1°) $D e^{x^3+2x} = e^{x^3+2x}(3x^2+2)$; 2°) $D e^{5x} = e^{5x} . 5 = 5 e^{5x}$

3°) $D e^{-2x} = -2 e^{-2x}$; 4°) $D e^{-x} = -e^{-x}$

En particular:

$$\boxed{D e^{x} = e^{x}}$$ La única función que coincide con su derivada.

$e^{-2x} = -2e^{-2x}$ V

X

15°) Vamos a ver que cuando λ es un número positivo o negativo, entero o fraccionario, la derivada de x^λ responde a la misma regla de $D x^n$ cuando n es natural, es decir:

$$D x^\lambda = \lambda x^{\lambda-1}$$

En efecto: todo número se puede expresar como la base del logaritmo, elevada al logaritmo de ese número, así:

$\log 1000 = 3 \Longrightarrow 1000 = 10^3$ o sea $1000 = 10^{\log 1000}$

$\log_2 32 = 5 \Longrightarrow 32 = 2^5$ o sea $32 = 2^{\log_2 32}$

$6 = e^{\ln 6}$

En general $x = e^{\ln x}$ Se eleva ambos miembros a la potencia λ

$x^\lambda = \left(e^{\ln x}\right)^\lambda$ o sea

(1) $x^\lambda = e^{\lambda . \ln x}$ Se deriva

$D x^\lambda = e^{\lambda \ln x} . D(\lambda . \ln x)$ es decir:

$D x^\lambda = e^{\lambda \ln x} . \lambda . \frac{1}{x}$ De acuerdo con (1) se reemplaza $e^{\lambda . \ln x}$ por su igual x^λ y se tiene:

$D x^\lambda = x^\lambda \lambda \frac{1}{x}$ pero $x^\lambda \frac{1}{x} = x^{\lambda-1}$ luego

$$\boxed{D x^\lambda = \lambda x^{\lambda-1}}$$

Ejercicios resueltos:

1°) $D x^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}}$ 2°) $D x^{-5} = -5 x^{-6}$

3°) $D x^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}}$ 4°) $D x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}}$

Esta regla y la derivada de función de función, permiten obtener la derivada de una raíz de índice mayor que 2.

Ejercicios resueltos:

Hallar la derivada de:

1°) $\sqrt[3]{x^5 - 2x + 1}$ se puede expresar como potencia así $(x^5 - 2x + 1)^{\frac{1}{3}}$, luego:

$$D\sqrt[3]{x^5 - 2x + 1} = D\,(x^5 - 2x + 1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\,(x^5 - 2x + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (5x^4 - 2)$$

2°) $\sqrt[4]{x^6 + sen\,2x}$ se puede expresar $(x^6 + sen\,2x)^{\frac{1}{4}}$, luego:

$$D\sqrt[4]{x^6 + sen\,2x} = D\,(x^6 + sen\,2x)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\,(x^6 + sen\,2x)^{-\frac{3}{4}}\,(6x^5 + 2\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}\,(x^6 + sen\,2x)^{-\frac{3}{4}}\,(3x^5 + \cos 2x)$$

Ejercicios propuestos

Obtener la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1°) $f(x) = e^{10x}$ — Rta.: $f'(x) = 10\,e^{10x}$

2°) $\varphi(x) = e^{-9x}$ — Rta.: $\varphi'(x) = -9\,e^{-9x}$

3°) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$ — Rta.: $f'(x) = -\frac{1}{2}\,e^{-\frac{1}{2}x}$

4°) $g(x) = e^{3x^4 - 2x}$ — Rta.: $g'(x) = (12x^3 - 2)\,e^{3x^4 - 2x}$

5°) $\varphi(x) = e^{1-4x}$ — Rta.: $\varphi'(x) = -4\,e^{1-4x}$

6°) $f(x) = e^{-5x+1}$ — Rta.: $f'(x) = -5\,e^{-5x+1}$

7°) $f(t) = e^{2-t^3}$ — Rta.: $f'(t) = -3t^2\,e^{2-t^3}$

8°) $f(x) = x^3 \cdot e^{1-x}$ — Rta.: $f'(x) = x^2\,e^{1-x}\,(3-x)$

9°) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ — Rta.: $f'(x) = \frac{3}{4}\,x^{-\frac{1}{4}}$

10°) $\varphi(x) = x^{\frac{5}{3}}$ — Rta.: $\varphi'(x) = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

11°) $u(x) = x^{-\frac{2}{3}}$ — Rta.: $u'(x) = -\frac{2}{3}\,x^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

12°) $g(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ — Rta.: $g'(x) = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$

13°) $f(x) = x^{-\frac{7}{3}}$ — Rta.: $f'(x) = \frac{-7}{3x^3\sqrt[3]{x}}$

14°) $\varphi(x) = x^{-\frac{1}{4}}$ — Rta.: $\varphi'(x) = -\frac{1}{4x\sqrt[4]{x}}$

15°) $\varphi(x) = \sqrt[3]{x^6 - 3x}$ — Rta.: $\varphi'(x) = \frac{6x^5 - 3}{3\sqrt[3]{(x^6 - 3x)^2}}$

16°) $f(x) = \sqrt[4]{1 - 2x}$ — Rta.: $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt[4]{(1-2x)^3}}$

17°) $f(x) = \sqrt[5]{1 - \cos x}$ — Rta.: $f'(x) = \frac{sen\,x}{5\sqrt[5]{(1-\cos x)^4}}$

18°) $\varphi(t) = \sqrt[3]{sen\, t + e^{2t}}$ Rta.: $\varphi'(t) = \dfrac{\cos t + 2e^{2t}}{3\sqrt[3]{(sen\, t + e^{2t})^2}}$

19°) $f(x) = \sqrt[3]{\left(x + e^{x}\right)^2}$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{2(1 + e^{x})}{3\sqrt[3]{x + e^{x}}}$

20°) $\varphi(x) = \sqrt[4]{\left(x^2 + e^{3x}\right)^3}$ Rta.: $\varphi'(x) = \dfrac{3\left(2x + 3e^{3x}\right)}{4\sqrt[4]{x^2 + e^{3x}}}$

21°) $f(x) = \sqrt[4]{x^6 - sen\, 2x}$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{3x^5 - \cos 2x}{2\sqrt[4]{\left(x^6 - sen\, 2x\right)^3}}$

Si se trata de hallar la derivada de una función, elevada a otra función, ambas derivables, se toma logaritmo natural y luego se deriva como función de función.

Ejercicios resueltos:

1°)

$y = x^{2x}$ se toma ln

$ln\, y = 2x\, ln\, x$ se deriva

$\dfrac{1}{y}\, y' = 2\, ln\, x + 2\cancel{x}\,\dfrac{1}{\cancel{x}}$ se pasa y al segundo miembro

$y' = (2\, ln\, x + 2)\, y$ se saca factor común 2 y se reemplaza y

$y' = 2\,(ln\, x + 1)\, .\, x^{2x}$ en definitiva

$D\, x^{2x} = 2x^{2x}\,(ln\, x + 1)$

2°)

$y = (x^2 + 1)^{x^3 + 1}$

$ln\, y = (x^3 + 1)\, ln\, (x^2 + 1)$

$\dfrac{1}{y}\, y' = 3x^2\, ln\, (x^2 + 1) + \dfrac{2x}{x^2 + 1}\,(x^3 + 1)$

$y' = \left[3x^2\, ln\, (x^2 + 1) + \dfrac{2x\,(x^3 + 1)}{x^2 + 1}\right] y$

$y' = x\left[3x\, ln\, (x^2 + 1) + \dfrac{2\,(x^3 + 1)}{x^2 + 1}\right](x^2 + 1)^{x^3 + 1}$

$D\,(x^2 + 1)^{x^3 + 1} = x(x^2 + 1)^{x^3 + 1}\left[3x\, ln\, (x^2 + 1) + \dfrac{2\,(x^3 + 1)}{x^2 + 1}\right]$

Ejercicios propuestos

1°) $f(x) = x^{3x}$ Rta.: $f'(x) = 3x^{3x}\,(ln\, x + 1)$

2°) $\varphi(x) = x^{2x + 1}$ Rta.: $\varphi'(x) = x^{2x}\,(ln\, x^{2x} + 2x + 1)$

3°) $g(x) = x^{x^2}$ Rta.: $g'(x) = x^{x^2}\,(2\, ln\, x + 1)$

4°) $f(x) = (x + 1)^{x}$ Rta.: $f'(x) = (x + 1)^{x}\left[(x + 1)\, ln\, (x + 1) + x\right]$

5°) $\varphi(t) = (t^2 + 2)^{t - 1}$ Rta.: $\varphi'(t) = (t^2 + 2)^{t - 2}\left[ln\, (t^2 + 2)^{t^2 + 2} + t - 1\right]$

6°) $f(x) = (x^2 + x)^{x+2}$ Rta.: $f'(x) = (x^2 + x)^{x+2}\left[ln\,(x^2 - x) + \dfrac{(x+2)(2x+1)}{x^2 + x}\right]$

7°) $u(x) = (2x^2 + 3x)^{x^3+1}$

Rta.: $u'(x) = (2x^2 + 3x)^{x^3+1}\left[ln\,(2x^2 + 3x)^{x^3+1} + \dfrac{(x^2+1)(4x+3)}{x\,(2x+3)}\right]$

8°) $f(t) = (t^4 + 2)^{sen\,t}$ Rta.: $f'(t) = (t^4 + 2)^{sen\,t}\left[cos\,t\; ln\,(t^2 + 2) + sen\,t\;\dfrac{4t^3}{t^4 + 2}\right]$

9°) $\varphi(x) = (x^2 + 3x + 1)^{cos\,x}$

Rta.: $\varphi'(x) = (x^2 + 3x + 1)^{cos\,x}\left[\dfrac{2x+3}{x^2 + 3x + 1}\,cos\,x - sen\,x\; ln\,(x^2 + 3x + 1)\right]$

10°) $f(x) = (x^4 + 2x^2)^{sen\,(x+2)}$

Rta.: $f'(x) = (x^4 + 2x^2)^{sen\,(x+2)}\left[cos\,(x+2)\; ln\,(x^4 + 2x^2) + sen\,(x+2)\,\dfrac{4x^2 + 4}{x^3 + 2x}\right]$

11°) $f(x) = x^{e^x}$ Rta.: $f'(x) = x^{e^x}\, e^x \left(ln\,x + \dfrac{1}{x}\right)$

12°) $\varphi(x) = x^{e^{x^3+1}}$ Rta.: $\varphi'(x) = x^{e^{x^3+1}}\, e^{x^3+1}\left(ln\,x^{2x} + \dfrac{1}{x}\right)$

13°) $g(x) = x^{2x^4 + x}$ Rta.: $g'(x) = x^{2x^4+x}\left[(8x^3 + 1)\,ln\,x + 2x^3 + 1\right]$

14°) $f(x) = x^{e^{x^3 - x}}$ Rta.: $f'(x) = x^{e^{x^3-x}}\, e^{x^3 - x}\left[\left(3x^2 - 1\right) ln\,x + \dfrac{1}{x}\right]$

16°) Derivada de la función inversa

Recordemos que:

Si de $y = f(x)$ resulta $x = \varphi(y)$ donde φ es función, φ se llama inversa de f y recíprocamente.

Se deriva $x = \varphi(y)$ con respecto a x y se tiene:

$1 = \varphi(y)\,y'$ como $y = f(x)$ es $y' = f'(x)$ se reemplaza

$1 = \varphi'(y)\,f'(x)$ o sea

$$\varphi'(y)\,f'(x) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)} \\[2ex] f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)} \end{cases}$$

Es decir, la derivada de una función es igual a uno sobre la derivada de la función inversa, en todos aquellos puntos en que la derivada del denominador es distinta de 0.

Sabemos que la función $f(x) = arc.\,sen\,x$ es la inversa de $\varphi(y) = sen\,y$, para todo intervalo en que la función sen es función uno a uno, es decir en

$\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$; $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,3\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ etc.

Luego en cada uno de esos intervalos es:

$$D\ arc\ sen\ x = \frac{1}{D\ sen\ y}$$

$$D\ arc\ sen\ x = \frac{1}{cos\ y}$$ Para que figure x en el segundo miembro, se tiene en cuenta que $cos\ y = \sqrt{1 - sen^2\ y}$

$$D\ arc\ sen\ x = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2\ y}}$$ pero $x = sen\ y \Longrightarrow sen^2\ y = x^2$ se reemplaza:

$$\boxed{D\ arc\ sen\ x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Ejemplos resueltos

Hallar la derivada de:

1°) $f(x) = arc\ sen\sqrt{x}$ se deriva como función de función

$$D\ arc\ sen\ \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{x}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\ arc\ sen\ \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D\ arc\ sen\ \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x\ (1 - x)}}$$ Válido para aquellos valores $x \ / \ 0 < x < 1$

2°) $D\ arc\ sen\ (1 - x)$

$$D\ arc\ sen\ (1 - x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x)^2}} \cdot (-1)$$

$$D\ arc\ sen\ (1 - x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 1 + 2x - x^2}}\ (-1) = -\frac{1}{\sqrt{x\ (2 - x)}}$$

válido en aquellos puntos $x \ / \ 0 < x < 2$

$y = arc\ cos\ x \Longrightarrow x = cos\ y$ en cada intervalo en que $cos\ x$ es función uno a uno.

$$D\ arc\ cos\ x = \frac{1}{D\ cos\ y}$$ pero $D\ cos\ y = -sen\ y$

$$D\ arc\ cos\ x = \frac{1}{-sen\ y}$$ Para que figure la variable x en el segundo miembro se tiene en cuenta que

$$sen\ y = \sqrt{1 - cos^2\ y}$$

$$D\ arc\ cos\ x = -\frac{1}{\sqrt{1 - cos^2\ y}}$$ pero $x = cos\ y \Longrightarrow cos^2\ y = x^2$ se reemplaza:

$$\boxed{D\ arc\ cos\ x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Ejemplos resueltos

1°) $D\, arc\, cos\, x^3 = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^6}}\, 3x^2 = -\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$

2°) $D\, arc\, cos\,(1-x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\,(-1) = \dfrac{1}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x\,(2-x)}}$

$y = arc\, tg\, x \Rightarrow x = tg\, y$ en cada intervalo correspondiente

$D\, arc\, tg\, x = \dfrac{1}{Dtg\, y}$ como $D\, tg\, y = \dfrac{1}{cos^2\, y}$

$D\, arc\, tg\, x = \dfrac{1}{\dfrac{1}{cos^2\, y}}$ se quiere que figure la variable x en el segundo miembro,

como: $1 = sen^2\, y + cos^2\, y$ es

$$\frac{1}{cos^2\, y} = \frac{sen^2\, y + cos^2\, y}{cos^2\, y}$$

Se reemplaza:

$D\, arc\, tg\, x = \dfrac{1}{\dfrac{sen^2\, y + cos^2\, y}{cos^2\, y}}$ o sea:

$$D\, arc\, tg\, x = \frac{1}{\dfrac{sen^2\, y}{cos^2\, y} + \dfrac{cos^2\, y}{cos^2\, y}}$$

$D\, arc\, tg\, x = \dfrac{1}{tg^2\, y + 1}$ pero $x = tg\, y \Longrightarrow tg^2\, y = x^2$

$D\, arc\, tg\, x = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ que es costumbre escribir

$$\boxed{D\, arc\, tg\, x = \frac{1}{1+x^2}}$$

Ejemplo:

$D\, arc\, tg\, \sqrt{2x} = \dfrac{1}{1+2x} \cdot \dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x}\,(1+2x)}$ Válido $\forall\, x \,/\, x > 0$

Ejercicios propuestos

Obtener la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1°) $f(x) = arc\, sen\, 4x$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1-16 \cdot x^2}}$

2°) $\varphi(x) = arc\, sen\, 3x$ Rta.: $\varphi'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$

3°) $f(x) = arc\ cos\ 2x$. Rta.: $f'(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$

4°) $\varphi(x) = arc\ cos \dfrac{1}{3} x$ Rta.: $\varphi'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{9-x^2}}$

5°) $f(x) = arc\ cos \dfrac{x}{3}$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{9-x^2}}$

6°) $g(x) = arc\ tg\ 9x$ Rta.: $g'(x) = \dfrac{9}{1+81x^2}$

7°) $u(x) = arc\ tg\ \dfrac{1}{2} x$ Rta.: $u'(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$

8°) $f(x) = arc\ sen \sqrt{2x}$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2x^2}}$

9°) $\varphi(x) = arc\ cos \sqrt{2x+1}$ Rta.: $\varphi'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{-4x^2-2x}}$

10°) $f(t) = arc\ tg \sqrt{4t+1}$ Rta.: $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{4t+1}\ (1+2t)}$

11°) $f(x) = arc\ sen\ (1-x^2)$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{2x-x^2}}$

12°) $\varphi(x) = arc\ sen\ (2x-1)$ Rta.: $\varphi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

13°) $f(x) = arc\ sen \sqrt{1-x^2}$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{-2x}{\sqrt{2x-x^2}}$

14°) $\varphi(x) = arc\ tg \sqrt{x^2-1}$ Rta.: $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

15°) $g(t) = arc\ cos\ (1-t)$ Rta.: $g'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2t-t^2}}$

16°) $f(x) = arc\ tg \dfrac{2x}{1-2x}$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

17°) $\varphi(x) = arc\ tg \dfrac{x+2}{1-2x}$ Rta.: $\varphi'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

18°) $f(x) = arc\ tg \sqrt{\dfrac{1-cos\ x}{1+cos\ x}}$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{1}{2}$

19°) $f(x) = arc\ sen \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

De acuerdo con la definición de seno hiperbólico y de coseno hiperbólico, se tiene:

$$senh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Se deriva ambos miembros:

$$D\ senh\ x = \frac{1}{2}\left[e^x - \left(-e^{-x}\right)\right] \quad \text{o sea}$$

$$D\ senh\ x = \frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right]$$

Como el segundo miembro es el coseno hiperbólico de x se puede escribir también:

$$D\ senh\ x = cosh\ x$$

$$cosh\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Se deriva ambos miembros:

$$D\ cosh\ x = \frac{1}{2}\left[e^x + \left(-e^{-x}\right)\right] \quad \text{o sea}$$

$$D\ cosh\ x = \frac{1}{2}\left[e^x - e^{-x}\right]$$

Como el segundo miembro es el seno hiperbólico de x se puede escribir también:

$$D\ cosh\ x = senh\ x$$

Como la tangente hiperbólica es:

$$tgh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

se deriva el segundo miembro como cociente y resulta:

$$D\ \ tgh\ x = \frac{4}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

que también se puede escribir:

$$D\ \ tgh\ x = \frac{1}{cosh^2\ x}$$

Ejercicios propuestos

1°) $f(x) = senh\ 4x$ Rta.: $f'(x) = 4\ cosh\ 4x$

2°) $g(x) = cosh\ 6x$ Rta.: $g'(x) = 6\ senh\ 6x$

3°) $\varphi(x) = cosh\ e^x$ Rta.: $\varphi'(x) = e^x\ senh\ e^x$

4°) $f(x) = tgh\ \frac{1}{4}x$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{1}{4\ cosh^2\ \frac{1}{4}x}$

5°) $u(x) = tgh\ \sqrt{x}$ Rta.: $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}\ \ cosh^2\ \sqrt{x}}$

6°) $f(x) = tgh\ (1 + x^2)$ Rta.: $f'(x) = \dfrac{2x}{cosh^2\ (1 + x^2)}$

7°) $\varphi(x) = senh\ 2x - cosh\ 2x$ Rta.: $\varphi'(x) = 2\ cosh\ 2x - 2\ senh\ 2x$ o sea $\varphi'(x) = 2\,e^{-2x}$

8°) $f(x) = 2\ (senh\ x + cosh\ x)$ Rta.: $f'(x) = 2\ (cosh\ x + senh\ x)$ o sea $f'(x) = 2\,e^x$

9°) $\varphi(x) = cosh^2\ x$ Rta.: $\varphi'(x) = 2\ cosh\ x\ .\ senh\ x$

10°) $g(x) = senh^4\ x$ Rta.: $g'(x) = 4\ senh^3\ x\ .\ cosh\ x$

11°) $f(x) = senh\,x + cosh^2\,x$ Rta.: $f'(x) = cosh\,x\,(1 + 2\,senh\,x)$

12°) $\varphi(x) = senh\,e^{2x} - cosh\,e^{2x}$ Rta.: $\varphi'(x) = 2\,e^{2x}\left[cosh\,e^{2x} - senh\,e^{2x}\right]$

13°) $f(x) = \frac{1}{2}\,ln\,tgh\,x$ Rta.: $f'(x) = \frac{1}{senh\,2x}$

14°) $\varphi(x) = ln\,cosh\,x$ Rta.: $\varphi'(x) = tgh\,x$

15°) $f(x) = 2\,senh\,x + tgh\,x$ Rta.: $f'(x) = 2\,cosh\,x + \frac{1}{cosh^2\,x}$

16°) $g(x) = \frac{1}{2}\,senh^2\,x + \frac{1}{3}\,senh^3\,x$ Rta.: $g'(x) = senh\,x\,.\,cosh\,x\,(1 + senh\,x)$

17°) $f(x) = senh\,x + ln\,cosh\,x$ Rta.: $f'(x) = cosh\,x + tgh\,x$

18°) $\varphi(x) = senh^2\,x + cosh^2\,x$ Rta.: $\varphi'(x) = 2\,senh\,(2x)$ o sea

$\varphi'(x) = 4\left[senh\,x\,.\,cosh\,x\right]$

19°) $f(x) = a\,cosh\,\frac{x}{a}$ Rta.: $f'(x) = senh\,\frac{x}{a}$

TABLA DE FUNCIONES DERIVADAS

Función $f(x)$	*Función derivada* $f'(x)$	*Función* $f(x)$	*Función derivada* $f'(x)$
x^n	$n\,x^{n-1}$	e^x	e^x
x	1	$u(x)\,.\,v(x)$	$u'\,v + v'\,u$
		$u(x)\,.\,v(x)\,.\,w(x)$	$u'\,v\,w + v'\,u\,w + w'\,u\,v$
k	0	$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'\,v - v'\,u}{v^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{k}{x^n}$	$-\frac{n\,k}{x^{n+1}}$
		$\varphi[\,u(x)\,]$	$\varphi'(u)\,.\,u'(x)$
$ln\,x$	$\frac{1}{x}$	x^x	$x^x\,[\,ln\,x + 1\,]$
$sen\,x$	$cos\,x$	$x^{g(x)}$	$x^{g(x)}\left[g'(x)\,.\,ln\,x + \frac{g(x)}{x}\right]$
$cos\,x$	$-\,sen\,x$	$[\,\varphi(x)\,]^{g(x)}$	$\left[\varphi(x)\right]^{g(x)}\left[g'(x)\,.\,ln\,\varphi(x) + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,g(x)\right]$
$tg\,x$	$\frac{1}{cos^2\,x}$		
$cotg\,x$	$-\frac{1}{sen^2\,x}$	$arc\,sen\,x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$k\,.\,\varphi(x)$	$k\cdot\varphi'(x)$		
$a^{\varphi(x)}$	$a^{\varphi(x)}\,.\,ln\,a\cdot\varphi'(x)$		
$e^{\varphi(x)}$	$e^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)$	$arc\,cos\,x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Derivadas de funciones implícitas

Para derivar las funciones expresadas implícitamente, se aplican las reglas de derivación, pero hay que tener en cuenta que y es función de x.

Ejercicios resueltos

1°) Derivar

$x^2 y - x^3 + 1 = 0$ — el primer término es el producto de dos factores x^2 e y

$2xy + y' x^2 - 3x^2 = 0$ — se despeja y'

$$y' = \frac{3x^2 - 2xy}{x^2} \qquad \text{o sea} \qquad y' = 3 - \frac{2y}{x}$$

Hemos resuelto este ejercicio tan simple, porque en él vamos a verificar que si se despeja y y se deriva se llega al mismo resultado. En efecto, se despeja y en la ecuación dada, se tiene

$$y = \frac{x^3 - 1}{x^2} \Longrightarrow y = x - \frac{1}{x^2}$$ se deriva:

$$y' = 1 + \frac{2}{x^3}$$ que coincide con la derivada obtenida antes:

$$y' = 3 - \frac{2y}{x}$$ pues si en ésta reemplazamos y por su expresión, resulta:

$$y' = 3 - \frac{2\,\dfrac{x^3 - 1}{x^2}}{x} = 3 - \frac{2x^3 - 2}{x^3} = 3 - 2 + \frac{2}{x^3} = 1 + \frac{2}{x^3}$$

que concuerda con la derivada que hemos encontrado al derivar la función expresada implícitamente.

2°) Derivar

$y^3 + 2xy - x^4 = 0$

$3y^2 y' + 2y + 2y'x - 4x^3 = 0$ — se saca y' factor común

$y'(3y^2 + 2x) + 2y - 4x^3 = 0$ — se despeja y'

$$y' = \frac{4x^3 - 2y}{3y^2 + 2x}$$

Ejercicios propuestos

1°) $3x^2 - 2xy + y - 3 = 0$ Rta.: $y' = \dfrac{2y - 6x}{1 - 2x}$

2°) $x^3 + 2y^3 - xy = 1$ Rta.: $y' = \dfrac{y - 3x^2}{6y^2 - x}$

3°) $xy^3 + 2\sqrt{x} - 4y - x = 0$ Rta.: $y' = \dfrac{\sqrt{x} - 1 - y^3\sqrt{x}}{(3xy^2 - 4)\sqrt{x}}$

4°) $\dfrac{y}{x} - x^2 y^3 + \sqrt{x} = x^3 + 1$ Rta.: $y' = \dfrac{6x^4\sqrt{x} - x^2 + 4x^3y^3\sqrt{x} + 2y\sqrt{x}}{2x\sqrt{x} - 6x^4y^2\sqrt{x}}$

5°) $e^x - 2yx^5 = 3xy$ Rta.: $y' = \dfrac{e^x - 3y - 10x^4 y}{2x^5 + 3x}$

6°) $\ln x + x^2 y^3 - 2xy + 3 = 0$ Rta.: $y' = \dfrac{2xy - 2x^2y^3 - 1}{3x^3y^2 - 2x^2}$

7°) $\dfrac{y}{x} - x^2 + 3y = 2x + y - 1$ Rta.: $y' = \dfrac{2x^2 + y + 2x^3}{x + 2x^2}$

8°) $2x + \dfrac{y^3}{x} + \dfrac{x^2}{y} - 1 = 0$ Rta.: $y' = \dfrac{-2x^2y^2 + y^5 - 2x^3y}{3xy^4 - x^4}$

DIFERENCIAL

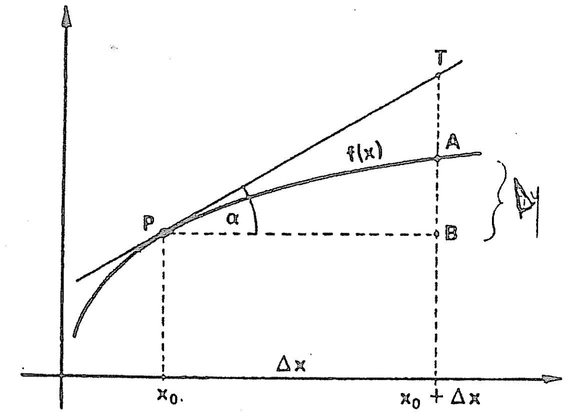
Si $f(x)$ es una función derivable en un intervalo y x_0 es un punto del mismo, definimos, de acuerdo con Leibniz, diferencial de la función en el punto x_0 correspondiente a un incremento Δx de la variable independiente, al producto de la derivada de la función en el punto por el incremento de la variable independiente. El símbolo de diferencial es d, luego:

$$\boxed{d\,f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x}$$

el primer miembro se lee: diferencial de la función f en el punto x_0. También la diferencial de la función $y = f(x)$ en el punto se designa con dy y se tiene:

$$\boxed{dy = f'(x_0)\,.\,\Delta x}$$

Interpretación geométrica de la diferencial en un punto



Dado x_0, se elige Δx, P es el punto de la curva que corresponde a x_0, por P se traza la tangente. En el triángulo rectángulo PTB se verifica:

$$tg\,\alpha = \frac{\overline{TB}}{\overline{PB}}$$

$tg\,\alpha$ es la pendiente de la recta tangente en P luego es igual a la derivada de la función en x_0 ; $\overline{PB} = \Delta x$, se reemplaza y se tiene:

$$f'(x_0) = \frac{\overline{TB}}{\Delta x} \Longrightarrow \overline{TB} = f'(x_0)\,.\,\Delta x$$

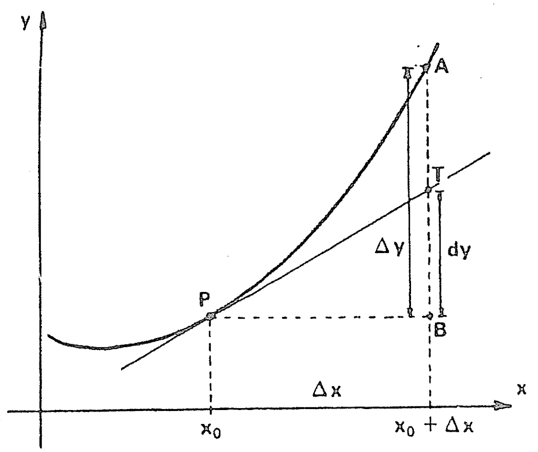
el segundo miembro es por definición $d\,f(x_0)$ luego:

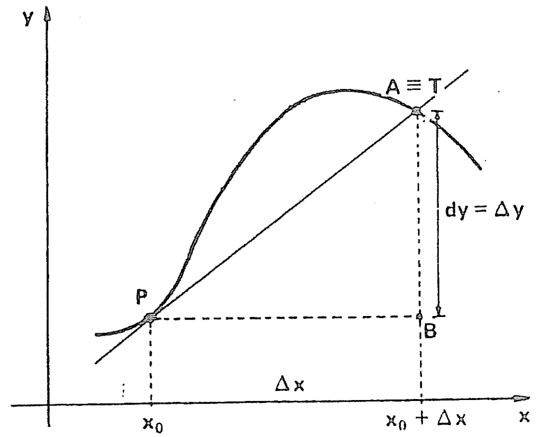
$$\boxed{\overline{TB} = d\,f(x_0)} \quad \text{o bien} \quad \boxed{dy = \overline{TB}}$$

es decir que la diferencial en un punto es el incremento de la ordenada de la tangente en el punto correspondiente.

El incremento de la función es $\Delta y = \overline{AB}$.

En este caso particular la diferencial es mayor que el incremento, pero puede ocurrir que sea menor o igual, como ocurre en los siguientes ejemplos





Como se observa en las figuras, $\overline{TA}$ o sea **la diferencia entre la diferencial y el incremento de la función, tiende a 0 cuando** $\Delta x \longrightarrow 0$. En efecto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \implies \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \epsilon \ / \ \epsilon \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } \Delta x \longrightarrow 0$$ de acuerdo con la definición de límite y de infinitésimo. Se pasa Δx al segundo miembro y se tiene:

$$\Delta y = f'(x_0) \,.\, \Delta x + \epsilon \, \Delta x$$ se reemplaza $f'(x_0)\,\Delta x$ por su igual $df(x_0)$ y se tiene:

$$\Delta y = d\, f(x_0) + \epsilon \, \Delta x$$ o sea:

$$\Delta y - d\, f(x_0) = \epsilon \, \Delta x$$ se toma límite para $\Delta x \longrightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\Delta y - d\, f(x_0) \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \epsilon \,.\, \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x$$ de donde

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\Delta y - d\, f(x_0) \right] = 0 \quad \text{o bien} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \left[\Delta y - dy \right] = 0$$

que es lo que queríamos demostrar, pues el corchete expresa la diferencia entre el incremento de la función y la diferencial.

Esto permite que en los cálculos aproximados se reemplace el incremento Δy por la diferencial y se abrevian los cálculos.

Ejemplo:

Sea la función $f(x) = x^2$ el incremento de la función es:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$$

en el punto $x_0 = 50$ y para $\Delta x = 0{,}2$ es:

$$\Delta y = (50 + 0{,}2)^2 - 50^2 = 2520{,}04 - 2500 = 20{,}04$$

la diferencial es:

$$dy = f'(x_0)\,\Delta x = 2\,x_0\,\Delta x = 2 \,.\, 50 \,.\, 0{,}2 = 20$$

la diferencia que resulta al sustituir Δy por la diferencial dy es $20{,}04 - 20 = 0{,}04$ es decir 4 centésimos que en muchos casos comparándolo con 20,04 se puede despreciar y adoptar $dy = 20$ en vez de $\Delta y = 20{,}04$ dado que en general es más fácil calcular la diferencial.

Cuando se refiere a un x cualquiera del intervalo en que la función $f(x)$ es derivable, se expresa la función diferencial:

$$d\,f(x) = f'(x)\,\Delta x$$

o bien

$$dy = y'\,\Delta x$$

Ejemplos: 1°) la diferencial de $f(x) = sen\,x$ es:

$$d\,sen\,x = cos\,x\,\Delta x$$

2°) la diferencial de $f(x) = x^3$ es:

$$dx^3 = 3\,x^2\,\Delta x$$

En particular, la diferencial de $f(x) = x$ es:

$$dx = 1 \,.\, \Delta x$$

o sea

$$\boxed{dx = \Delta x}$$

relación que expresa que: la diferencial de la variable independiente, es igual al incremento de la misma.

Se reemplaza en la definición Δx por dx y se tiene

$$\boxed{d\,f(x) = f'(x)\,dx} \implies \boxed{f'(x) = \frac{df(x)}{dx}}$$

o bien

$$\boxed{dy = y'\,dx} \Longrightarrow \boxed{y' = \frac{dy}{dx}}$$

las dos últimas expresiones de la derecha, indican que la derivada de una función, es igual al cociente entre el diferencial de la función y la de la variable independiente; esta notación tiene la ventaja de destacar la variable con respecto a la cual se deriva pues $\frac{dy}{dx}$ se lee: derivada de y con respecto a x.

Las reglas para diferenciar son las mismas que para derivar, sin más que cambiar la palabra derivada por la palabra diferencial. Así:

1°) $D(u+v) = u' + v' \Longrightarrow d(u+v) = du + dv$

2°) $D(u\,.\,v) = u'v + v'.u \Longrightarrow d(u\,.\,v) = du\,.\,v + dv\,.\,u$ etc.

Derivadas de funciones expresadas en forma paramétrica

Sea $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

$dx = \varphi'(t)\,dt$

$dy = g'(t)\,dt$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)\,dt}{\varphi'(t)\,dt} = \frac{g'(t)}{\varphi'(t)}$$

Ejemplo:

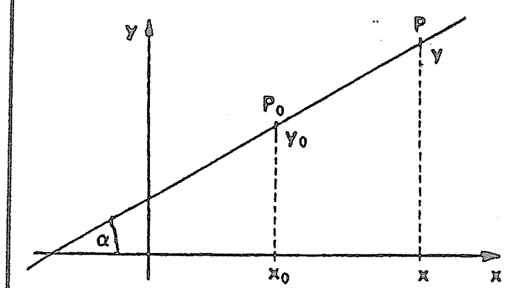
$$\begin{cases} x = a(1+\cos t) \Longrightarrow dx = a(-\operatorname{sen} t)\,dt = -a \operatorname{sen} t\,dt \\ y = b(t - \operatorname{sen} t) \Longrightarrow dy = b(1-\cos t)\,dt \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(1-\cos t)\,dt}{-a \operatorname{sen} t\,dt} = -\frac{b(1-\cos t)}{a \operatorname{sen} t}$$

7 Aplicaciones de la derivada

Aplicaciones geométricas de la derivada

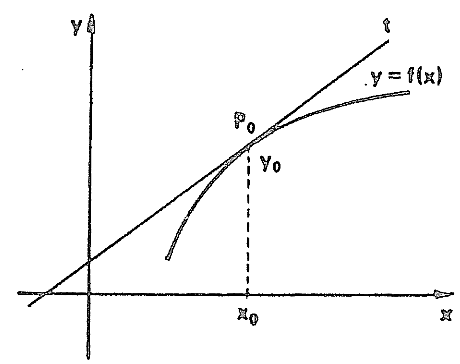
Una de las primeras aplicaciones de la derivada es: encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto.



Se recuerda que: la ecuación de una recta de pendiente p que pasa por un punto P_0 de coordenadas $(x_0\,;y_0)$ es:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = p = m$$

Dada una función derivable $f(x)$ cuya gráfica es la de la figura, se quiere determinar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P_0\ (x_0\,;y_0)$.



Según se ha visto, la pendiente p de la recta t tangente a la curva en ese punto, está dada por la derivada de la función en x_0, es decir:

$$p = f'(x_0)$$

Luego, la ecuación de la recta tangente es:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$$

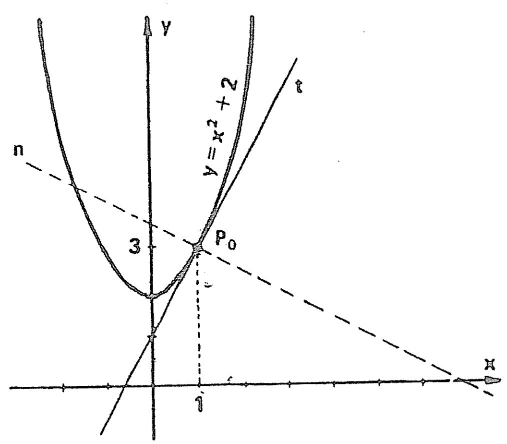
si se despeja y, se encuentra la ecuación explícita de la recta tangente.

Se llama normal a la curva en un punto, a la recta perpendicular a la tangente en dicho punto. La pendiente de la normal en P_0 por ser perpendicular a la recta tangente es $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Luego, la ecuación de la recta normal n en el punto $P_0(x_0\,;y_0)$ es:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Ejemplo: Determinar la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2$ en el punto $P_0(1\,;3)$



$f'(x) = 2x \Longrightarrow f'(1) = 2$ por lo tanto la ecuación de la recta t tangente a la curva en $P_0(1\,;3)$ es:

$$\frac{y-3}{x-1} = 2$$

se despeja y resulta la ecuación explícita de t:

$$y = 2(x-1)+3 \Longrightarrow y = 2x+1$$

La pendiente de la recta normal n es $-\dfrac{1}{f'(1)} = -\dfrac{1}{2}$.

luego la ecuación de n es:

$$\frac{y-3}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

se despeja y y resulta la ecuación explícita de n

$$y = -\frac{1}{2}(x-1)+3 \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

Observación: Si la pendiente de la tangente en $(x_0\,;y_0)$ es 0, dicha tangente es paralela al eje x, su ecuación es $y = y_0$ y la normal es la recta perpendicular al eje x por ese punto, su ecuación es $x = x_0$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \infty$ la tangente es la perpendicular al eje x por ese punto, su ecuación es $x = x_0$; y la normal es la paralela al eje x de ecuación $y = y_0$.

Ejercicios propuestos

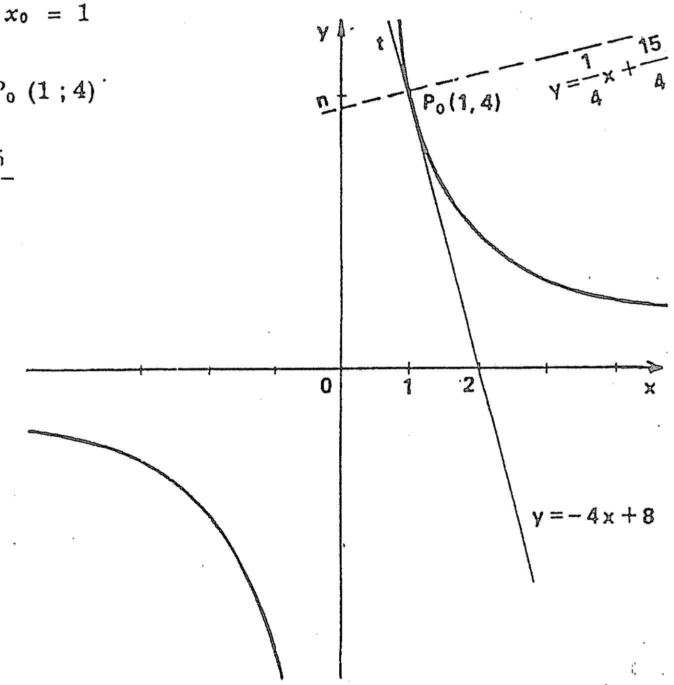
Encontrar la ecuación de la recta tangente t y de la recta normal n de cada una de las siguientes curvas en los puntos que se indican y hacer las gráficas correspondientes:

1°) $f(x) = \dfrac{4}{x}$ en el punto de abscisa $x_0 = 1$

Para $x_0 = 1$ es $y_0 = 4 \Longrightarrow P_0(1\,;4)$

la tangente es $y = -4x + 8$

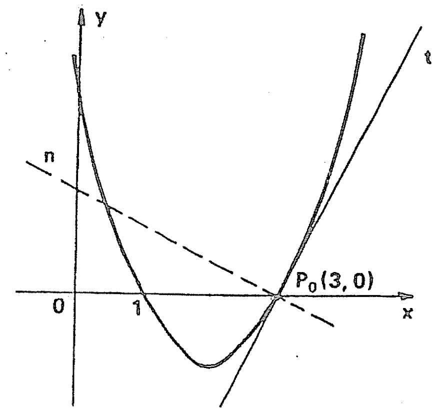
la normal es $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{15}{4}$



(2,1)

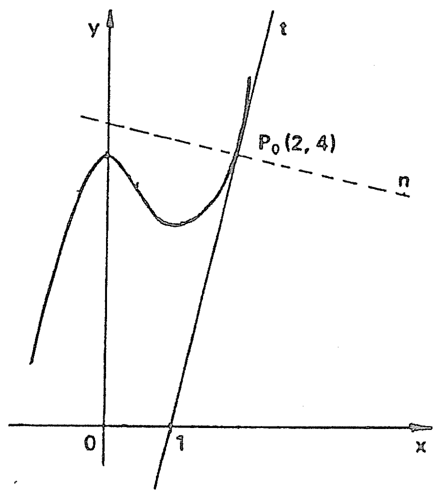
2°) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en el punto de abscisa $x_0 = 3$

Para $x_0 = 3$ es $y_0 = 0 \Longrightarrow P_0\ (3\,;0)$
la tangente es $y = 2x - 6$
la normal es $y = -\dfrac{1}{2}\,x + \dfrac{3}{2}$



3°) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ en el punto de abscisa $x_0 = 2$

Para $x_0 = 2$ es $y_0 = 4 \Longrightarrow P_0\ (2\,;4)$
la tangente es $y = 4x - 4$
la normal es $y = -\dfrac{1}{4}\,x + \dfrac{9}{2}$



4°) $y = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 4$.

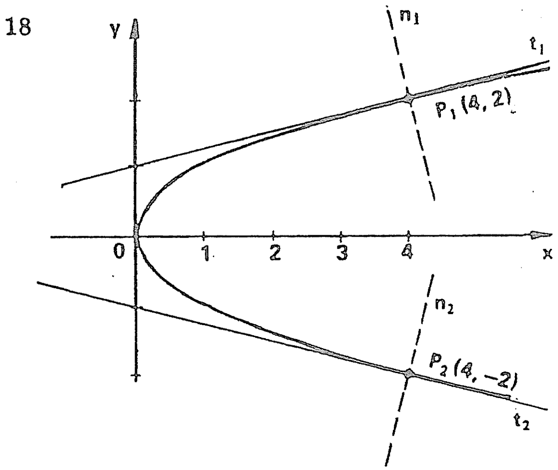
Se consideran las dos ramas, la que corresponde a $+\sqrt{x}$ y la que corresponde a $-\sqrt{x}$

Para $+\sqrt{x}$ si $x_1 = 4$ es $y_1 = 2 \Longrightarrow P_1\ (4\,;2)$
la tangente en P_1 es $y = \dfrac{1}{4}\,x + 1$
la normal en P_1 es $y = -4x + 18$

Para $-\sqrt{x}$ si $x_2 = 4$ es $y_2 = -2 \Longrightarrow P_2\ (4\,;-2)$
la tangente en P_2 es $y = -\dfrac{1}{4}\,x - 1$
la normal en P_2 es $y = 4x - 18$

$\dfrac{y-(-2)}{x-4} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x-4) - 2$



5°) $y = \sqrt{x^2 - 16}$ en el punto de abscisa $x = 5$.

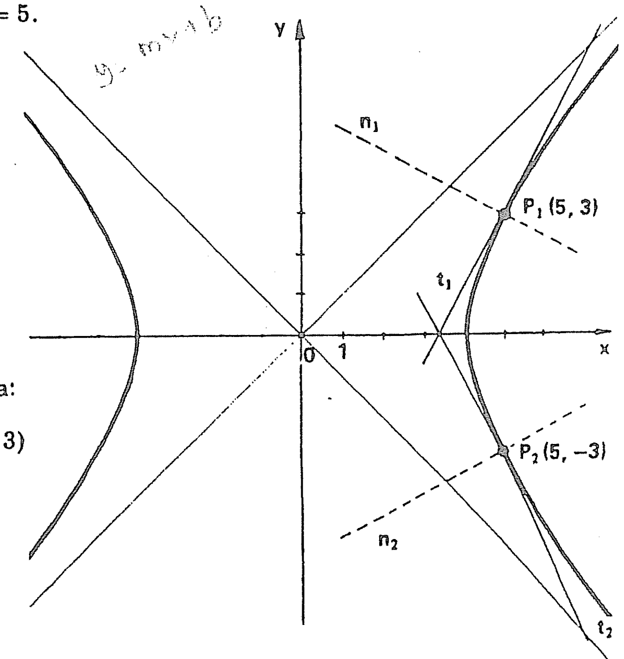
$y = mx + b$

En la rama de ordenada positiva $+\sqrt{\ }$ se verifica:

si $x_1 = 5$ es $y_1 = 3 \Longrightarrow P_1\ (5\,;3)$
la tangente en P_1 es $y = \dfrac{5}{3}\,x - \dfrac{16}{3}$
la normal en P_1 es $y = -\dfrac{3}{5}\,x + 6$

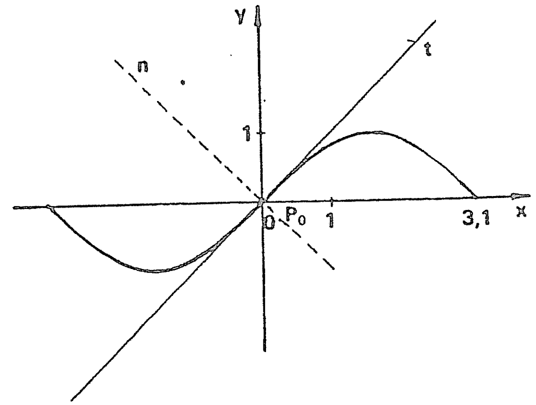
En la rama de ordenada negativa $-\sqrt{x}$ se verifica:

si $x_2 = 5$ es $y_2 = -3 \Longrightarrow P_2\ (5\,;-3)$
la tangente en P_2 es $y = -\dfrac{5}{3}\,x + \dfrac{16}{3}$
la normal en P_2 es $y = \dfrac{3}{5}\,x - 6$



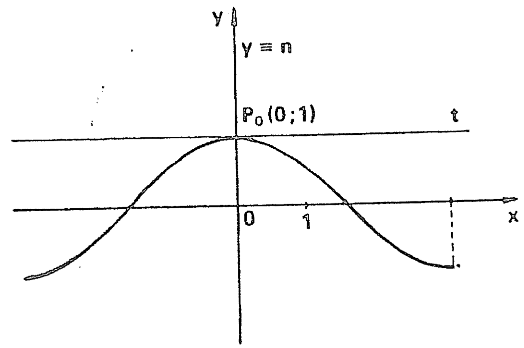
6°) $f(x) = sen\ x$ en el punto de abscisa $x_0 = 0$

Para $x_0 = 0$ es $y_0 = 0 \Longrightarrow P_0\ (0\ ;0)$
la tangente en P_0 es $y = x$
la normal en P_0 es $y = -x$



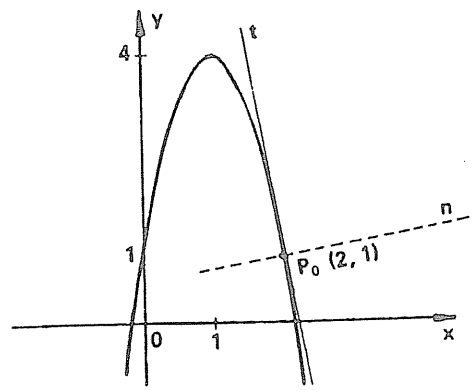
7°) $f(x) = cos\ x$ en el punto de abscisa $x_0 = 0$.

Para $x_0 = 0$ es $y_0 = 1 \Longrightarrow P_0\ (0\ ;1)$
la tangente en P_0 es $y = 1$
la normal en P_0 es $x = 0$



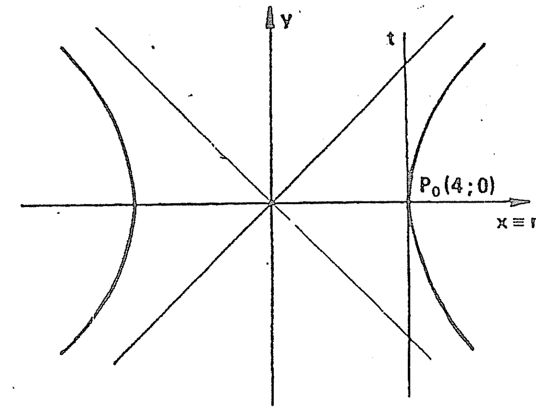
8°) $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$ en el punto de abscisa $x_0 = 2$.

Para $x_0 = 2$ es $y_0 = 1 \Longrightarrow P_0\ (2\ ;1)$
la tangente en P_0 es $y = -6x + 13$
la normal en P_0 es $y = \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$



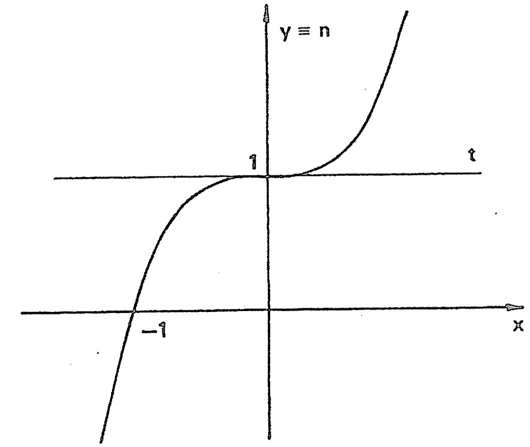
9°) A la curva del ejercicio 5°) $y = \sqrt{x^2 - 16}$ en el punto abscisa $x_0 = 4$.

Para $x_0 = 4$ es $y_0 = 0 \Longrightarrow P_0\ (4\ ;0)$
la tangente en P_0 es $x = 4$
la normal en P_0 es $y = 0$



10°) $f(x) = x^3 + 1$ en el punto de abscisa $x_0 = 0$.

Para $x_0 = 0$ es $y_0 = 1 \Longrightarrow P_0\ (0\ ;1)$
la tangente en P_0 es $y = 1$
la normal en P_0 es $x = 0$



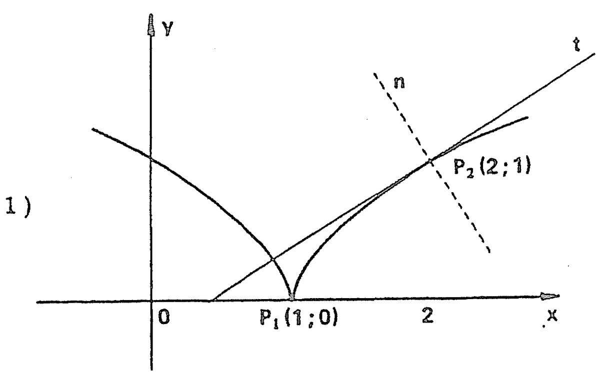
11°) $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$ en los puntos de abscisa $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

Para $x_1 = 1$ es $y_1 = 0 \Longrightarrow P_1\ (1\ ;0)$
en P_1 no hay tangente única.

Para $x_2 = 2$ es $y_2 = 1 \Longrightarrow P_2\ (2\ ;1)$

la tangente en P_2 es $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

la normal en P_2 es $y = -\frac{3}{2}x + 4$



Derivadas sucesivas

Si la función $f(x)$ es derivable, se tiene:

$D\,f(x) = f'(x)$ Si esta derivada es función derivable, se tiene:

$D\,f'(x) = f''(x)$ que se llama derivada segunda de $f(x)$. Si a su vez esta derivada segunda es derivable, se tiene:

$D\,f''(x) = f'''(x)$ que se llama derivada tercera de $f(x)$ y así siguiendo, si las sucesivas derivadas son derivables, se tiene:

$D\,f'''(x) = f^{IV}(x)$

$D\,f^{IV}(x) = f^{V}(x)$

$\vdots \qquad \vdots$

La derivada enésima se indica:

$f^{(n)}(x)$ para no confundirla con la potencia enésima.

En general, las funciones elementales que se presentan en este manual, admiten sucesivas derivadas.

Se comprende también que para la mayoría de las funciones, las sucesivas derivadas son cada vez más complicadas, pero hay excepciones, por ejemplo las sucesivas derivadas de una función polinómica:

Ejemplo:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 8x + 9 \\ f'(x) &= 5x^4 + 8x^3 - 21x^2 + 12x - 8 \\ f''(x) &= 20x^3 - 24x^2 - 42x + 12 \\ f'''(x) &= 60x^2 - 48x - 42 \\ f^{IV}(x) &= 120x - 48 \\ f^{V}(x) &= 120 \end{aligned}$$

y las siguientes sucesivas derivadas f^{VI}; f^{VII}, etc., son todas iguales a 0. Esta observación es general para todas las funciones polinómicas: la derivada de orden igual al grado es un número y todas las siguientes son 0.

Las sucesivas derivadas de la función $sen\,x$ son:

$$\begin{aligned} f'(x) &= cos\,x \\ f''(x) &= -sen\,x \\ f'''(x) &= -cos\,x \\ f^{IV}(x) &= sen\,x \end{aligned}$$

se vuelve a obtener la función $sen\,x$, es decir, las derivadas sucesivas se repiten en períodos de 4. O sea:

$f^{VI}(x) = f''(x) = -sen\,x$ etc.

Algo del todo semejante ocurre con la función coseno.

Las derivadas sucesivas de $f(x) = e^x$ son todas iguales a la función, es decir:

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = f^{IV}(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$$

Nota: a la derivada de la función, se la llama primera derivada o simplemente derivada.

Ejercicio resuelto

Hallar las tres primeras derivadas de la función: $f(x) = e^{2x} + \frac{1}{2}x^4 - cos\,3x + ln\,x$

$$f'(x) = 2e^{2x} + 2x^3 + 3\,sen\,3x + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = 4e^{2x} + 6x^2 + 9\,cos\,3x - \frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = 8e^{2x} + 12x - 27\,sen\,3x + \frac{2}{x^3}$$

Ejercicios propuestos

Hallar la primera, segunda y tercera derivada de cada una de las siguientes funciones:

1°) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 8 \quad \begin{cases} f'(x) = 6x^2 - 2x + 3 \\ f''(x) = 12x - 2 \\ f'''(x) = 12 \end{cases}$

2°) $\varphi(x) = x^2 e^{3x} \quad \begin{cases} \varphi'(x) = 2x e^{3x} + 3e^{3x} x^2 = x e^{3x}(2 + 3x) \\ \varphi''(x) = 2e^{3x} + 6e^{3x}x + 9e^{3x}x^2 + 6x e^{3x} = \\ \quad = e^{3x}\left[2 + 12x + 9x^2\right] \\ \varphi'''(x) = 9e^{3x}\left[2 + 6x + 3x^2\right] \end{cases}$

3°) $g(x) = \ln(x-1) + sen\, 2x \quad \begin{cases} g'(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2\cos 2x \\ g''(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} - 4\, sen\, 2x \\ g'''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3} - 8\cos 2x \end{cases}$

4°) $f(t) = t^3 - \dfrac{1}{t} \quad \begin{cases} f'(t) = 3t^2 + \dfrac{1}{t^2} \\ f''(t) = 6t - \dfrac{2}{t^3} \\ f'''(t) = 6 + \dfrac{6}{t^4} = 6\left(1 + \dfrac{1}{t^4}\right) \end{cases}$

5°) $f(x) = (1-2x)^2 + \sqrt{2x} \quad \begin{cases} f'(x) = -4(1-2x) + \dfrac{1}{\sqrt{2x}} \\ f''(x) = 8 - \dfrac{1}{2x\sqrt{2x}} \\ f'''(x) = \dfrac{3}{4x^2\sqrt{2x}} \end{cases}$

Puntos críticos

Se llaman así aquellos puntos en que la derivada es 0 o no está definida.

Ejemplos:

1°) $f(x) = (1-x)^2$
$f'(x) = 2(1-x)$

La derivada está definida para toda x. Se anula para $x = 1$ luego $x = 1$ es el único punto crítico de la función.

2°) $f(x) = (x-2)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \dfrac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

La derivada no está definida en $x = 2$ porque el denominador resulta 0; y no se anula en ningún punto. Luego el único punto crítico es $x = 2$.

3°) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x^2 - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

La derivada no está definida en $x = 1$; además se anula cuando es cero el numerador, es decir:

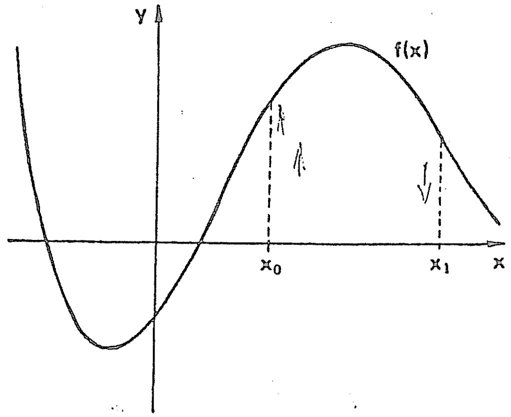
$$x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \implies x = 2 \end{cases}$$

o sea, que se anula en $x = 0$ y en $x = 2$.

Luego esta función tiene 3 puntos críticos que son:

$x = 1$; $x = 0$; $x = 2$, pero $x = 1$ no pertenece al dominio de la función.

Función creciente y función decreciente en un punto



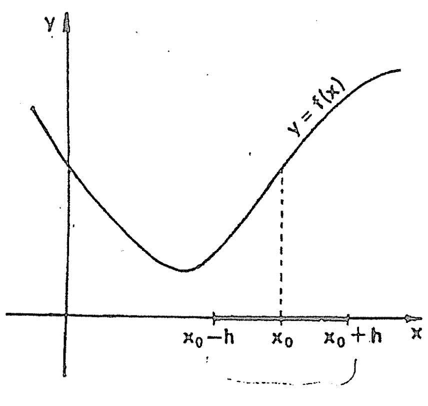
De acuerdo con el significado que en el lenguaje corriente damos a la palabra creciente, crece, aumenta con el tiempo, con la temperatura, etc.; aceptamos intuitivamente que en el punto x_0 la función es creciente, pues al aumentar los valores de x crecen, aumentan los correspondientes de la función $y = f(x)$.

Análogamente, aceptamos que la función es decreciente en x_1.

Es decir que: una función se dice creciente en un punto, cuando el valor que toma la función en ese punto es mayor que los que toma inmediatamente a la izquierda y menor que los que toma inmediatamente a la derecha; al decir inmediatamente a la izquierda y a la derecha, queremos indicar que se refiere a un cierto entorno del punto, pues para valores de x más alejados, puede ocurrir que la condición no se cumpla, por ejemplo, en la función $f(x)$ de la figura, para algunos x negativos, a la izquierda de x_0 la función toma valores mayores que en él.

De acuerdo con estas consideraciones, se da la siguiente:

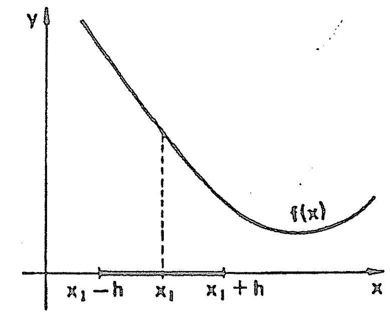
Definición: una función es creciente en un punto x_0, cuando existe un entorno de x_0 de amplitud $2h$, tal que:



$$f(x_2) < f(x_0) < f(x_3) \begin{cases} \forall\ x_2 \ / x_2 < x_0 \quad \wedge \quad x_2 \in E_{x_0} \\ \forall\ x_3 \ / x_3 > x_0 \quad \wedge \quad x_3 \in E_{x_0} \end{cases}$$

Análogamente:

Definición: una función es decreciente, en un punto x_1 cuando existe un entorno de x_1 de amplitud $2h$, tal que:



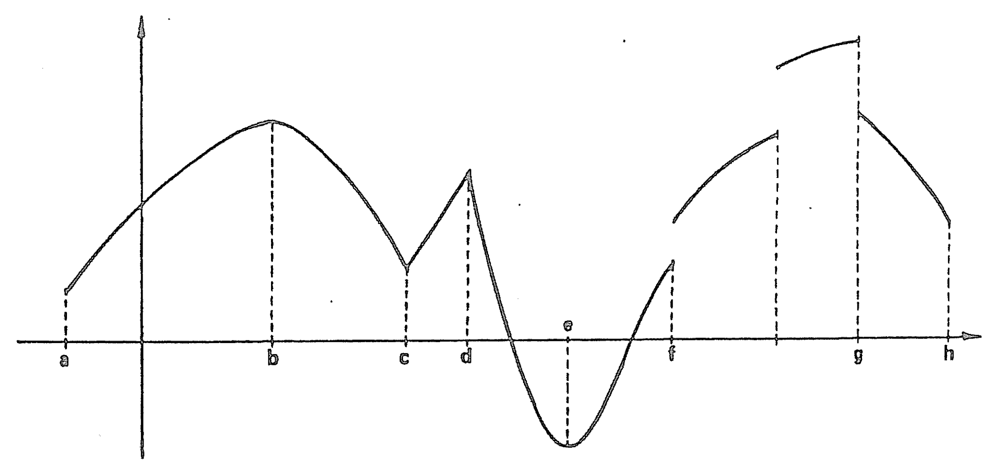
$$f(x_4) > f(x_1) > f(x_5) \begin{cases} \forall\ x_4 \ / x_4 < x_1 \quad \wedge \quad x_4 \in E_{x_1} \\ \forall\ x_5 \ / x_5 > x_1 \quad \wedge \quad x_5 \in E_{x_1} \end{cases}$$

Una función es creciente en un intervalo, cuando lo es en todos los puntos del intervalo.

Es decir: si x_1 y x_2 son dos puntos del intervalo, tales que: $x_1 < x_2$ y se verifica $f(x_1) < f(x_2)$ la función es creciente en el intervalo.

Una función es decreciente en un intervalo, cuando lo es en todo punto del intervalo. Es decir: si x_1 y x_2 son dos puntos del intervalo tales que:

$x_1 < x_2$ y se verifica $f(x_1) > f(x_2)$ la función es decreciente en el intervalo

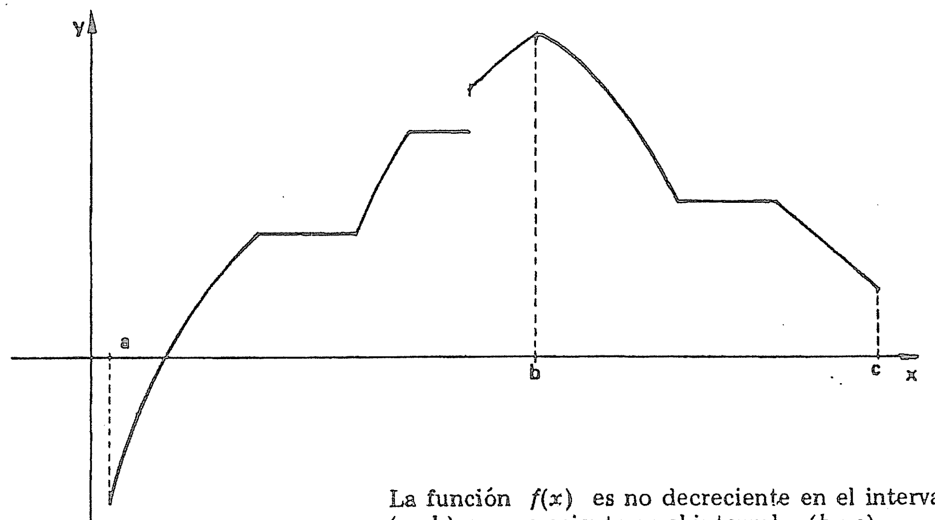


La función $\varphi(x)$ es creciente en los intervalos: $(a; b)$; $(c; d)$ y $(e; g)$.
es decreciente en los intervalos: $(b; c)$; $(d; e)$ y $(g; h)$.

Nota: 1°) Algunos llaman función estrictamente creciente en un intervalo a la que llamamos creciente, y estrictamente decreciente a la que llamamos decreciente.

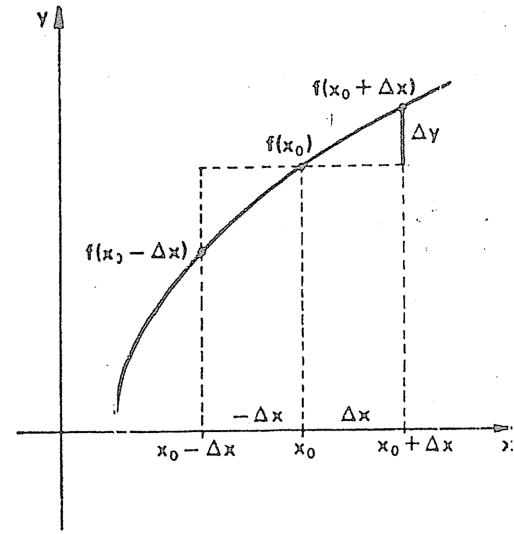
2°) Cuando se acepta el signo $\geqslant$ en vez de $>$ la función se dice no decreciente o creciente en sentido amplio. Análogamente cuando se acepta $\leqslant$ en vez de $<$ se dice no creciente o decreciente en sentido amplio.

Ejemplo:



La función $f(x)$ es no decreciente en el intervalo $(a\,;b)$ y no creciente en el intervalo $(b\,;c)$

Observación: Toda función continua y creciente o decreciente tiene función inversa.



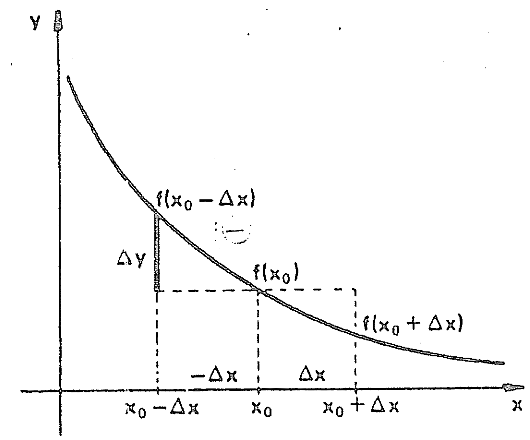
Si una función es creciente en un punto de acuerdo con la definición a un incremento positivo Δx de la variable independiente, le corresponde un incremento positivo Δy, de la función, en efecto: $f(x_0+\Delta x) > f(x_0)$.

En cambio, si Δx es negativo, también lo es Δy; en efecto: $f(x_0-\Delta x) < f(x_0)$.

Es decir: si una función es creciente en un punto el signo de Δy es igual al signo de Δx y recíprocamente; en símbolos

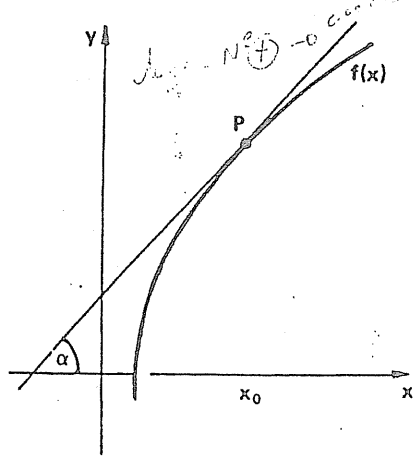
$y = f(x)$ creciente en $x_0 \iff sig\ \Delta y = sig\ \Delta x$

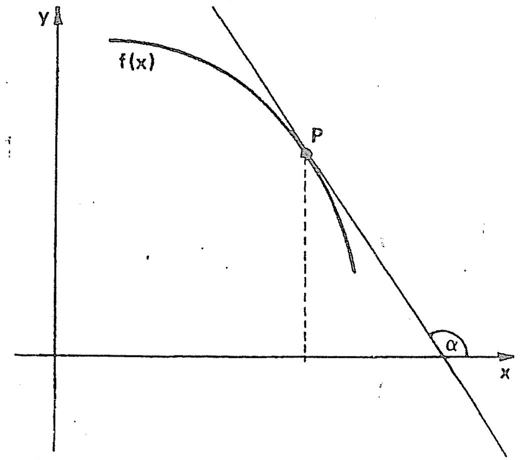
En cambio, una función decreciente en un punto implica que el signo de Δy es distinto del signo de Δx; en símbolos:



$y = f(x)$ es decreciente en $x_0 \iff sig.\ \Delta y \neq sig\ \Delta x$

Dado que la derivada de una función en un punto, es un número que mide la pendiente de la tangente a la curva en dicho punto; si la derivada es positiva la recta tangente determina con el semieje positivo x un ángulo agudo y la función es creciente. Si la derivada es negativa la recta tangente determina con el semieje positivo x un ángulo obtuso y la función es decreciente.





$$f'(x_0) > 0 \implies \begin{cases} \alpha \quad \text{agudo} \\ \text{función creciente} \end{cases}$$

$$f'(x_0) < 0 \implies \begin{cases} \alpha \quad \text{obtuso} \\ \text{función decreciente} \end{cases}$$

Estas observaciones se generalizan en el:

Criterio del signo de la primera derivada, que dice:

Si la derivada de una función en un punto es positiva, la función es creciente en dicho punto; si la derivada es negativa la función es decreciente.

En efecto:

Por definición:

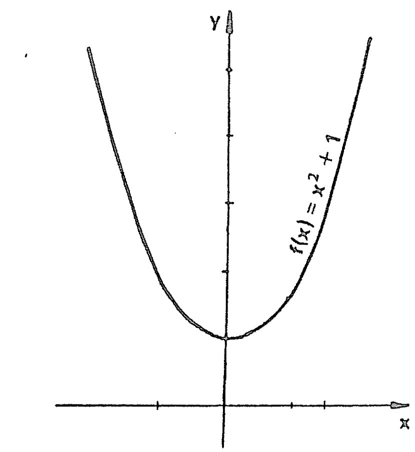
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \begin{cases} \text{Si } f'(x_0) > 0 \implies \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \implies \dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \text{ en un } E_{x_0} \\ \qquad \text{por propiedad de límites} \\ \text{pero } \dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \implies sig\, \Delta y = sig\, \Delta x \implies \text{función creciente en } x_0 \\ \\ \text{Si } f'(x_0) < 0 \implies \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \implies \dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \text{ en un } E_{x_0} \\ \qquad \text{por propiedad de límites} \\ \text{pero } \dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0 \implies sig\, \Delta y \neq sig\, \Delta x \implies \text{función decreciente en } x_0 \end{cases}$$

Ejemplos:

1°)

$f(x) = x^2 + 1$
$f'(x) = 2x$
$2x > 0 \quad \forall\, x > 0 \iff$ la función es creciente para x positivo

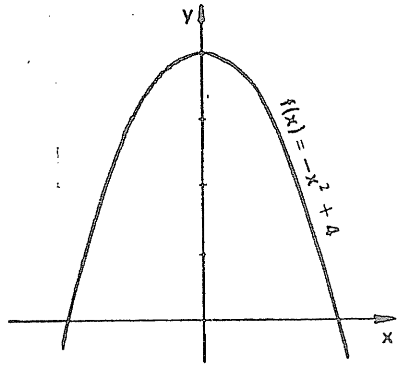
$2x < 0 \quad \forall\, x < 0 \iff$ la función es decreciente para x negativo



2°)

$f(x) = -x^2 + 4$
$f'(x) = -2x$
$-2x > 0 \ \forall \ x < 0 \iff$ la función es creciente para x negativo

$-2x < 0 \ \forall \ x > 0 \iff$ la función es decreciente para x positivo



3°)

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

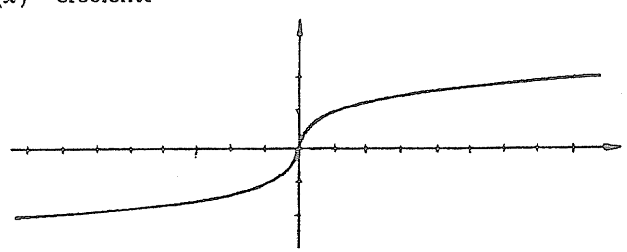
En $x = 0$ no está definida, es punto crítico, se estudia el valor de la función en ese punto y en un entorno del mismo:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \sqrt[3]{0} = 0 \\ \forall \ x < 0 \ \text{es} \ f(x) = \sqrt[3]{x} < 0 \\ \forall \ x > 0 \ \text{es} \ f(x) = \sqrt[3]{x} > 0 \end{array}\right\}$$

Como la función a la izquierda de $x = 0$ es negativa, en $x = 0$ es 0 y a la derecha es positiva resulta que la función es **creciente** en x_0.

Se observa qué ocurre en los otros puntos:

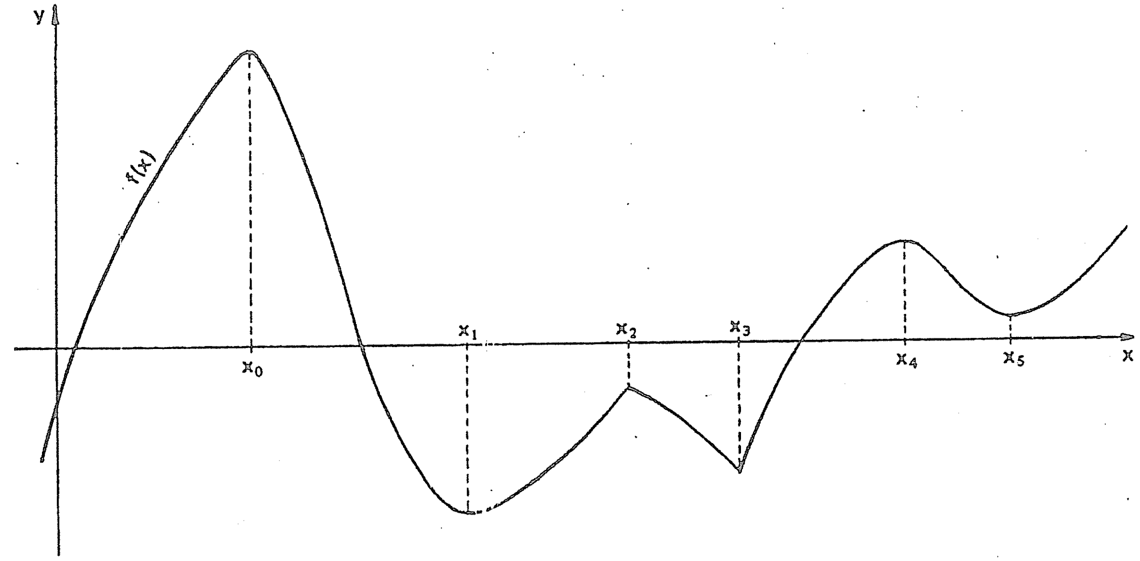
$$\forall \ x \neq 0 \quad \text{es} \ f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0 \implies f(x) \quad \text{creciente}$$



Por lo tanto, esta función es creciente en todos los puntos.

Consideraciones para la existencia de máximos y de mínimos locales o relativos

Dada la función $f(x)$ continua cuya gráfica es la siguiente:



De acuerdo con la definición de máximo y de mínimo relativo o local, que se estudió al considerar función continua, resulta que:

$f(x)$ alcanza un máximo local en los 3 puntos que corresponden a x_0 ; x_2 ; x_4 ; se observa que a la izquierda de cada uno de esos puntos la función es creciente y a la derecha es decreciente.

En símbolos: máximo relativo o local:

$$f(x) \ \text{tiene un máximo local en} \ x_0 \implies \text{para un} \ E_{x_0} \ \text{se verifica} \ \forall \ x \in E_{x_0} \ \wedge \ x \neq x_0 \ \text{es} \ f(x_0) > f(x)$$

o bien:

$$f(x) \ \text{tiene un máximo local en} \ x_0 \implies \text{para un} \ E_{x_0} \ \left\{\begin{array}{l} f(x_1) \ \text{es creciente} \ \forall \ x_1 \in E_{x_0} \ \wedge \ x_1 < x_0 \\ \\ f(x_2) \ \text{es decreciente} \ \forall \ x_2 \in E_{x_0} \ \wedge x_2 > x_0 \end{array}\right.$$

En cambio, $f(x)$ alcanza un mínimo relativo o local en los 3 puntos que corresponden a x_1 ; x_3 ; x_5 ; se observa que la función es decreciente a la izquierda de cada uno de esos puntos y pasa a ser creciente a la derecha.

En símbolos: mínimo relativo o local

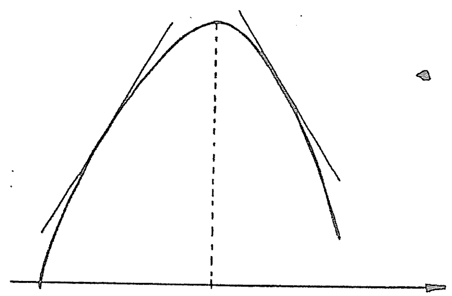
$f(x)$ tiene un mínimo local en $x_1 \iff$ para un E_{x_1} se verifica $\forall x \in E_{x_1} \wedge x \neq x_1$ es $f(x_1) < f(x)$

o bien:

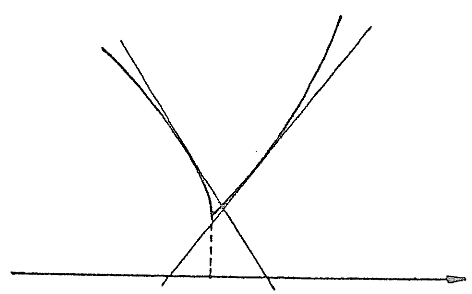
$$f(x) \text{ tiene un mínimo local en } x_1 \iff \text{para un } E_{x_1} \text{ es} \begin{cases} f(x_2) \text{ decrec. } \forall x_2 \in E_{x_1} \wedge x_2 < x_1 \\ f(x_2) \text{ creciente } \forall x_2 \in E_{x_1} \wedge x_2 > x_1 \end{cases}$$

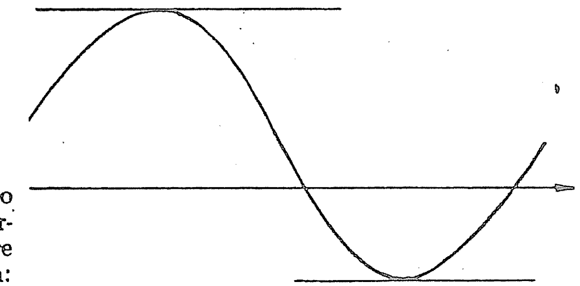
Como consecuencia de las observaciones resulta que:

Si a la izquierda de un punto la derivada es positiva y a la derecha del mismo es negativa, en ese punto existe un máximo relativo.



Si a la izquierda del punto la derivada es negativa, y a la derecha es positiva, en ese punto existe un mínimo local.





Si además, en el punto en que existe máximo o mínimo local, la curva tiene tangente, se observa que dicha recta tangente es horizontal, quiere decir que la derivada en él debe ser cero, o sea:

Si en el punto en que la función alcanza un máximo o un mínimo local, existe derivada, ésta debe ser cero.

En efecto:

Si existe $f'(x_0)$ es un número y por lo tanto debe ser positivo, negativo o cero.

No puede ser positivo, pues:

Si $f'(x_0) > 0 \Longrightarrow f(x)$ creciente en x_0, no hay ni máximo ni mínimo.

No puede ser negativo, pues:

Si $f'(x_0) < 0 \Longrightarrow f(x)$ decreciente en x_0, no hay máximo ni mínimo.

Por lo tanto, si no puede ser ni positivo ni negativo, debe ser cero.

Es decir:

$$\boxed{f(x) \text{ tiene máximo o mínimo local en } x_0 \text{ y existe } f'(x_0) \implies f'(x_0) = 0}$$

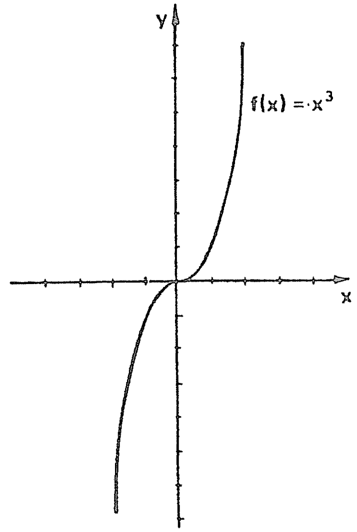
Pero esta condición que se anule la primera derivada, que es necesaria, indispensable, para que en el punto haya máximo o mínimo, no basta, no es suficiente, pues hay casos en que la derivada en el punto es 0 y no hay máximo ni mínimo relativo.

Ejemplo:

$f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$

En el origen es:

$f'(0) = 3 \cdot 0 = 0$



y sin embargo, esta función es la parábola cúbica, que en el origen es creciente.

Luego, además de anularse la primera derivada, para que haya máximo o mínimo se deben cumplir las condiciones impuestas al signo de esa derivada a la izquierda y a la derecha del punto.

Sobre esta base, hay un criterio muy cómodo para aplicarlo en la práctica, que se llama de la segunda derivada y que dice:

Si en el punto en que se anula la primera derivada, la segunda derivada es distinta de cero, hay un máximo o un mínimo local. Hay máximo si la segunda derivada es negativa y hay un mínimo, si la segunda derivada es positiva.

En efecto, $f''(x)$ es la derivada de $f'(x)$ por lo tanto:

Si $f''(x)$ es negativa resulta que $f'(x)$ es decreciente en el punto en que vale 0, luego debe ser positiva a la izquierda, función creciente, negativa a la derecha, función decreciente, que es la condición para la existencia de máximo local.

Si $f''(x)$ es positiva resulta que $f'(x)$ es creciente en el punto en que vale 0, luego debe ser negativa a la izquierda, función decreciente; positiva a la derecha, función creciente, que es la condición de existencia de mínimo local.

En símbolos:

$$f'(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_0) \neq 0 \begin{cases} f''(x_0) < 0 \implies f(x) \text{ tiene un máximo local en } x_0 \\ f''(x_0) > 0 \implies f(x) \text{ tiene un mínimo local en } x_0 \end{cases}$$

Procedimientos para determinar los máximos y los mínimos locales o relativos de una función derivable

De acuerdo con las consideraciones hechas, dada la función derivable $f(x)$, se procede así:

1°) Se obtiene $f'(x)$

2°) Se iguala a cero, es decir $f'(x) = 0$ y se determinan los valores de x que satisfacen a esta ecuación.

3°) Se obtiene $f''(x)$ y se calcula su valor para cada uno de los valores de x que anulan a $f'(x)$. Si en ellos $f''(x) \neq 0$ hay máximo o mínimo local. Si en alguno de ellos $f''(x) = 0$ se determina el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha, si cambia el signo hay máximo o mínimo, si no cambia de signo no hay ni máximo ni mínimo. Otra forma es calcular el valor de la función en ese punto a la derecha y a la izquierda.

4°) Si $f'(x)$ no está definida en algún punto, se procede como en el caso anterior, se calcula el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha del punto. O sino se calcula el valor de la función a la izquierda y a la derecha y así se determina si hay o no máximo o mínimo.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1°

Determinar en qué punto alcanza un máximo o un mínimo relativo la función

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

Se halla la derivada:

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$ se iguala a cero

$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$ se resuelve esta ecuación, es decir se encuentran los valores de x que anulan la derivada. Para trabajar con números menores, se divide por 4 y se tiene:

$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ Se saca x factor común

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \implies x_1 = 0 \\ \text{o bien} \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases} \end{cases}$$

uno de los dos factores debe ser cero.

Es decir: la derivada está definida para todo x y se anula en los 3 puntos 0; 1; 2; en ellos puede haber máximo o mínimo local, para saberlo se obtiene la segunda derivada:

$f''(x) = 12x^2 - 24x + 8$ se calcula qué valores toma en 0; 1 y 2:

$f''(0) = 8 > 0 \implies$ para $x = 0$ hay mín. local

$f''(1) = 12 - 24 + 8 = -4 < 0 \implies$ para $x = 1$ hay máximo local

$f''(2) = 12 \cdot 4 - 24 \cdot 2 + 8 = 8 > 0 \implies$ para $x = 2$ hay mínimo local.

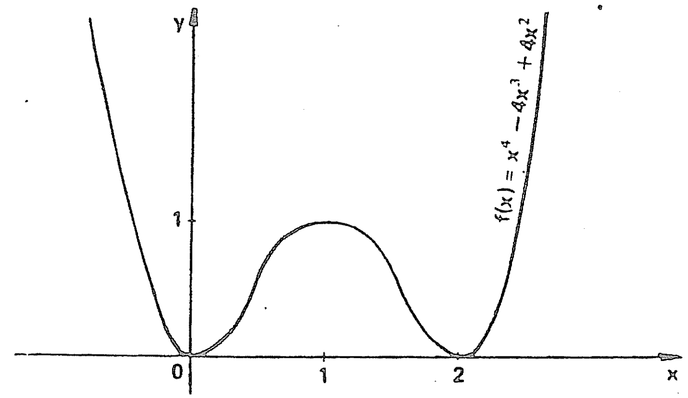
Conviene conocer los valores que toma la función en esos puntos:

En los mínimos locales $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = 16 - 32 + 16 = 0 \end{cases}$

En el máximo local $f(1) = 1$

Los mínimos relativos, son también absolutos, porque 0 es el menor valor que toma la función, pues no toma valores negativos, dado que en los puntos interiores y en los exteriores, del intervalo $[0, 2]$ en cuyos extremos se anula, la función toma valores positivos. En cambio, el máximo relativo no es absoluto, pues para $x \longrightarrow \pm\infty$ la función también tiende a ∞.

Luego, la gráfica de la función es:



Es creciente para $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$

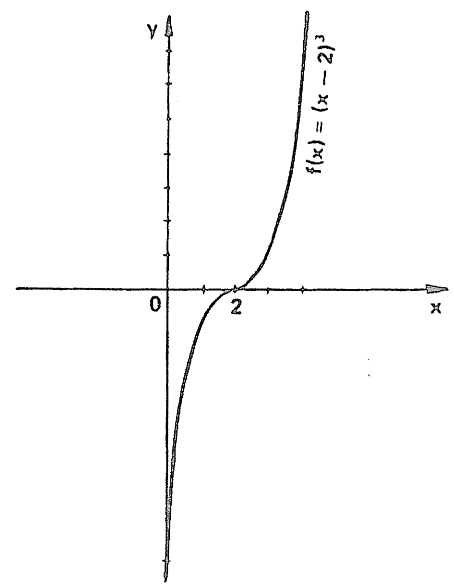
Es decreciente para $\begin{cases} x < 0 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$

Observación: siempre conviene, como se ha hecho en este ejemplo, estudiar los máximos y los mínimos absolutos de la función, pues en los problemas en general, hay que averiguar, qué valores de x atribuyen a la función el mayor o menor valor, ya sea en todo el dominio o en un intervalo prefijado.

Ejemplo 2°

$f(x) = (x-2)^3$

$f'(x) = 3(x-2)^2$



$f'(x) = 0 \implies 3(x-2)^2 = 0 \implies x_1 = 2$. Es decir, la derivada se anula en 2 y es el único punto crítico, pues está definida para todo x. Se obtiene la segunda derivada:

$$f''(x) = 6(x-2)$$

se calcula su valor en $x_1 = 2$; $f''(2) = 0$, no se puede aplicar el criterio de la segunda derivada. Se estudia el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de 2, pero esta primera derivada $f'(x) = 3(x-2)^2$ excepto en $x = 2$ es siempre positiva, pues la diferencia del paréntesis figura al cuadrado, luego la derivada no cambia de signo a la izquierda y a la derecha de $x_1 = 2$ por lo tanto en ese punto no hay ni máximo ni mínimo local. La función es 0 en $x_1 = 2$ pues $f(2) = (2-2)^3$; es negativa a la izquierda de 2 y positiva a la derecha.

Como la derivada es siempre positiva la función es creciente en todo el dominio.

No se puede hablar de máximo y de mínimo absoluto en el dominio, pues:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x-2)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x-2)^3 = +\infty$$

Ejemplo 3°

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

para obtener la derivada es cómodo dar a la función fórmula de potencia, es decir:

$$f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$$

La derivada es:

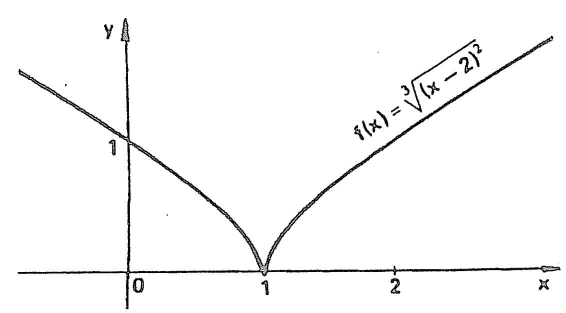
$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

Esta derivada nunca es 0, además no está definida en $x = 1$ pues para $x = 1$ anula el denominador. Por lo tanto, 1 es el único punto crítico. Luego hay que estudiar el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de 1.

Para $x < 1$ es $(x-1)$ negativa $\Longrightarrow \sqrt[3]{x-1} < 0 \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} < 0$

Para $x > 1$ es $(x-1)$ positiva $\Longrightarrow \sqrt[3]{x-1} > 0 \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} > 0$

Derivada negativa a la izquierda y positiva a la derecha, implica que para $x = 1$ hay mínimo local.



Como la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ es 0 para $x = 1$ pues $f(1) = \sqrt[3]{(1-1)^2} = 0$ y es positiva para todos los otros valores de x, resulta que el valor 0 que toma en $x = 1$ es a la vez mínimo absoluto.

No se puede hablar de máximo absoluto porque: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$.

Es decreciente a la izquierda de 1
Es creciente a la derecha de 1

Ejemplo 4°

$$f(x) = x + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 1 + x^{-\frac{1}{3}}$$

o sea:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

se iguala a 0 la derivada y se tiene:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -1 \Longrightarrow$$

$$x = -1 \quad \text{pues} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{-1}} = -1$$

luego $x_1 = -1$ anula la primera derivada. Además esta derivada no está definida en $x = 0$. Luego, los dos puntos críticos son -1 y 0. Se calcula la segunda derivada:

$$f''(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

o sea:

$$f''(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$$

Se calcula el valor de $f''(x)$ en $x_1 = -1$

$$f''(-1) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(-1)^4}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{1}} = -\frac{1}{3} < 0 \iff \text{para } x_1 = -1 \text{ hay máximo local.}$$

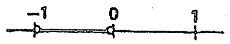
En este punto la función toma el valor:

$$f(-1) = -1 + \frac{3}{2}(-1)^{-\frac{2}{3}} = -1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{(-1)^2} = -1 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{1} = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$ que

no es máximo absoluto pues para $x \longrightarrow +\infty$ la función $\longrightarrow +\infty$.

En el otro punto crítico $x = 0$ en que no está definida la primera derivada; se estudia el signo de ella a ambos lados de 0 y se observa que:

A la izquierda de 0 pero a la derecha de -1 que es el otro punto crítico, o sea para $-1 < x < 0$



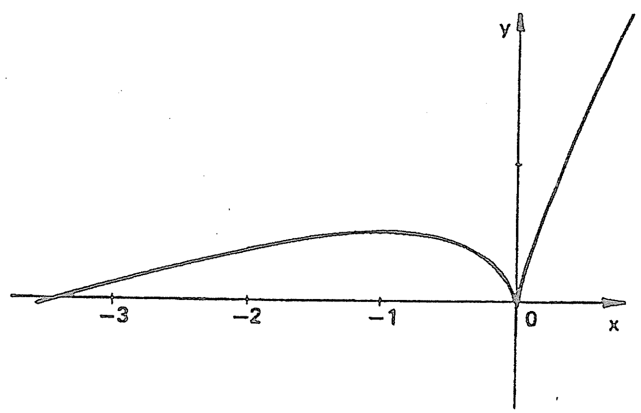
resulta $f'(x) < 0$, en efecto, para esos valores de x la $\sqrt[3]{x}$ es negativa y en valor absoluto < 1, por ejemplo para $x = -0{,}001$ es $\sqrt[3]{-0{,}001} = -0{,}1 \Longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{-0{,}001}} = \dfrac{1}{-0{,}1} =$

$= -10.$

Luego, $f'(-0{,}001) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{-0{,}001}} = 1 - 10 = -9 < 0 \Longrightarrow$ función decreciente.

En cambio, a la derecha de 0 o sea para valores de x positivos los dos términos de $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ son positivos, luego $f'(x) > 0 \Longrightarrow$ función creciente.

Decreciente a la izquierda de 0 y creciente a la derecha, quiere decir que para $x = 0$ corresponde un mínimo local.



En ese punto la función vale 0, pues $f(0) = 0$ que no es mínimo absoluto, pues la función toma valores negativos, como se ve más adelante.

Veamos en qué puntos se anula la función:

$$f(x) = x + \frac{3}{2}\, x^{\frac{2}{3}} = 0 \Longrightarrow x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\right) = 0$$ uno de los dos factores debe ser 0.

$$\text{es decir: } \begin{cases} x^{\frac{2}{3}} = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ \text{o bien} \\ x^{\frac{1}{3}} + \dfrac{3}{2} = 0 \Longrightarrow x^{\frac{1}{3}} = -\dfrac{3}{2} \Longrightarrow x = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^3 = -\dfrac{27}{8} \end{cases}$$

luego la función se anula en $x = 0$ que ya lo sabemos, y en $x = -\dfrac{27}{8}$; son los dos puntos comunes a la curva y al eje x.

A la izquierda de $x = -\dfrac{27}{8}$ la función es negativa, por ejemplo para $x = -8 < -\dfrac{27}{8}$ es:

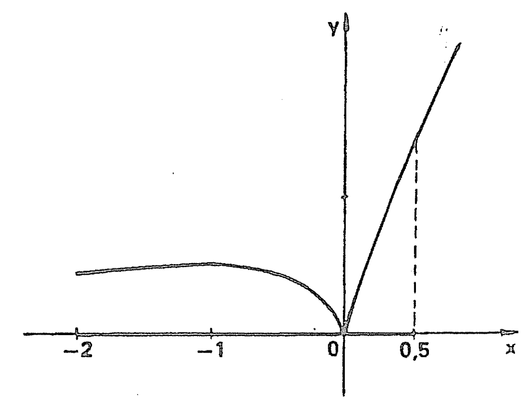
$$f(-8) = -8 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{(-8)^2} = -8 + \frac{3}{2}\cdot 4 = -8 + 6 = -2$$

valor negativo. Por lo tanto, efectivamente 0 no es mínimo absoluto.

La función es creciente a la izquierda de -1 y a la derecha de 0; es decreciente en el intervalo $(-1\,;0)$.

Nota: si se fija el intervalo $[-2\,;0{,}5]$ en el extremo -2 la función toma el valor

$$f(-2) = -2 + \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{(-2)^2} =$$
$$= -2 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$
$$f(-2) \simeq -2 + \frac{3}{2}\cdot 1{,}6 = 0{,}4$$



En el extremo 0,5 la función toma el valor:

$$f(0{,}5) = 0{,}5 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{0{,}5^2} = 0{,}5 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{0{,}25} \simeq 0{,}5 + \frac{3}{2}\cdot 0{,}6$$

Luego el máximo absoluto en ese intervalo, lo alcanza la función en el extremo 0,5 y el mínimo absoluto en 0.

Ejercicios propuestos

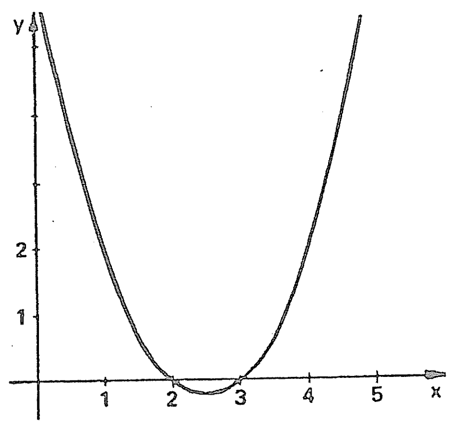
Determinar en qué puntos alcanzan máximos y mínimos absolutos y locales, si es que los hay, cada una de las siguientes funciones. Hacer las gráficas en los casos que se indica.

Para resolver estos problemas conviene: 1°) determinar el dominio; 2°) determinar los puntos críticos; 3°) aplicar si es posible el criterio que establece que la primera derivada debe ser 0 y la segunda derivada distinta de 0; 4°) en los puntos críticos en que no es aplicable el criterio anterior, determinar el signo de la primera derivada a la izquierda y a la derecha del punto.

1°) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

Rta.: $D = R$. Para $x = \frac{5}{2}$ corresponde mínimo local como para $x = \frac{5}{2}$ es $y = -\frac{1}{4} \Longrightarrow$ en $P\left(\frac{5}{2} ; -\frac{1}{4}\right)$ hay mínimo local.

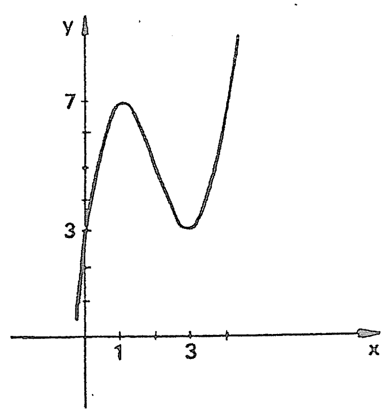
El mínimo local $-\frac{1}{4}$ es absoluto.



2°) $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

Rta.: $D = R$. Para $x_1 = 1$ corresponde máximo local. Para $x_2 = 3$ corresponde mínimo local.

Como para $x_1 = 1$ es $y_1 = 7$ en P (1 ; 7) hay máximo local, como para $x_2 = 3$ es $y_2 = 3$ en Q (3 ; 3) hay mínimo local. No son absolutos.



3°) $g(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$

Rta.: $D = R$. Para $x_1 = -1$ corresponde mínimo local.

Para $x_2 = \frac{3}{2}$ corresponde máximo local.

Como para $x_1 = -1$ es $y_1 = -11$ en $P(-1 ; -11)$ hay mínimo local.

Como para $x_2 = \frac{3}{2}$ es $y_2 = \frac{81}{4}$ en $\left(\frac{3}{2} ; \frac{81}{4}\right)$ hay máximo local.

No son absolutos.

4°) $f(x) = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 6x + 8$

Rta.: $D = R$. Para $x_1 = -3$ corresponde máximo local.

Para $x_2 = 2$ corresponde mínimo local.

Como para $x_1 = -3$ es $y_1 = \frac{43}{2}$ en $P\left(-3 ; \frac{43}{2}\right)$ hay máximo local.

Como para $x_2 = 2$ es $y_2 = \frac{2}{3}$ en $Q\left(2 ; \frac{2}{3}\right)$ hay mínimo local.

5°) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

Rta.: $D = R$.

Para $x_1 = -2$ corresponde mín. local.

Para $x_2 = -\frac{1}{2}$ corresponde máx. local.

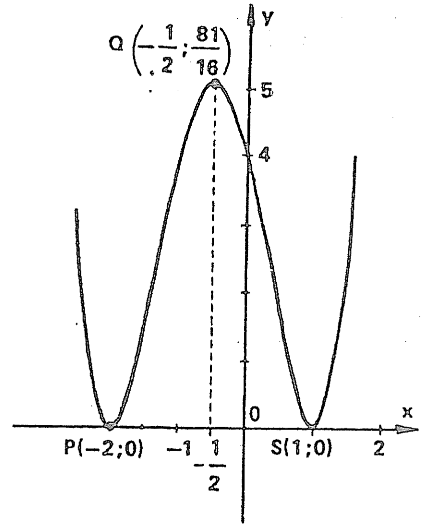
Para $x_3 = 1$ corresponde mín. local.

Como para $x_1 = -2$ es $y_1 = 0$ en P $(-2 ; 0)$ hay mínimo local.

Como para $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ es $y_2 = \dfrac{81}{16}$ en Q $\left(-\dfrac{1}{2} ; \dfrac{81}{16}\right)$ hay máximo local.

Como para $x_3 = 1$ es $y_3 = 0$ en S $(1 ; 0)$ hay mínimo local.

El valor 0 en P y S corresponde a mínimo absoluto.



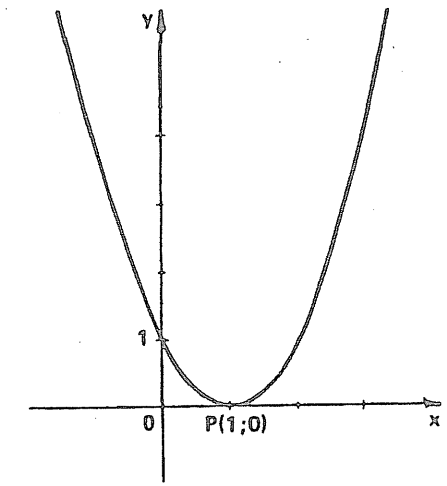
6°) $\varphi(x) = x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 9$

Rta.: $D = R$. Para $x_1 = 0$ corresponde máximo local.
Para $x_2 = -5$ corresponde mínimo local.
Para $x_3 = 2$ corresponde mínimo local.

Como para $x_1 = 0$ es $y_1 = 9$ en P $(0 ; 9)$ hay máximo local.
Como para $x_2 = -5$ es $y_2 = -360$ en Q $(-5 ; -360)$ hay mínimo local.
Como para $x_3 = 2$ es $y_3 = -23$ en S $(2 ; -23)$ hay mínimo local.

El valor -360 que corresponde a $x = -5$ es mínimo absoluto.

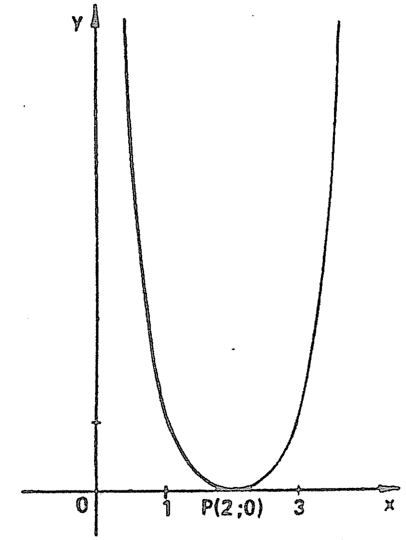
7°) $f(x) = (x-1)^2$



Rta.: $D = R$. Para $x = 1$ corresponde un mínimo local. Como para $x = 1$ es $y = 0$ en P $(1 ; 0)$ hay un mínimo local.

El valor 0 que toma en P es mínimo absoluto.

8°) $f(x) = (x-2)^4$



Rta.: $D = R$. Para $x = 2$ corresponde un mínimo relativo. Como para $x = 2$ es $y = 0$ en P $(2 ; 0)$ hay un mínimo relativo.

El valor 0 en $x = 2$ es mínimo absoluto.

9°) $\varphi(x) = \sqrt{25 - 4x^2}$

Rta.: El dominio está constituido por los números reales x tales que:

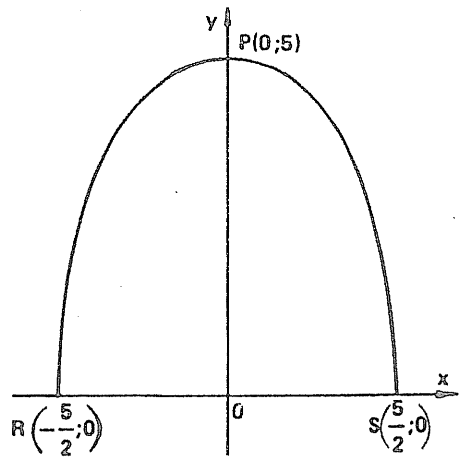
$$25 - 4x^2 \geqslant 0 \implies -\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}.$$

Para $x = 0$ corresponde un máximo local.

Como para $x = 0$ es $y = 5$ en P $(0\,;5)$ hay máximo local.

Este valor 5 es máximo absoluto.

En los extremos del dominio $-\dfrac{5}{2}$ y $\dfrac{5}{2}$ la función toma el valor 0 que es mínimo absoluto.



10°) $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

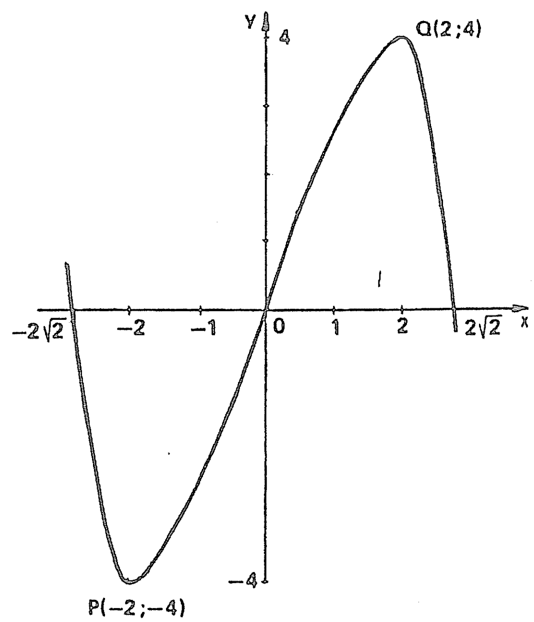
Rta.: El dominio está formado por todos los números reales x tales que:

$$x^2 \leqslant 8 \implies -2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2}.$$

Para $x_1 = -2$ corresponde un mínimo local. Para $x_2 = 2$ corresponde un máximo local.

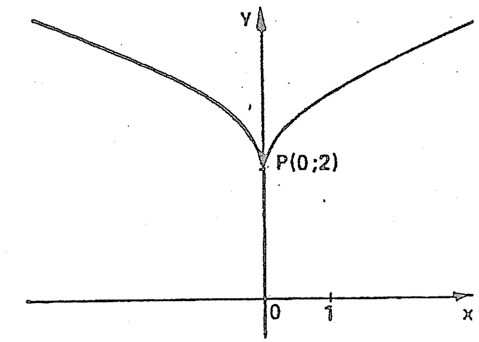
Como para $x_1 = -2$ es $y_1 = -4$ en P $(-2\,;4)$ hay mínimo local.

Como para $x_2 = 2$ es $y_2 = 4$ en Q $(2\,;4)$ hay máximo local.



El valor -4 que toma en $x = -2$ es mínimo absoluto; y el valor 4 que toma en $x = 2$ es máximo absoluto, pues en cada uno de los extremos del dominio $-2\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$ la función toma valor 0.

11°) $f(x) = 2 + x^{\frac{2}{3}}$



Rta.: $D = R$. Para $x = 0$ corresponde un mínimo local.

Como para $x = 0$ es $y = 2$; en P $(0\,;2)$ hay mínimo local.

El valor 2 es también el mínimo absoluto.

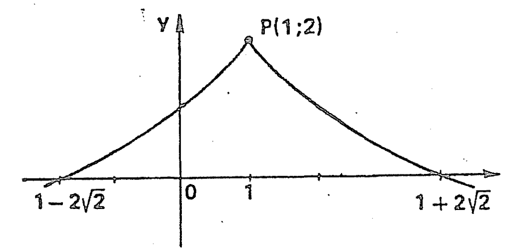
12°) $f(x) = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

Rta.: $D = R$.

Para $x = 1$ corresponde un máximo local.

Como para $x = 1$ es $y = 2 \implies$ en P $(1\,;2)$ hay máximo local.

El valor 2 es máximo absoluto.



13°) $\varphi(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

Rta.: El dominio está formado por todos los números reales excepto -2 y -1.

Para $x_1 = -\sqrt{2}$ corresponde máximo local.

Como para $x_1 = -\sqrt{2}$ es $y_1 = -17 - 12\sqrt{2}$ es P$\left(-\sqrt{2}\,;17 - 12\sqrt{2}\right)$

En P hay máximo local.

Para $x_2 = +\sqrt{2}$ corresponde mínimo local.

Como para $x_2 = +\sqrt{2}$ es $y_2 = -17 + 12\sqrt{2}$ es Q$\left(+\sqrt{2}\,;-17 + 12\sqrt{2}\right)$

En Q hay mínimo local.

14°) $f(x) = 6\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}$

Rta.: $D = R.$

Para $x = 27$ corresponde un máximo local.

Como para $x = 27$ es $y = 9 \Longrightarrow P(27 ; 9)$

En P hay un máximo local.

Este valor 9 es a la vez máximo absoluto.

15°) $f(x) = \dfrac{-x}{(x^2 + 2)^2}$

Rta.: $D = R.$

Para $x_1 = -\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ corresponde un máximo local.

Como para $x_1 = -\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ es $y_1 = \dfrac{6\sqrt{6}}{169} \Longrightarrow P\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6} ; \dfrac{6\sqrt{6}}{169}\right)$

En P hay máximo local.

Para $x_2 = +\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ corresponde mínimo local.

Como para $x_2 = +\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ es $y_2 = \dfrac{-6\sqrt{6}}{169} \Longrightarrow Q\left(+\dfrac{\sqrt{6}}{6} ; -\dfrac{6\sqrt{6}}{169}\right)$

En Q hay mínimo local.

16°) $f(x) = x^2\,(2 - x)^2$

Rta.: $D = R.$

Para $x_1 = 0$ corresponde mínimo local

Como para $x_1 = 0$ es $y_1 = 0 \Longrightarrow P(0 ; 0)$

En P hay mínimo local.

Para $x_2 = 1$ corresponde máximo local

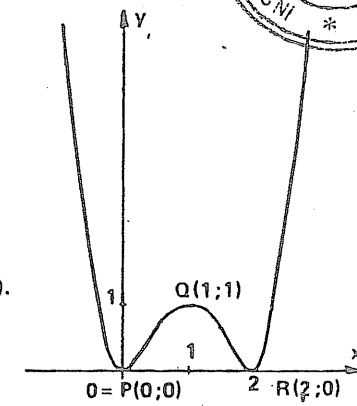
Como para $x_2 = 1$ es $y_2 = 1 \Longrightarrow Q(1 ; 1).$

En Q hay máximo local.

Para $x_3 = 2$ corresponde mínimo local.

Como para $x_3 = 2$ es $y_3 = 0 \Longrightarrow S(2 ; 0).$

En S hay máximo local.



17°) $\varphi(x) = \dfrac{x^2 - 12}{x - 6}$

Rta.: El dominio está formado por todos los números reales excepto 6.

Para $x_1 \simeq 10{,}9$ corresponde mínimo local.

Como para $x_1 = 10{,}9$ es $y_1 = 21{,}8 \Longrightarrow P(10{,}9 ; 21{,}8)$

En P hay mínimo local.

Para $x_2 \simeq 1{,}1$ corresponde máximo local.

Como para $x_2 = 1{,}1$ es $y_2 = 2{,}2 \Longrightarrow Q(1{,}1 ; 2{,}2).$

En Q hay máximo local.

18°) $\varphi(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - x - 12}$

Rta.: El dominio está formado por todos los números reales excepto -3 y 4.
No tiene ni máximo ni mínimo local.

19°) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$

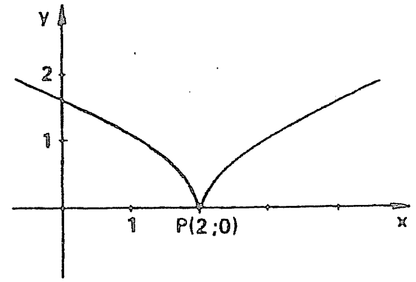
Rta.: $D = R$.

Para $x = 2$ corresponde un mínimo local.

Como para $x = 2$ es $y = 0 \Longrightarrow P(2\,;0)$.

En P hay un mínimo local.

El valor 0 es mínimo absoluto.



Determinar los máximos y mínimos locales y absolutos si es que los hay, de cada una de las siguientes funciones y en los intervalos que se indican

1°) $f(x) = -x^4 + 2x^2$ en el intervalo $[-2\,;2]$

Rta.: Para $x_1 = 0$ corresponde mínimo local.

Como para $x_1 = 0$ es $y_1 = 0 \Longrightarrow P(0\,;0)$.

En P hay un mínimo local.

Para $x_2 = 1$ corresponde máx. local

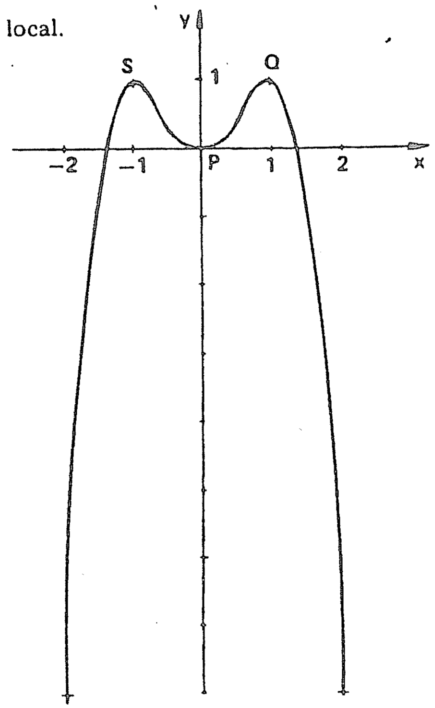
Para $x_3 = -1$ corresponde máx. local

Como para $x_2 = 1$ y $x_3 = -1$ corresponde $y_2 = y_3 = 1$ es $Q(1\,;1)$ y $S(-1\,;1)$.

En Q y en S existe máximo local.

El valor 1 que lo alcanza en 2 puntos del intervalo $[-2\,;2]$ es máximo absoluto.

El mínimo absoluto -8 lo alcanza en los extremos del intervalo $[-2\,;2]$.



2°) $\varphi(x) = x^4 - 8x^2 + 2$ en el intervalo $[-3\,;3]$

Rta.: Para $x_1 = 0$ corresponde máximo local.

Como para $x_1 = 0$ es $y_1 = 2 \Longrightarrow P(0\,;2)$.

En P hay máximo local.

Para $x_2 = 2$ corresponde mín. local.

Para $x_3 = -2$ corresp. mín. local.

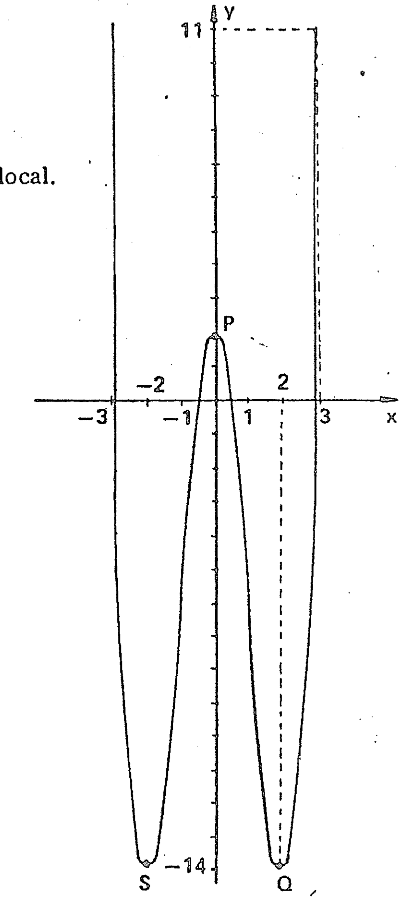
Como para $x_2 = 2$ y para $x_3 = -2$ es $y_2 = y_3 = -14$.

es $Q(2\,;-14)$ y $S(-2\,;-14)$.

En Q y en S hay mínimo local.

El valor -14 que lo alcanza en 2 y en -2 es mínimo absoluto.

El máximo absoluto que es 11 lo alcanza en los extremos del intervalo -3; y 3.



3°) $f(x) = \dfrac{x^2 - 27}{x - 6}$ en el intervalo $[-3\,;4]$

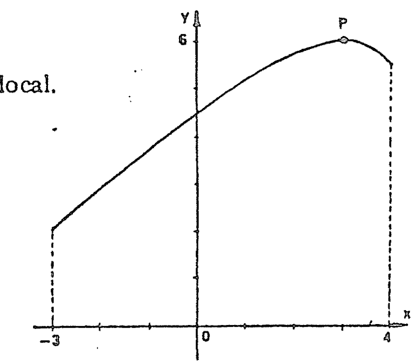
Rta.: Para $x_1 = 3$ corresponde máximo local.

Como para $x_1 = 3$ es $y_1 = 6 \Longrightarrow P(3\,;6)$.

En P hay máximo local.

El valor 6 que lo alcanza en P es máximo absoluto.

El mínimo absoluto es 2 que lo alcanza en el extremo -3 del intervalo.



4°) $\varphi(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ en el intervalo $[-1 ; 5]$

Rta.: Para $x_1 = \left(1 - \sqrt{2}\right)$ hay máximo local.

Como para $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ es $y_1 \simeq -2{,}83 \implies P\left(1 - \sqrt{2} ; -2{,}83\right)$

En P hay máximo local.

Para $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ hay mínimo local.

Como para $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ es $y_2 \simeq 3{,}12 \implies Q\left(1 + \sqrt{2} ; 3{,}12\right)$

En Q hay mínimo local.

No hay máximo ni mínimo absoluto pues en el punto $x = +1$ en que no está definida, por la izquierda tiende a $-\infty$ y por la derecha a $+\infty$.

5°) $f(x) = 4\sqrt{x} + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ en el intervalo $[0{,}5 ; 2]$

Rta.: Para $x = 1$ corresponde mínimo local.

Como para $x = 1$ es $y = 8 \implies P(1 ; 8)$.

En P hay mínimo local.

El valor 8 es a la vez mínimo absoluto.

El máximo absoluto es $y \simeq 8{,}46$, que lo alcanza en los dos extremos del intervalo.

6°) $f(x) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{2 - x}$ en el intervalo $[1 ; 5]$

Rta.: Para $x = 4$ corresponde un máximo relativo.

Como para $x = 4$ es $y = \dfrac{1}{2} \implies P\left(4 ; \dfrac{1}{2}\right)$

En P hay máximo local.

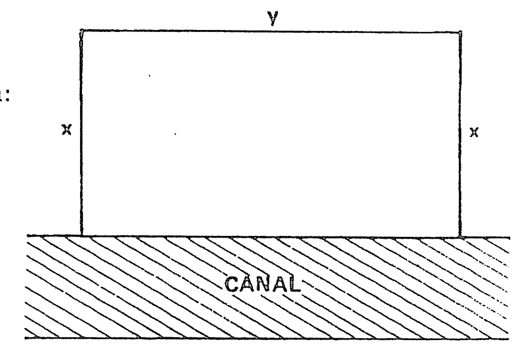
No tiene ni máximo ni mínimo absoluto, pues en el punto $x = 2$ en que no está definida, por la derecha tiende a $-\infty$ y por la izquierda a $+\infty$.

PROBLEMAS DE APLICACION DE MAXIMOS Y DE MINIMOS

Problemas resueltos

Ejemplo 1°)

Sobre la orilla recta de un canal, se precisa limitar un terreno rectangular, alambrando los 3 lados que no pertenecen a la orilla. Hay que emplear 1.800 m de alambre tejido, ¿cuáles son las dimensiones del terreno para que tenga el área máxima?



Si se designan con x e y a los lados del terreno, resulta:

La longitud 1.800 m del alambre, implica:

$$2x + y = 1.800 \implies y = 1.800 - 2x$$

el área del terreno es $a = x \cdot y$

se reemplaza y, como consecuencia el área es la función de x

$$a(x) = x(1800 - 2x) = 1800x - 2x^2$$
$$a'(x) = 1800 - 4x$$
$$a'(x) = 0 \implies 1800 - 4x = 0 \implies x = 450$$

como la segunda derivada $a''(x) = -4 < 0$ corresponde a un máximo.

$$y = 1800 - 2x = 1800 - 2 \cdot 450 = 900$$

luego, las dimensiones del terreno pedido son 900 m de largo y 450 m de ancho.

Ejemplo 2°)

Entre todos los pares de números positivos cuyo producto es 144, encontrar dos cuya suma es mínima.

Se llaman x e y a cada uno de los números:

$$x \cdot y = 144 \Longrightarrow y = \frac{144}{x}$$

La suma $S = x + y$ debe ser mínima. Se reemplaza y:

$$S(x) = x + \frac{144}{x} \Longrightarrow S'(x) = 1 - \frac{144}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Longrightarrow 1 - \frac{144}{x^2} = 0 \Longrightarrow \frac{144}{x^2} = 1 \Longrightarrow x^2 = 144 \Longrightarrow x = 12.$$

Se considera solamente el resultado positivo, porque así lo pide; corresponde a un mínimo porque la segunda derivada

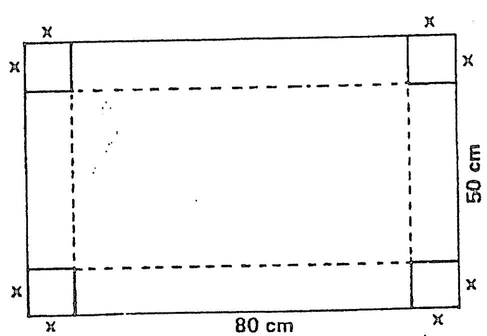
$$S''(x) = \frac{288}{x^3} \quad \text{es positiva para } x = 12.$$

$$y = \frac{144}{x} = \frac{144}{12} = 12$$

Luego, los dos números son iguales a 12.

Ejemplo 3°)

Con una hoja de cartulina de 80 cm de largo y 50 cm de ancho, se quiere construir una caja rectangular sin tapa, cortando los cuadrados en los vértices, como se indica en la figura y levantando las aletas de los costados. Calcular las dimensiones de la caja para que el volumen de la misma sea el máximo.



Si se llama x al lado de cada cuadrado, el fondo de la caja es el rectángulo que tiene por lados:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Largo: } 80 - 2x \\ \text{Ancho: } 50 - 2x\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{área de la base} = (80 - 2x)\,(50 - 2x)$$

La altura de la caja es x, luego el volumen es:

$$\begin{aligned}
V(x) &= (80 - 2x)(50 - 2x)\,x \\
V(x) &= (4000 - 100x - 160x + 4x^2)\,x \\
V(x) &= 4000x - 260x^2 + 4x^3 \quad \text{debemos buscar el máximo volumen} \\
V'(x) &= 4000 - 520x + 12x^2 \\
V'(x) &= 0 \Longrightarrow 12x^2 - 520x + 4000 = 0 \quad \text{se simplifica por 4} \\
&\qquad\quad\; 3x^2 - 130x + 1000 = 0 \quad \text{se resuelve:}
\end{aligned}$$

$$x = \frac{130 \pm \sqrt{16900 - 1200}}{6} = \frac{130 \pm \sqrt{4900}}{6} = \frac{130 \pm 70}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{200}{6} \simeq 33{,}3 \\[2ex] x_2 = \dfrac{60}{6} = 10 \end{cases}$$

de estas dos soluciones la única aceptable es $x = 10$, pues 33,3 por 2 es superior al ancho de la cartulina.

Corresponde a un máximo, pues la segunda derivada:

$$V''(x) = -520 + 24x \Longrightarrow V''(10) = -520 + 24 \cdot 10 = -280 < 0$$

Luego, las dimensiones de la caja son:

Largo: $30 - 2 \times 10 = 60$ es decir 60 cm
Ancho: $50 - 2 \times 10 = 30$ es decir 30 cm
Alto: 10 cm

Problemas propuestos

1°)

Entre los pares de números positivos cuya suma es 30, encontrar aquellos dos, cuyo producto es máximo.

Rta.: los dos números son iguales a 15.

2°)

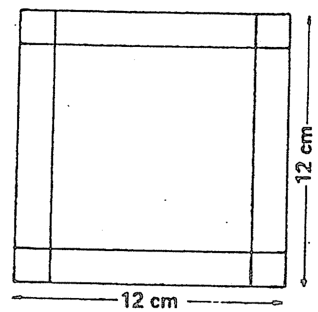
Con un alambre tejido de 3.600 m de largo, se quiere alambrar un terreno rectangular. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno, para que su área sea máxima?

Rta.: debe ser cuadrado de 900 m de lado.

3°)

Con una cartulina cuadrada de 12 cm de lado, construir una caja en las mismas condiciones que las del tercer ejemplo. Dar las dimensiones para que el volumen de la misma sea máximo.

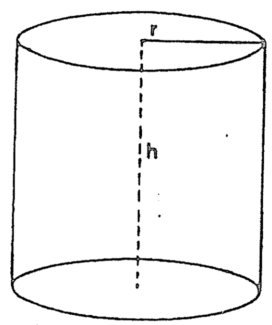
Rta.: largo 8 cm; ancho 8 cm; altura 2 cm.



4°)

Se quieren fabricar latas cilíndricas cerradas de 250 cm³ de contenido. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que la cantidad de lata que se utiliza sea mínima?

Rta.: $r = 3{,}42$ cm ; $h = 6{,}84$ cm.



5°)

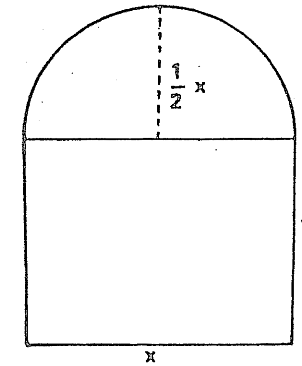
Una ventana tiene la forma que indica la figura, donde la parte superior es un semicírculo.

El perímetro de la ventana es de 8 m.

Calcular las dimensiones para que el área de la ventana sea máxima y pueda pasar la mayor cantidad de luz.

Rta.: $x = 1{,}19 \text{ m} \implies \frac{1}{2}x = 0{,}595 \text{ m}$

$y = 1{,}535$ m



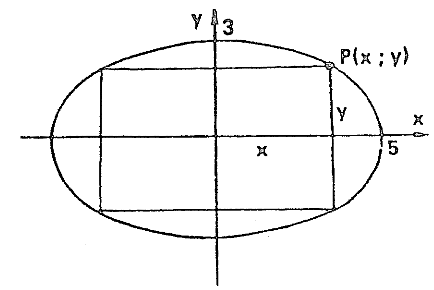
6°)

De los rectángulos inscriptos en una elipse de semidiámetros: $a = 5$ cm y $b = 3$ cm determinar la base y la altura del que tiene área máxima.

Recordar que la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es en este caso $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \iff y = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$.

Las coordenadas del punto P de la elipse son la mitad de la base y de la altura del rectángulo, luego en la expresión del área se puede reemplazar y en función de x.

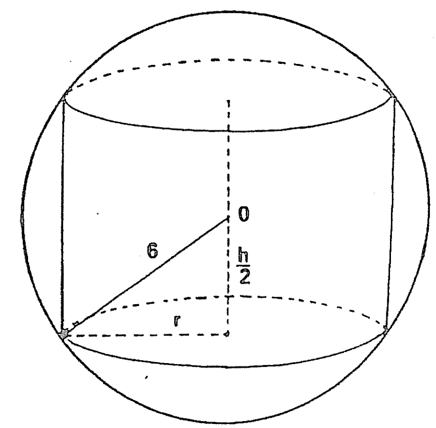
Rta.: base $2x = 2\cdot\frac{5}{\sqrt{2}} = 5.\sqrt{2} \simeq 7{,}05$ cm   alt. $2y = 2\frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \simeq 4{,}23$ cm



7°)

Calcular el radio y la altura del cilindro de volumen máximo inscripto en una esfera de 6 cm de radio.

Rta.: radio de la base $= 2\sqrt{6} \simeq 4{,}9$ cm
altura $= 4\sqrt{3} \simeq 6{,}9$ cm



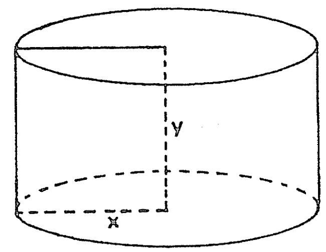
8°)

Entre los pares de números positivos cuya suma es 120, encontrar aquellos dos, tales que la suma de sus cuadrados es mínima.

Rta.: los dos números son iguales a 60.

9°)
Un rectángulo cuando gira alrededor de uno de sus lados genera un cilindro.

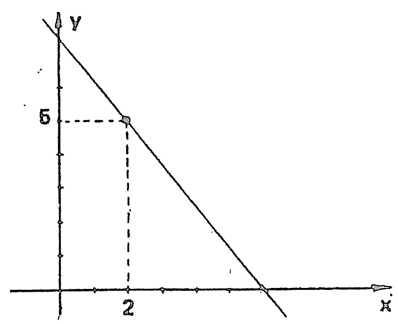
Entre los rectángulos de 20 cm de perímetro, calcular la base y la altura del que engendra el cilindro de mayor volumen.



Rta.: $x = \frac{20}{3} \simeq 6{,}67$ cm
$y = \frac{10}{3} \simeq 3{,}33$ cm

10°)

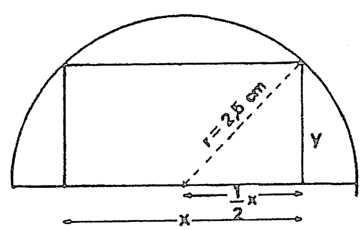
De las rectas que pasan por el punto $P(2\,;5)$ y cortan a los semiejes positivos, encontrar la ecuación de la que determina con los mismos, el triángulo rectángulo de área mínima.



Rta.: la recta es $y = -\frac{5}{4}x + \frac{15}{2}$

11°)

En el diámetro de un semicírculo de 5 cm de radio está la base de un rectángulo, cuyo lado opuesto tiene sus extremos en la circunferencia. Determinar las dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima.



Rta.: $\begin{cases} x = 5\sqrt{2} \simeq 7{,}06 \text{ cm} \\ y = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \simeq 3{,}53 \text{ cm} \end{cases}$

Aplicación a la Economía de problemas de máximos y mínimos

Ejercicio resuelto

1°) Un oferente monopolista, considera que la salida del producto que fabrica está dada por la función $x = 25 - \frac{1}{40}p$ donde p es el precio por unidad.

Hallar el nivel x_0 de producción que maximiza su ingreso:

Solución: Si $x = 25 - \frac{1}{40}p \implies p = 1000 - 40x$

Como el ingreso $I(x)$ es $I(x) = p\,x$

resulta $I(x) = p\,x = 1000\,x - 40\,x^2$

Igualando a cero el $\mathrm{Img}(x) = I'(x)$

$$I'(x) = 1000 - 80x = 0 \implies x = 12{,}5$$
$$I''(x) = -80 < 0$$

$I(x)$ es máximo cuando $x = 12{,}5$

Ejercicios propuestos

1°) Si el monopolista del ejercicio anterior tuviera una función de costo dada por $C(x) = 280\,x + 600$

a) hallar el nivel de producción que maximiza su beneficio.

b) ¿cuál es el beneficio máximo?

Rta.: a) cuando el nivel de producción es $x = 9$ el beneficio es máximo.
b) $B(9) = 2640$.

2°) Sea un oferente en competencia perfecta, que se enfrenta a un precio de mercado $p = 5$.

Si su función de costo depende de su producción x y está expresada por $C(x) = x^3 - 4x^2 + 10x + 20$, hallar:

a) el nivel de producción que maximice su beneficio;

b) minimiza el beneficio.

Rta.: a) En $x = \frac{5}{3}$ $B(x)$ es máx.

b) En $x = 1$ $B(x)$ es mín.

3°) Una empresa monopolista tiene una función de costo dada por $C(x) = 5x^2 - 4x + 30$.
Si su función de salida es: $x = 100 - \frac{1}{20} p$.

Calcular el nivel de producción que maximiza su beneficio, el monto de su beneficio y su precio de venta, en los siguientes casos:

a) Si no se le aplica impuesto alguno.
b) Si se le aplica un impuesto del 25% de los ingresos.
c) Si se le aplica un impuesto del 20% sobre los beneficios.
d) Si se le impone un impuesto de \$ 54 por unidad producida.

Rta.:

a) En $x_0 = 40{,}08$; $B(x)$ es máximo; $B(40{,}08) = 40070{,}04$
$p_0 = 1198{,}4$

b) En $x_0 = 37{,}6$; $B(x)$ es máximo; $B(37{,}6) = 28305{,}2$
$p_0 = 1248$

c) En $x_0 = 40{,}08$; $B(x)$ es máximo; $B(40{,}08) = 32056{,}032$
$p_0 = 1198{,}4$

d) En $x_0 = 39$; $B(x)$ es máximo; $B(39) = 37995$
$p_0 = 1220$

De todas las opciones de imposición propuestas, la más conveniente para el consumidor y para el Estado es la c), siempre que como en este caso, el oferente sea monopolista.

4°) Un fabricante de gomas de borrar, produce una cantidad de miles de unidades mensuales, utilizando un nivel z de horas-hombre diarias, como insumo.
Si su función de producción está representada por $x = 24z + 3z^2 - z^3$

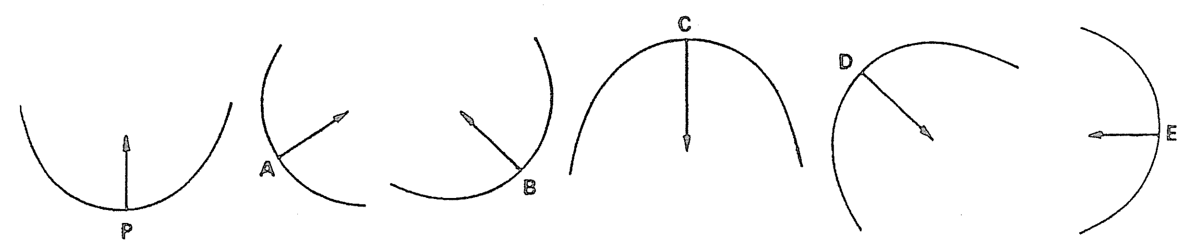
hallar el número de horas-hombre diarias, que maximicen la producción de gomas de borrar.

Rta.: cuando $z = 4$; x es máximo.

El estudio de la concavidad, convexidad y punto de inflexión de una función derivable, facilita la determinación de los máximos y de los mínimos.

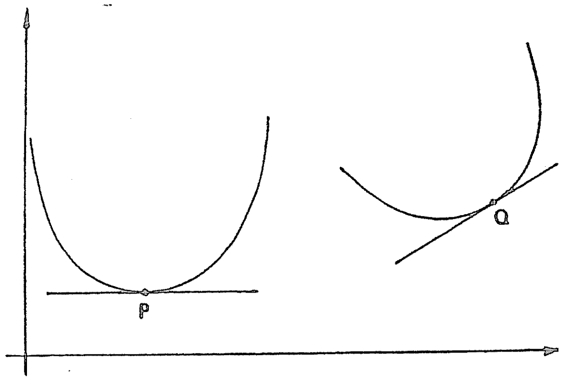
Concavidad y convexidad de una curva en un punto

Al hablar de concavidad, de acuerdo con el significado que en el lenguaje corriente damos a la palabra, hay que decir en qué dirección y sentido. Así, en el punto que se destaca en cada una de las siguientes figuras, la curva es cóncava en la dirección y sentido que indica la flecha:



Nosotros adoptamos la dirección y sentido del semieje positivo y, considerándolo vertical y hacia arriba.

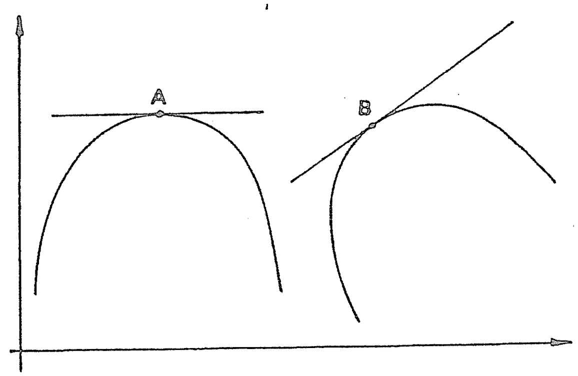
Concavidad o bien concavidad hacia arriba



En los puntos P de tangente horizontal y Q de tangente oblicua, la curva es cóncava en la dirección y sentido del semieje positivo y, también se dice cóncava hacia arriba.

Como se observa en la figura, se define: la curva es cóncava hacia arriba en un punto de tangente horizontal u oblicua, cuando en un entorno reducido del punto el arco de curva está en el semiplano superior con respecto a la tangente.

Convexidad o bien concavidad hacia abajo



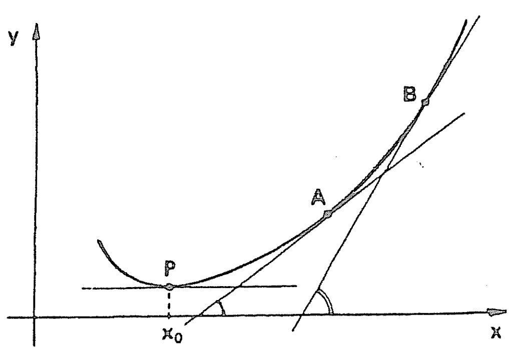
En los puntos: A de tangente horizontal y B de tangente oblicua, se dice que la curva es convexa en la dirección y sentido del semieje positivo y, también se dice cóncava hacia abajo.

Como se observa en la figura, se define: la curva es cóncava hacia abajo en un punto de tangente horizontal u oblicua, cuando en un entorno reducido del punto, el arco de curva está en el semiplano inferior con respecto a la tangente.

Si la función tiene segunda derivada, resulta que:

Si la segunda derivada de la función en un punto es positiva, la curva es cóncava hacia arriba en el punto correspondiente.

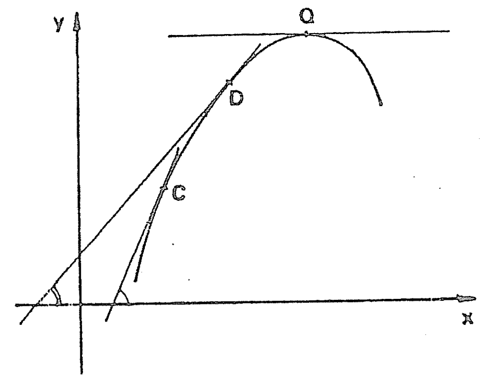
En efecto, si la tangente en el punto P de la curva que corresponde a x_0 es horizontal, la concavidad hacia arriba corresponde a un mínimo local y para ello ya hemos visto que es suficiente que $f''(x_0) > 0$.



En los otros puntos A ; B ; se observa que la recta tangente tiene una pendiente que aumenta con x, es decir que la pendiente de la tangente es creciente, pero dicha pendiente la determina la derivada de la función en cada punto, por lo tanto la primera derivada $f'(x)$ de la función es creciente y ello se verifica si su derivada, o sea la derivada segunda; $f''(x)$ es positiva.

Si la segunda derivada de la función en un punto es negativa, la curva es cóncava hacia abajo en el punto correspondiente.

En efecto: si en el punto Q de la curva que corresponde a x_0, la tangente es horizontal, la concavidad hacia abajo corresponde a un máximo local y ya hemos visto que para ello es suficiente que $f''(x_0) < 0$. En los otros puntos C ; D se observa que la pendiente de la tangente se hace menor cuando x aumenta, es decir, dicha pendiente es decreciente y por lo tanto también es decreciente la derivada $f'(x)$ y ello se verifica si su derivada o sea la $f''(x)$ es negativa.



En resumen:

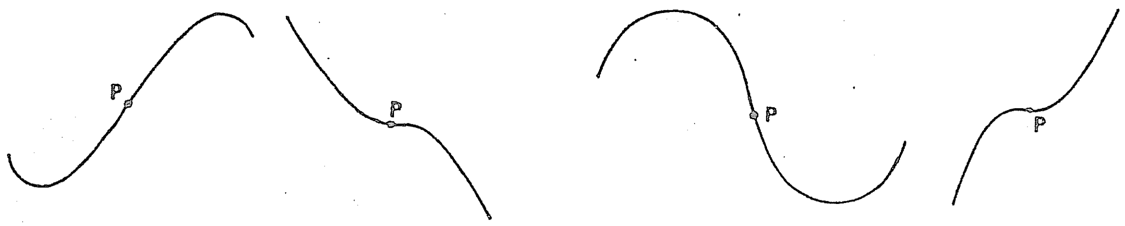
$f''(x_0) > 0 \implies$ curva cóncava hacia arriba en el punto que corresponde.

$f''(x_0) < 0 \implies$ curva cóncava hacia abajo en el punto que corresponde.

Nota: Una demostración más rigurosa se hará cuando se estudie la fórmula de Taylor.

Puntos de inflexión

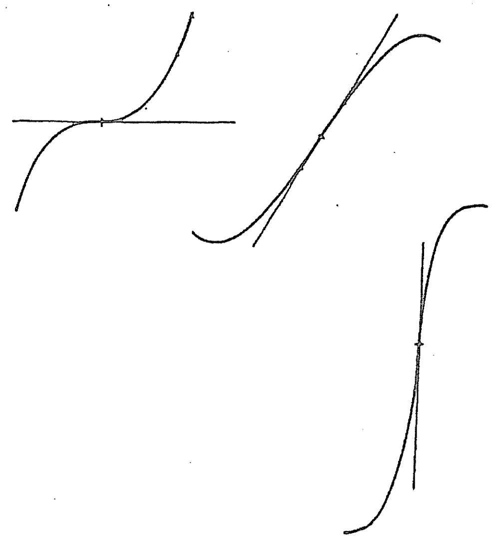
En los siguientes gráficos se observa, que en el punto P señalado en cada uno, la curva no es cóncava ni convexa; en unos casos como en el primero y en el segundo a la izquierda del punto es cóncava hacia arriba y a la derecha es cóncava hacia abajo. En cambio, en el tercero y cuarto a la izquierda del punto es convexa y a la derecha es cóncava hacia arriba.



Estos puntos se llaman de inflexión.

Definición: Se llama punto de inflexión, a aquel en que la curva cambia el sentido de la concavidad.

Observaciones:



1°) En cada punto de inflexión, la tangente atraviesa a la curva.

2°) Hay puntos de inflexión de tangente horizontal, puntos de inflexión de tangente oblicua y puntos de inflexión de tangente vertical.

Condiciones para la existencia de puntos de inflexión

1°) Dado que, en el punto de inflexión si la curva es cóncava a la izquierda (derivada segunda positiva) debe ser convexa a la derecha (derivada segunda negativa) o viceversa, resulta que:

a la izquierda del punto de inflexión la segunda derivada debe tener signo contrario al que tiene a la derecha.

En la figura anterior, en el punto de inflexión de tangente horizontal, la segunda derivada es negativa a la izquierda y positiva a la derecha; en cambio en el de tangente oblicua es positiva a la izquierda y negativa a la derecha.

En general:

en el punto de la curva que corresponde a x_0 hay inflexión $\Longleftrightarrow \begin{cases} f''(x_0 - h) > 0 \ \wedge \ f''(x_0 + h) < 0 \\ \text{o bien} \\ f''(x_0 - h) < 0 \ \wedge \ f''(x_0 + h) > 0 \end{cases}$

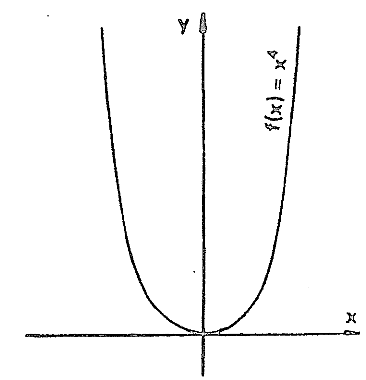
2°) Si en el punto de inflexión está definida la segunda derivada, ésta debe ser cero. Es decir:

Si a x_0 le corresponde un punto de inflexión y existe $f''(x_0) \Longrightarrow f''(x_0) = 0$.

En efecto: la $f''(x_0)$ es un número, por lo tanto debe ser positivo, negativo o nulo. No puede ser positivo porque entonces sería un punto de concavidad, no puede ser negativo, pues entonces sería de convexidad, por lo tanto debe ser 0.

Pero esta condición de anulación de la segunda derivada, no es suficiente, no basta para que haya punto de inflexión.

Ejemplo: $f(x) = x^4$



$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$

En el punto $x = 0$ es $f''(0) = 12 \cdot 0 = 0$

y sin embargo, en ese punto origen no hay inflexión, hay concavidad.

Luego, en el punto en que se anula la segunda derivada, deben verificarse otras condiciones más, para que haya inflexión.

La de aplicación más práctica es la que se refiere a la tercera derivada que dice: si en el punto en que se anula la segunda derivada, la tercera derivada es distinta de cero, hay inflexión, es decir:

$$f''(x_0) = 0 \;\wedge\; f'''(x_0) \neq 0 \implies \text{el punto de la curva que corresponde a } x_0 \text{ es de inflexión.}$$

(Se demuestra al estudiar la fórmula de Taylor).

Ahora bien, si la tercera derivada es 0 en el punto en que se anula la segunda o bien se trata de un punto en que la segunda derivada no está definida, hay que estudiar el signo de la segunda derivada a la izquierda y a la derecha del punto, si dicho signo cambia hay inflexión.

De lo dicho se deduce que, para determinar los puntos de inflexión se procede así:

1°) Procedimiento: si existe segunda derivada, se determina en qué puntos se anula y en ellos se calcula la tercera derivada, que debe ser distinta de cero.

2°) Si la segunda derivada se anula y la tercera derivada también, hay que determinar el signo de la segunda derivada a la izquierda y a la derecha del punto; si el signo es distinto hay inflexión.

3°) Si es un punto en que la segunda derivada no está definida, se determina el signo de la misma a la izquierda y a la derecha del punto; si son distintos hay inflexión.

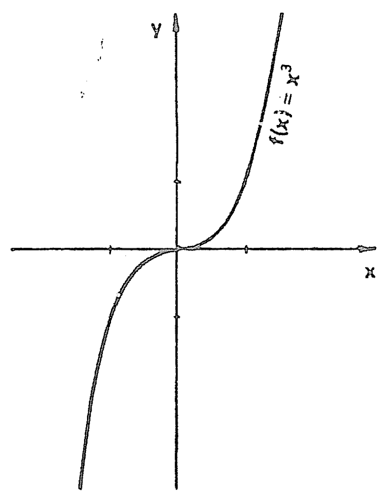
Ejercicios resueltos:

Ejemplo 1°

$f(x) = x^3$ Se obtiene la segunda derivada

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$ está definida para todo x.



Se calcula en qué puntos se anula

$f''(x) = 0 \implies 6x = 0 \implies x_0 = 0$

Se obtiene la tercera derivada

$f'''(x) = 6 \neq 0$ para todo x.

En el origen hay una inflexión.
Además, es de tangente horizontal, pues $f'(0) = 0$

No existe otra inflexión, pues como se ha dicho la derivada segunda está definida en todos los puntos y en el único que se anula es en el origen. Además como $f''(x) = 6x$ es negativa para todo x negativo la curva es convexa en todos los puntos a la izquierda del origen; como la derivada segunda es positiva para todo x positivo, la curva es cóncava en todos los puntos que corresponden a la derecha del origen.

Ejemplo 2°

$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)}$

Para derivar conviene escribir la función como potencia, es decir $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$

Se obtiene la primera y segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(x-1)^{-\frac{5}{3}} \implies f''(x) = -\frac{2}{9(x-1)^{\frac{5}{3}}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$$

Esta segunda derivada no se anula en ningún punto, además no está definida en $x = 1$ por lo tanto es para $x = 1$ donde hay probabilidad de inflexión; para ver si efectivamente es así se obtiene el signo de la segunda derivada a la izquierda de 1 y a la derecha de 1.

Para $x < 1$ el radicando $x - 1 < 0 \implies (x-1)^5 < 0 \implies$

$$\implies f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}} > 0$$

Es decir, la curva es cóncava a la izquierda de 1.

Para $x > 1$ el radicando $x - 1 > 0 \implies \sqrt[3]{(x-1)^5} > 0 \implies$

$$\implies f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}} < 0$$

Es decir, la curva es convexa a la derecha de 1.

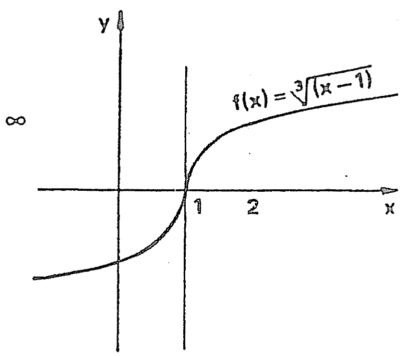
Por lo tanto en el punto que corresponde a $x = 1$ hay inflexión.

Como para $x = 1$ es $f(1) = \sqrt[3]{1-1} = 0$ el punto de inflexión es el de coordenadas $x = 1$; $y = 0$.

Además, como para $x = 1$ la primera derivada tiende a infinito, en efecto:

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\longrightarrow 0} = \infty$$

resulta que la tangente en el punto de inflexión es vertical.



Ejemplo 3°

$f(x) = x^5 + 1$ se calcula la primera y segunda derivada

$f'(x) = 5x^4$ $f''(x) = 20x^3$

$f''(x) = 0 \Longrightarrow 20x^3 = 0 \Longrightarrow x_0 = 0$ La tercera derivada es:

$f'''(x) = 60x^2$ en $x_0 = 0$ es $f'''(0) = 60 \cdot 0 = 0$

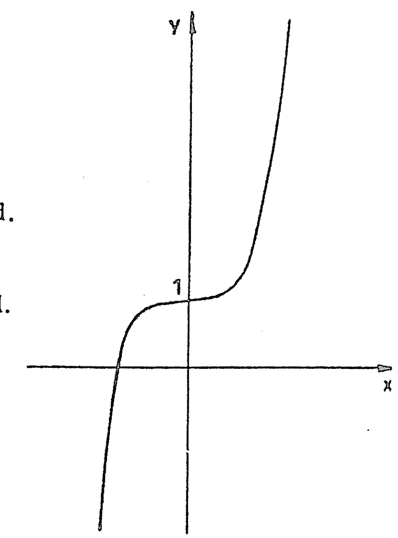
Es decir que la tercera derivada también se anula en $x_0 = 0$ luego ella no nos permite decir si hay inflexión. Debemos calcular el signo de $f''(x)$ a la izquierda y a la derecha de 0.

A la izquierda de 0 es $x < 0 \Longrightarrow f''(x) = 20x^3 < 0 \Longrightarrow$ convexidad.

A la derecha de 0 es $x > 0 \Longrightarrow f''(x) = 20x^3 > 0 \Longrightarrow$ concavidad.

Por lo tanto en el punto que corresponde a $x = 0$ hay inflexión.

Como $f(0) = 0 + 1 = 1$ el punto donde hay inflexión es el de coordenadas $x = 0$; $y = 1$.



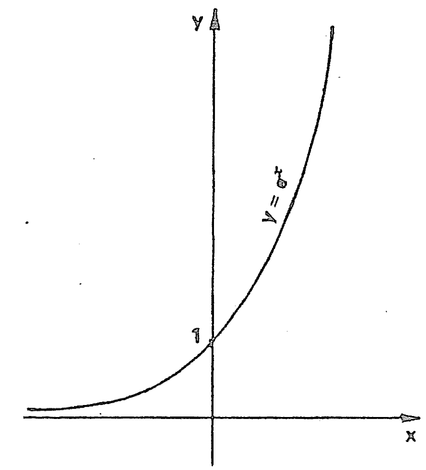
Ejemplo 4°

$f(x) = e^x$ la derivada primera y segunda son:

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x > 0$ para todo x.

La curva es cóncava en todo el dominio, no hay inflexión.



Ejercicios propuestos

Determinar en qué puntos cada una de las siguientes funciones, tienen concavidad hacia arriba, concavidad hacia abajo, e inflexiones, si es que las hay.

1°) $f(x) = \frac{3}{2}x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 6x - 3$

Rta.:

- Inflexiones para $x = 2$ y $x = -\frac{1}{3}$
- Es decir, hay inflexión en $P(2\,; -31)$; $Q\left(-\frac{1}{3}\,; -\frac{295}{54}\right)$
- Convexa $\forall\, x \,/ -\frac{1}{3} < x < 2$
- Cóncava $\forall\, x \,/\, x < -\frac{1}{3}$ y $x \,/\, x > 2$

2°) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

Rta.: Inflexión para $x = -1$. Para $x = -1$ es $y = 0$ en P $(-1\,;0)$ hay inflexión.
Cóncava en el intervalo $(-\infty; -1)$ y en el intervalo $(0\,;\infty)$.
Es convexa en el intervalo $(-1; 0)$.

3°) $f(x) = (x-1)^2\,(x+2)$

Rta.: Inflexión para $x = 0$. Para $x = 0$ es $y = 2$ en P $(0\,;2)$ hay inflexión.
La curva es cóncava en el intervalo $(0\,;\infty)$.
Es convexa en el intervalo $(-\infty; 0)$.

4°) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

Rta.: Inflexión para $x = 0$. Para $x = 0$ es $y = 0$ en P $(0\,;0)$ hay inflexión.
Convexa $\forall\, x \,/\, x < -1$ y $\forall\, x \,/\, 0 < x < 1$
Cóncava $\forall\, x \,/\, x > 1$ y $\forall\, x \,/ -1 < x < 0$

5°) $f(x) = (x-3)^{\frac{3}{2}}$

Rta.: La función es cóncava en todo su dominio, que es $x \geqslant 3$.
No tiene convexidades ni inflexiones.

Decir si es cóncava hacia arriba o hacia abajo, cada una de las siguientes funciones en los puntos que se indica:

1°) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 2$ en los puntos $x = -1$ y $x = 1$.

Rta.: Para $x = -1$ y $x = 1$ la curva es cóncava hacia arriba.

2°) $f(x) = (x-2)^{\frac{1}{5}}$ en los puntos $x = -2$ y $x = 3$.

Rta.: Para $x = -2$ es cóncava hacia arriba.
Para $x = 3$ es cóncava hacia abajo.

3°) $f(x) = x\,\sqrt{x+1}$ en los puntos $x = 0$ y $x = 2$.

Rta.: Para $x = 0$ y $x = 2$ es cóncava hacia arriba.

Ejercicios propuestos

Determinar en qué puntos alcanzan máximos y mínimos locales y absolutos e inflexiones, si es que los hay en cada una de las siguientes funciones. Hacer la gráfica, cuando se indica.

1°) $f(x) = x^3 - x^2 - 1$

Rta.: Para $x_1 = 0$ corresponde máximo local.
Como para $x_1 = 0$ es $y_1 = -1$ es P $(0\,;-1)$.
En P hay máximo local.
Para $x_2 = \dfrac{2}{3}$ corresponde mínimo local.

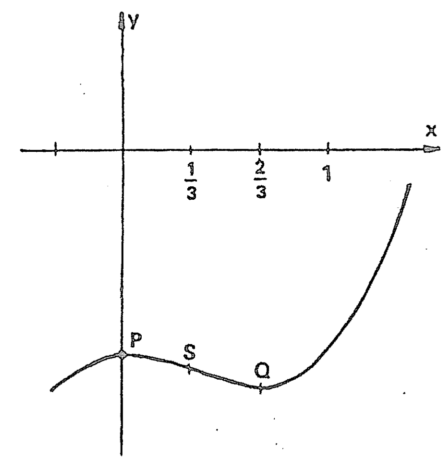
como para $x_2 = \dfrac{2}{3}$ es $y_2 = -\dfrac{31}{27}$ es $Q\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{31}{27}\right)$

en Q hay mínimo local.

Para $x_3 = \dfrac{1}{3}$ corresponde inflexión.

como para $x_3 = \dfrac{1}{3}$ es $y_3 = -\dfrac{29}{27}$ es $S\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{29}{27}\right)$

en S hay inflexión.

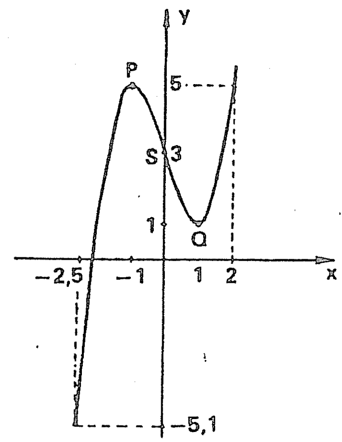


2°) $f(x) = x^3 - 3x + 3$ en el intervalo $[-2{,}5\ ;\ 2]$

Rta.: Para $x_1 = -1$ corresponde máx. local.

Como para $x_1 = -1$ es $y_1 = 5$ es $P(-1\ ;5)$, en P hay máximo local.

Para $x_2 = 1$ corresponde mínimo local, como para $x_2 = 1$ es $y_2 = 1$ es $Q(1\ ;1)$, en Q hay mínimo local.

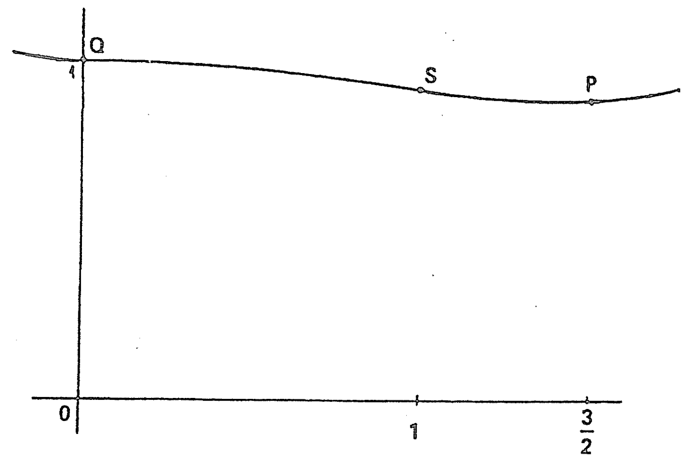


En el primer extremo del intervalo $x = -2{,}5$ es $y = -5{,}1$; este valor es el mínimo absoluto. En el segundo extremo del intervalo $x = 2$ es $y = 5$ este valor 5 es el máximo absoluto que lo alcanza dos veces, en P y en el segundo extremo del intervalo.

Para $x_3 = 0$ corresponde inflexión, como para $x_3 = 0$ es $y_3 = 3$ es $S(0\ ;3)$.

En S hay inflexión.

3°) $f(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - \dfrac{1}{6}x^3 + 1$



Rta.: Para $x_1 = \dfrac{3}{2}$ corresponde mínimo local, como para $x_1 = \dfrac{3}{2}$ es $y_1 = \dfrac{55}{64} \simeq 0{,}9$ es $P\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 0{,}9\right)$.

En P hay mínimo local.

Para $x_2 = 0$ corresponde inflexión de tangente horizontal; como para:

$x_2 = 0$ es $y_2 = 1$ es $Q(0\ ;1)$.

en Q hay inflexión de tangente horizontal.

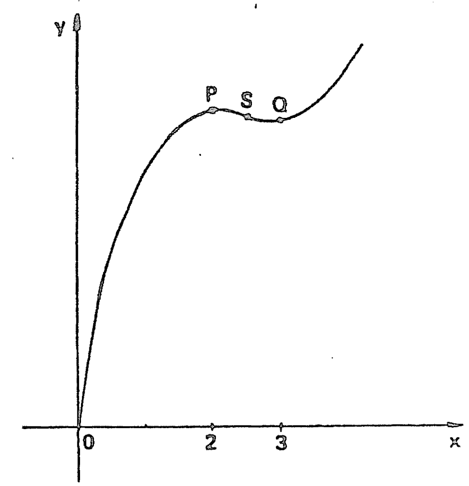
Para $x_3 = 1$ corresponde inflexión de tangente oblicua, como para:

$x_3 = 1$ es $y_3 = \dfrac{11}{12} \simeq 0{,}92$ es $S(1\ ;0{,}92)$.

en S hay inflexión de tangente oblicua.

Para $x \longrightarrow \pm\infty$ la función tiende a $+\infty$.

4°) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 6x$ en el intervalo $[0\ ;3]$



Rta.: Para $x_1 = 2$ corresponde máximo local, como para $x_1 = 2$ es $y_1 = 4{,}7$ es $P(2\ ;4{,}7)$, en P hay máximo local.

Para $x_2 = 3$ corresponde mínimo local como para $x_2 = 3$ es $y_2 = 4{,}5$ es $Q(3\ ;\ 4{,}5)$, en Q hay mínimo local.

Para $x_3 = 2{,}5$ corresponde inflexión. Como para $x_3 = 2{,}5$ es $y_3 \simeq 4{,}58$ én $S(2{,}5\ ;4{,}58)$, hay inflexión.

El valor 4,7 que alcanza en P es a la vez máximo absoluto.

En el origen $O(0\ ;0)$ toma el valor 0. que es el mínimo absoluto en el intervalo

5°) $\varphi(x) = \dfrac{1}{12}x^4 - 6x^2 + 1$

Rta.: Para $x_1 = 0$ corresponde un máximo local, como para $x_1 = 0$ es $y_1 = 1$ es $P(0\ ;1)$.

En $P(0\ ;1)$ hay máximo local.

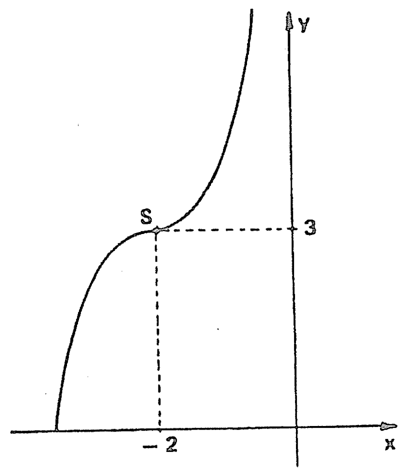
Para $x_2 = -6$ corresponde mínimo local como para $x_2 = -6$ es $y_2 = -107$ es $Q(-6\ ;-107)$, en Q hay mínimo local.

Para $x_3 = 6$ corresponde mínimo local. Como para $x_3 = 6$ es $y_3 = -107$ en $R(6;-107)$ hay mínimo local.

Para $x_4 = -\sqrt{12}$ corresponde inflexión, como para $x_4 = -\sqrt{12} \simeq -3{,}46$ es $y_4 = -59$, es $S(-3{,}46;-59)$, en S hay inflexión de tangente oblicua.

Para $x_5 = \sqrt{12} \simeq 3{,}46$ corresponde inflexión, como para $x_5 = \sqrt{12}$ es $y_5 = -59$ es $T(3{,}46;-59)$, en T hay inflexión de tangente oblicua.

6°) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 11$.



Rta.: No tiene máximos ni mínimos locales.

Para $x = -2$ corresponde inflexión de tangente horizontal. Comò para $x = -2$ es $y = 3$ es $S(-2\,;3)$.

En S hay inflexión.

Para $x \longrightarrow +\infty$ $f(x) \longrightarrow +\infty$

Para $x \longrightarrow -\infty$ $f(x) \longrightarrow -\infty$

7°) $\varphi(x) = x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 9$ en el intervalo $[-1\,;3]$

Rta.: Para $x_1 = 0$ corresponde un máximo local; como para $x_1 = 0$ es $y_1 = 9$ es $P(0\,;9)$ en P hay máximo local.

Para $x_2 = 2$ corresponde un mínimo local; como para $x_2 = 2$ es $y = -23$ es $Q(2;-23)$ en Q hay mínimo local.

Para $x_3 \simeq 1{,}08$ corresponde inflexión; como para $x_3 \simeq 1{,}08$ es $y_3 \simeq -7{,}93$ es $S(1;-7{,}9)$, en S hay inflexión de tangente oblicua.

El valor -23 que lo alcanza en Q es mínimo absoluto.

En el extremo $x = 3$ del intervalo, la función toma el valor 18 que es el máximo absoluto.

En el otro extremo $x = -1$ del intervalo toma el valor -14.

8°) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 8$ en el intervalo $[-1\,;1]$.

Rta.: Para $x_1 = -\frac{1}{2}$ corresponde un mínimo relativo; como para $x_1 = -\frac{1}{2}$ es $y_1 \simeq -8{,}01$ es $P\left(-\frac{1}{2};-8{,}01\right)$, en P hay mínimo relativo.

No hay máximo local.

Para $x_2 = 0$ corresponde inflexión; como para $x_2 = 0$ es $y_2 = -8$ es $S(0\,;-8)$ en S hay inflexión de tangente horizontal.

Para $x_3 = -\frac{1}{3}$ corresponde inflexión; como para $x_3 = -\frac{1}{3}$ es $y_3 \simeq -8$ es $R\left(-\frac{1}{3};-8\right)$.

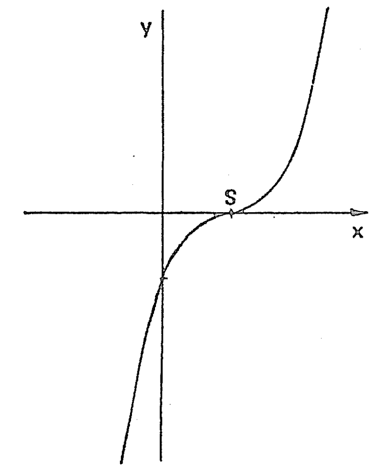
En R hay inflexión de tangente oblicua.

El valor $-8{,}01$ que toma la función en P es mínimo absoluto.

En el extremo -1 del intervalo, toma el valor $-7{,}8$.

El valor $-7{,}17$ que toma en el extremo $x = 1$ del intervalo es el máximo absoluto.

9°) $\varphi(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$



Rta.: No hay máximo ni mínimo locales.

Para $x = 1$ corresponde inflexión, como para $x = 1$ es $y = 0$ es $S(1\,;0)$, en S hay inflexión de tangente horizontal.

10°) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 7x^2 + 24x - 2$

Rta.: Para $x_1 = 3$ corresponde un máximo local; como para $x_1 = 3$ es $y_1 = 25$ es $P(3\,;25)$ en P hay máximo local.

Para $x_2 = 4$ corresponde mínimo local; como para $x_2 = 4$ es $y_2 \simeq 24{,}7$ es $Q(4\,;24{,}7)$, en Q hay mínimo local.

Para $x_3 = 3{,}5$ corresponde inflexión; comò para $x_3 = 3{,}5$ es $y_3 \simeq 24{,}8$ es $S(3{,}5\,;24{,}8)$, en S hay inflexión de tangente oblicua.

11°) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3$

Rta.: Para $x_1 = 0$ corresponde un mínimo local.
Como para $x_1 = 0$ es $y_1 = 3$ es P (0 ; 3) en P hay mínimo local.

Para $x_2 = \frac{1}{3}$ corresponde inflexión; como para $x_2 = \frac{1}{3}$ es $y_2 \simeq 3{,}03$ es $S\left(\frac{1}{3} ; 3{,}03\right)$, en S hay inflexión de tangente oblicua.

Para $x_3 = 1$ corresponde inflexión; como para $x_3 = 1$ es $y_3 = 3{,}08$ es R (1; 3,08) en R hay inflexión de tangente horizontal.
El valor 3 que toma en P es mínimo absoluto.

12°) $f(x) = 2x^3 + x^2$

Rta.: Para $x_1 = -\frac{1}{3}$ corresponde un máximo local.

Como para $x_1 = -\frac{1}{3}$ es $y_1 \simeq 0{,}037$ es P $-\frac{1}{3}$; 0,037 , en P hay un máximo local.
Para $x_2 = 0$ corresponde un mínimo relativo.

Como para $x_2 = 0$ es $y_2 = 0$ es O (0 ; 0), en el origen 0 hay mínimo local.

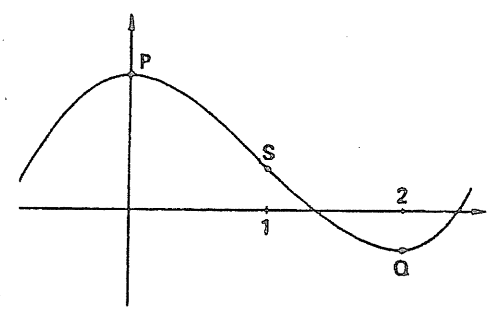
Para $x_3 = -\frac{1}{6}$ corresponde inflexión; como para $x_3 = -\frac{1}{6}$ es $y_3 \simeq 0{,}019$ es $S\left(-\frac{1}{6} ; 0{,}019\right)$ en S hay inflexión de tangente oblicua.

13°) $\varphi(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$

Rta.: Para $x_1 = 0$ corresponde máximo local; como para $x_1 = 0$ es $y_1 = 1$ es P (0 ; 1), en P hay máximo local.

Para $x_2 = 2$ corresponde un mínimo local; como para $x_2 = 2$ es $y_2 \simeq -0{,}33$ es Q (2 ; −0,33), en Q hay mínimo local.

Para $x_3 = 1$ corresponde inflexión; como para $x_3 = 1$ es $y = 0{,}33$ es S (1 ; 0,33), en S hay inflexión de tangente oblicua.



14°) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ en el intervalo $[-2 ; 1]$

Rta.: Para $x_1 = -1$ corresponde máximo local; como para $x_1 = -1$ es $y_1 = 2$ es P (−1 ; 2), en P hay máximo local.

Para $x_2 = \frac{1}{3}$ corresponde un mínimo local; como para $x_2 = \frac{1}{3}$ es $y_2 \simeq 0{,}81$ es $Q\left(\frac{1}{3} ; 0{,}81\right)$, en Q hay mínimo local.

Para $x_3 = -\frac{1}{3}$ corresponde inflexión; como para $x_3 = -\frac{1}{3}$ es $y_3 \simeq 1{,}41$ es $S\left(-\frac{1}{3} ; 1{,}41\right)$, en S hay inflexión de tangente oblicua.

En el extremo $x = -2$ del intervalo alcanza el valor mínimo absoluto que es −1.

El valor 2 que lo alcanza en P y en el extremo $x = 1$ del intervalo es máximo absoluto.

15°) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 6$ en el intervalo $[-2 , 2]$

Rta.: Para $x_1 = \frac{3}{8}$ corresponde un mínimo local; como para $x_1 = \frac{3}{8}$ es $y_1 \simeq 5{,}96$ es $P\left(\frac{3}{8} ; 5{,}96\right)$, en P hay mínimo local.

Para $x_2 = 0$ corresponde inflexión de tangente horizontal; como para $x_2 = 0$ es $y_2 = 6$ es S (0 ; 6), en S hay inflexión de tangente horizontal.

Para $x_3 = \frac{1}{4}$ corresponde inflexión de tangente oblicua, como para $x_3 = \frac{1}{4}$ es $y_3 \simeq 5{,}99$ es $R\left(\frac{1}{4} ; 5{,}99\right)$, en R hay inflexión de tangente oblicua.

El valor 5,96 es el mínimo absoluto que lo alcanza en P.

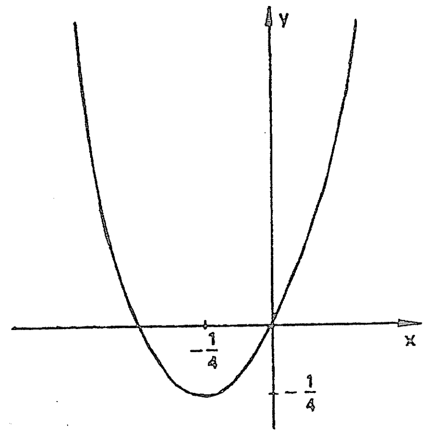
El valor 46 es el máximo absoluto que lo alcanza en el extremo $x = -2$ del intervalo. En el extremo $x = 2$ toma el valor 30.

16°) $f(x) = 4x^2 + 2x$

Rta.: Para $x = -\frac{1}{4}$ corresponde mínimo local; como para $x = -\frac{1}{4}$ es $y = -\frac{1}{4}$ es $P\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}\right)$, en P hay mínimo local.

No hay máximo local ni inflexiones.

El valor $-\frac{1}{4}$ que toma en P es mínimo absoluto.



17°) $\varphi(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2$

Rta.: Para $x_1 = \frac{1}{2}$ corresponde un mínimo local; como para $x_1 = \frac{1}{2}$ es $y_1 \simeq 1{,}98$ es $P\left(\frac{1}{2}; 1{,}98\right)$ en P hay mínimo local.

Para $x_2 = 0$ corresponde inflexión de tangente horizontal; como para $x_2 = 0$ es $y_2 = 2$ es S (0 ; 2), en S hay inflexión de tangente horizontal.

Para $x_3 = \frac{1}{3}$ corresponde inflexión de tangente oblicua, como para $x_3 = \frac{1}{3}$ es $y_3 = 1{,}99$ es $R\left(\frac{1}{3}; 1{,}99\right)$, en R hay inflexión de tangente oblicua.

El valor 1,98 que tome en P es mínimo absoluto.

18°) $f(x) = 3x^3 + 4$

Rta.: Para $x_1 = 0$ corresponde inflexión de tangente horizontal; como para $x_1 = 0$ es $y_1 = 4$ es P (0 ; 4), en P hay inflexión de tangente horizontal.

No hay máximos ni mínimos locales.

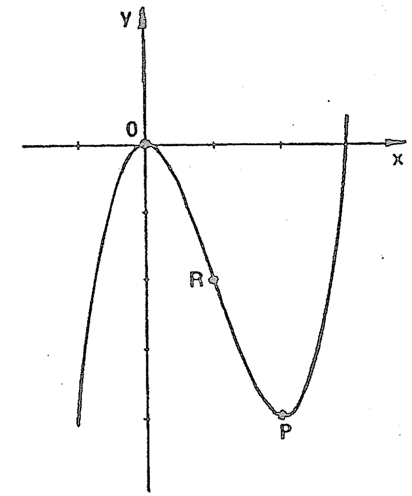
No hay máximo absoluto.

19°) $\varphi(x) = x^2(x-3)$

Rta.: Para $x_1 = 0$ corresponde un máximo local; como para $x_1 = 0$ es $y_1 = 0$ es O (0 ; 0), en O hay máximo local.

Para $x_2 = 2$ corresponde mínimo local; como para $x_2 = 2$ es $y_2 = -4$ es P (2 ; −4), en P hay mínimo local.

Para $x_3 = 1$ corresponde inflexión de tangente oblicua, como para $x_3 = 1$ es $y_3 = -2$ es R (1 ; −2), en R hay inflexión de tangente oblicua.

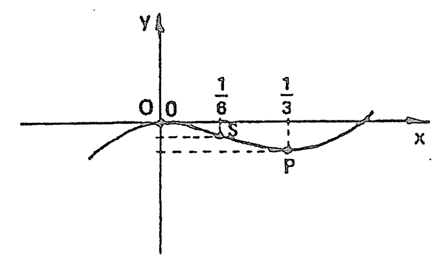


20°) $f(x) = x^2(2x-1)$

Rta.: Para $x_1 = 0$ corresponde máximo local; como para $x_1 = 0$ es $y_1 = 0$ es O (0 ; 0) en el origen O hay máximo local.

Para $x_2 = \frac{1}{3}$ corresponde mínimo local; como para $x_2 = \frac{1}{3}$ es $y_2 = -\frac{1}{27} \simeq -0{,}037$ es $P\left(\frac{1}{3}; -0{,}037\right)$ en P hay mínimo local.

Para $x_3 = \frac{1}{6}$ corresponde inflexión; como para $x_3 = \frac{1}{6}$ es $y_3 = -0{,}019$ es $S\left(\frac{1}{6}; -0{,}019\right)$, en S hay inflexión de tangente oblicua.



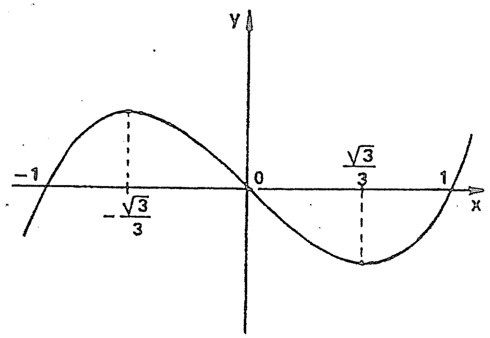
21°) $f(x) = x\,(x^2 - 1)$

Rta.: Para $x_1 = +\sqrt{\dfrac{1}{3}} = +\dfrac{\sqrt{3}}{3} \simeq$ $\simeq 0{,}58$ corresponde mínimo local, como para $x_1 = +\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ es $y_1 \simeq$ $\simeq -0{,}38$ es $P(0{,}58;\ -0{,}38)$, en P hay mínimo local.

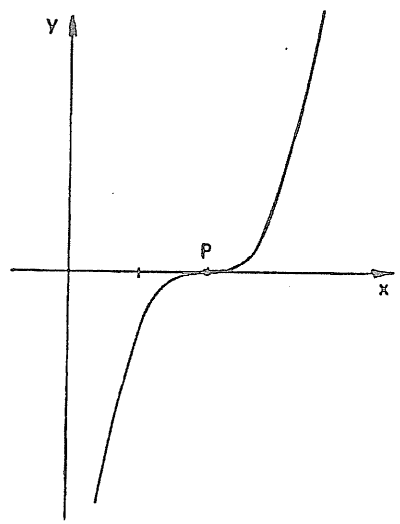
Para $x_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \simeq -0{,}58$ corresponde máximo local, como para $x_2 = -0{,}58$ es $y_2 = 0{,}38$ es $Q\,(-0{,}58\ ;\ 0{,}38)$, en Q hay máximo local.

Para $x_3 = 0$ corresponde inflexión, como para $x_3 = 0$ es $y_3 = 0$ es $S\,(0\ ;\ 0)$, en S hay inflexión de tangente oblicua.

No hay máximo ni mínimo absoluto finito.



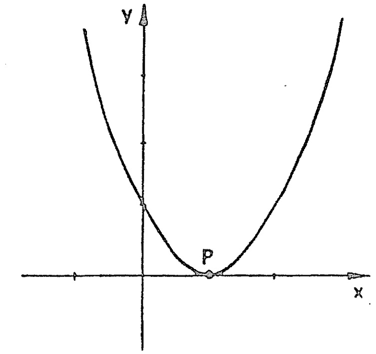
22°) $\varphi(x) = (x - 2)^3$



Rta.: No hay máximo ni mínimo locales.

Para $x_1 = 2$ corresponde inflexión de tangente horizontal, como para $x_1 = 2$ es $y_1 = 0$ es $P\,(2\ ;0)$, en P hay inflexión de tangente horizontal.

23°) $f(x) = (x - 1)^2$



Rta.: Para $x_1 = 1$ corresponde mínimo local; como para $x_1 = 1$ es $y_1 = 0$ es $P\,(1\ ;0)$, en P hay mínimo local.

Este valor $y = 0$ en P es mínimo absoluto.

No hay máximo local ni inflexión. Basta observar que es una parábola.

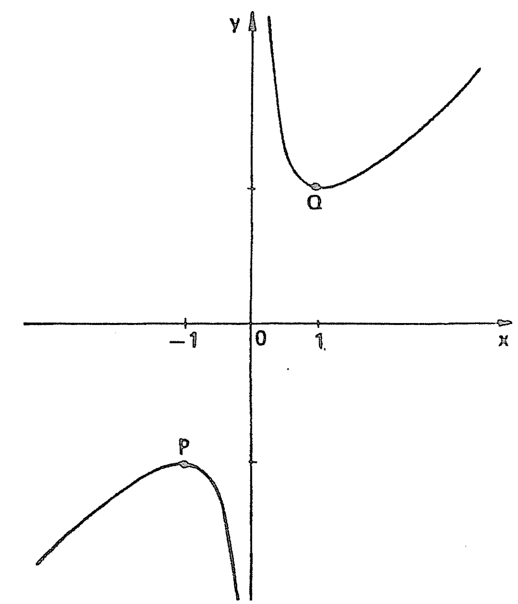
24°) $\varphi(x) = x\,(12 - 2\,x)^2$

Rta.: Para $x_1 = 2$ corresponde máximo local; como para $x_1 = 2$ es $y_1 = 128$ es $P\,(2\ ;128)$, en P hay máximo local.

Para $x_2 = 6$ corresponde mínimo local, como para $x_2 = 6$ es $y_2 = 0$ es $Q\,(6\ ;0)$. En Q hay mínimo local.

Para $x_3 = 4$ corresponde inflexión como para $x_3 = 4$ es $y_3 = 64$ es $S\,(4\ ;64)$, en S hay inflexión de tangente oblicua.

25°) $\varphi(x) = x + \dfrac{1}{x}$



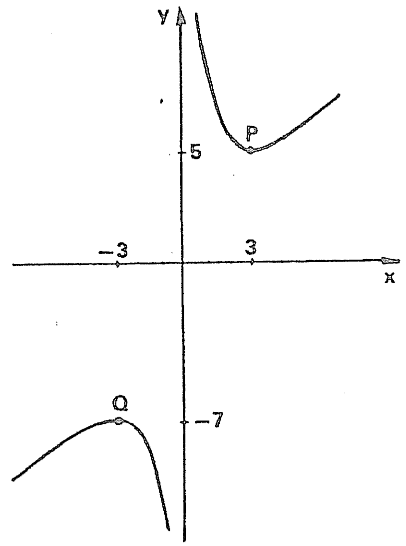
Rta.: Para $x_1 = -1$ corresponde máximo local; como para $x_1 = -1$ es $y_1 = -2$ es $P\,(-1;-2)$ en P hay máximo local.

Para $x_2 = 1$ corresponde mínimo local como para $x_2 = 1$ es $y_2 = 2$ es $Q\,(1\ ;\ 2)$, en Q hay mínimo local.

No hay inflexiones.

No hay máximos ni mínimos absolutos finitos.

26°) $f(x) = x + \dfrac{9}{x} - 1$



Rta.: Para $x_1 = 3$ corresponde mínimo local; como para $x_1 = 3$ es $y_1 = 5$ es P (3 ; 5), en P hay mínimo local.

Para $x_2 = -3$ corresponde máximo local como para $x_2 = -3$ es $y_2 = -7$ es Q $(-3\,;-7)$.

En Q hay máximo local.

No hay puntos de inflexión.

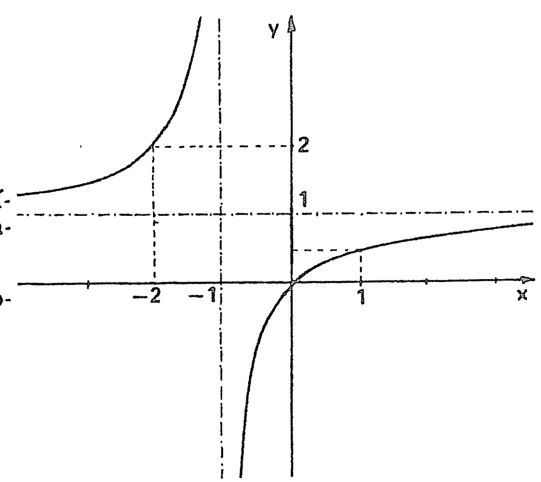
No hay máximo ni mínimo absoluto finitos.

27°) $\varphi(x) = x^2 - \dfrac{250}{x}$

Rta.: Para $x_1 = -5$ corresponde mínimo relativo; como para $x_1 = -5$ es $y_1 = 75$ es P $(-5; 75)$ en P hay mínimo relativo.

Para $x_2 = 5\sqrt[3]{2}$ corresponde inflexión; como para $x_2 = 5\sqrt[3]{2}$ es $y_2 \simeq 0$ es S $(5\sqrt[3]{2}\,; 0)$, en S hay inflexión.

28°) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

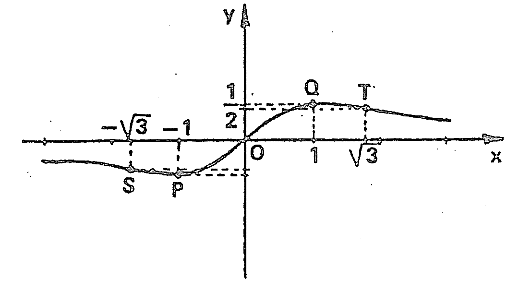


Rta.: No tiene máximos ni mínimos relativos, ni puntos de inflexión.

No tiene ni máximo ni mínimo absoluto finito.

29°) $\varphi(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Rta.: Para $x_1 = -1$ corresponde mínimo local; como para $x_1 = -1$ es $y_1 = -\dfrac{1}{2}$ es P $\left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$, en P hay mínimo local.



Para $x_2 = 1$ corresponde máximo local; como para $x_2 = 1$ es $y_2 = \dfrac{1}{2}$ es Q $\left(1\,; \dfrac{1}{2}\right)$ en Q hay máximo local.

Para $x_3 = -\sqrt{3}$ corresponde inflexión; como para $x_3 = -\sqrt{3}$ es $y_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ es S $\left(-\sqrt{3}\,; -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ en S hay inflexión de tangente oblicua.

Para $x_4 = 0$ corresponde inflexión; como para $x_4 = 0$ es $y_4 = 0$ es O (0 ; 0), en O hay inflexión de tangente oblicua.

Para $x_5 = +\sqrt{3}$ corresponde inflexión; como para $x_5 = +\sqrt{3}$ es $y_5 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ es T $\left(+\sqrt{3}\,; \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ en T hay inflexión de tangente oblicua.

El valor $-\dfrac{1}{2}$ que alcanza en Q es máximo absoluto.

El valor $-\dfrac{1}{2}$ que alcanza en P es mínimo absoluto.

30°) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

Rta.: Para $x_1 = -2$ corresponde mínimo local; como para $x_1 = -2$ es $y_1 = -\dfrac{1}{4}$ es P $\left(-2; -\dfrac{1}{4}\right)$ en P hay mínimo local.

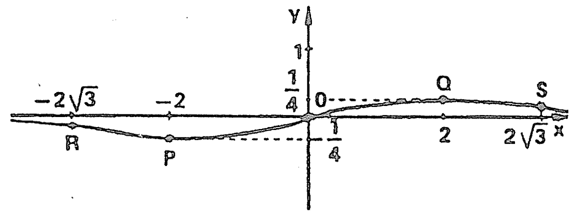
Para $x_2 = 2$ corresponde máximo local; como para $x_2 = 2$ es $y_2 = \frac{1}{4}$ es $Q\left(2; \frac{1}{4}\right)$, en Q hay máximo local.

Para $x_2 = -2\sqrt{3}$ corresponde inflexión; como para $x_2 = -2\sqrt{3}$ es $y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{8}$ es $R\left(-2\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, en R hay inflexión de tangente oblicua.

Para $x_3 = 0$ corresponde inflexión; como para $x_3 = 0$ es $y_3 = 0$ es O (0 ; 0), en 0 hay inflexión de tangente oblicua.

Para $x_4 = 2\sqrt{3}$ corresponde inflexión; como para $x_4 = 2\sqrt{3}$ es $y_4 = \frac{\sqrt{3}}{8}$ es $S\left(2\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, en S hay inflexión de tangente oblicua.

El valor $-\frac{1}{4}$ que alcanza en $x_1 = -2$ es mínimo absoluto. El valor $\frac{1}{4}$ que alcanza en $x_2 = 2$ es máximo absoluto.

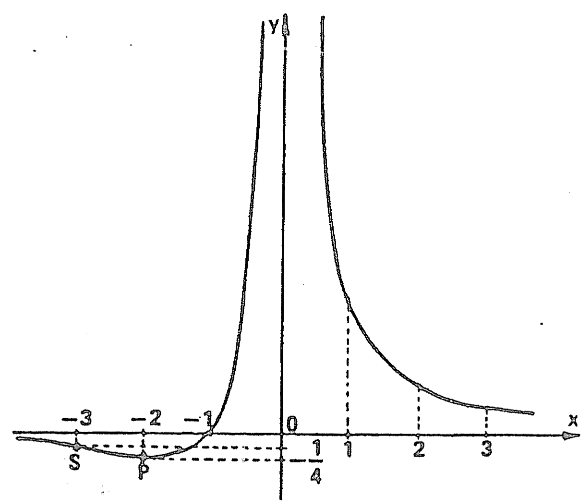


31°) $\varphi(x) = \frac{x+1}{x^2}$

Rta.: Para $x_1 = -2$ corresponde un mínimo local; como para $x_1 = -2$ es $y_1 = -\frac{1}{4}$ es $P\left(-2; -\frac{1}{4}\right)$, en P hay mínimo local.

Para $x_2 = -3$ corresponde una inflexión; como para $x_2 = -3$ es $y_2 = -\frac{2}{9}$ es $S\left(-3; -\frac{2}{9}\right)$ en S hay inflexión de tangente oblicua.

El valor $-\frac{1}{4}$ que alcanza en P es mínimo absoluto.

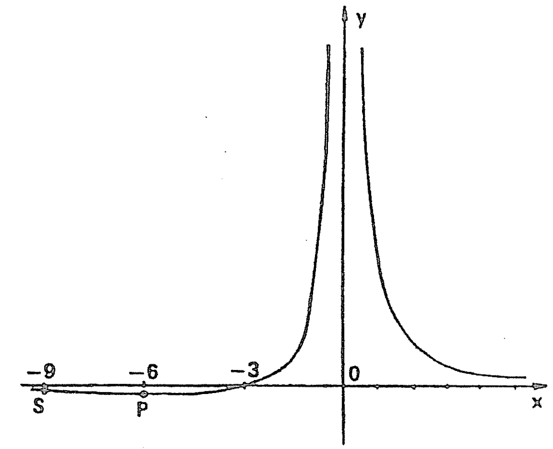


32°) $f(x) = \frac{x+3}{x^2}$

Rta.: Para $x_1 = -6$ corresponde un mínimo local; como para $x_1 = -6$ es $y_1 = -\frac{1}{12}$ es $P\left(-6; -\frac{1}{12}\right)$, en P hay mínimo relativo.

Para $x_2 = -9$ corresponde una inflexión; como para $x_2 = -9$ es $y_2 = -\frac{2}{27}$ es $S\left(-9; -\frac{2}{27}\right)$, en S hay inflexión de tangente oblicua.

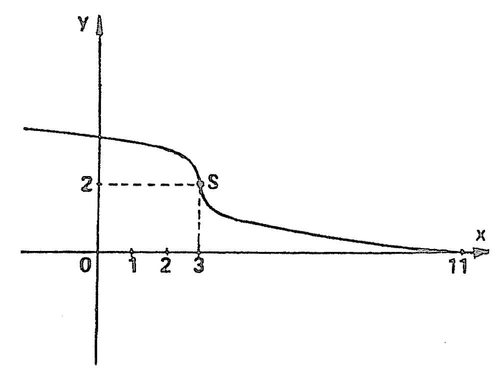
El valor $-\frac{1}{12}$ que alcanza en P es mínimo absoluto.



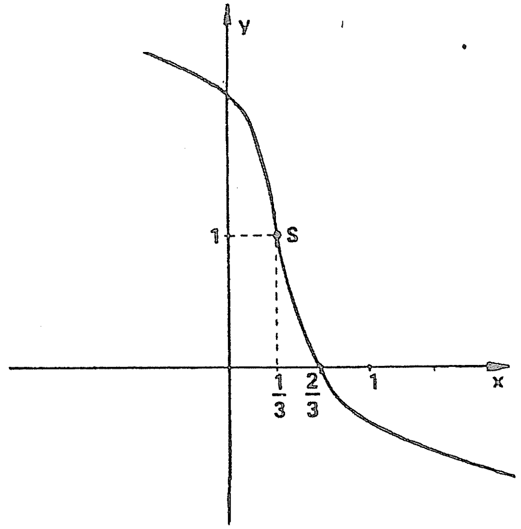
33°) $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x-3}$

Rta.: No tiene ni máximo ni mínimo locales.

Para $x_1 = 3$ corresponde inflexión; como para $x_1 = 3$ es $y_1 = 2$ es S (3 ; 2), en S hay inflexión de tangente oblicua.



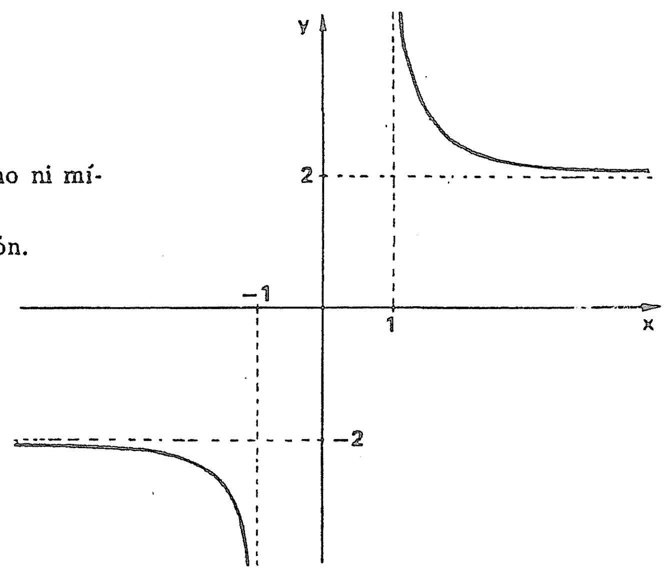
34°) $\varphi(x) = 1 - \sqrt[3]{3x - 1}$



Rta.: No tiene ni máximo ni mínimo relativos.

Para $x_1 = \frac{1}{3}$ corresponde inflexión; como para $x_1 = \frac{1}{3}$ es $y_1 = 1$ es $S\left(\frac{1}{3}; 1\right)$, en S hay inflexión.

35°) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

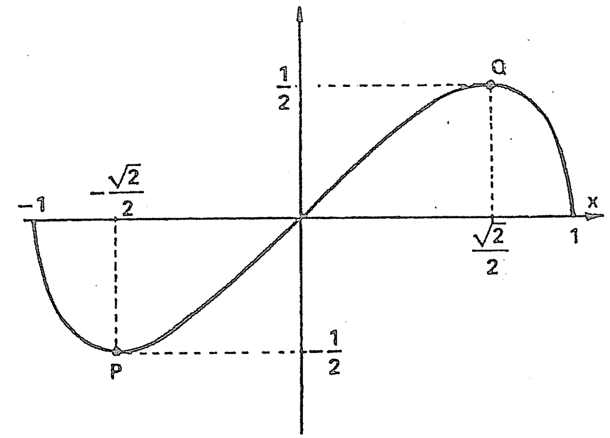


Rta.: No tiene máximo ni mínimos relativos.

No tiene puntos de inflexión.

36°) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$

Rta.: $D = [-1 ; 1]$



Para $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ corresponde un mínimo local; como para $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ es $y_1 = -\frac{1}{2}$ es $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, en P hay un mínimo relativo.

Para $x_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ corresponde un máximo local; como para $x_2 = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ es $y_2 = \frac{1}{2}$ es $Q\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, en Q hay máximo local.

Para $x = 0$ corresponde inflexión; como para $x = 0$ es $y = 0$ es O $(0 ; 0)$, en O hay inflexión.

El valor $-\frac{1}{2}$ que toma en P es mínimo absoluto y el valor $\frac{1}{2}$ que toma en Q es máximo absoluto.

37°) $\varphi(x) = x^2\sqrt{4 - x^2}$

Rta.: $D = [-2 ; 2]$

Para $x_1 = -\sqrt{\frac{8}{3}}$ corresponde máximo local; como para $x_1 = -\sqrt{\frac{8}{3}}$ es $y_1 = 3{,}08$ es $P\left(-\sqrt{\frac{8}{3}}; 3{,}08\right)$, en P hay máximo local.

Para $x_2 = +\sqrt{\frac{8}{3}}$ corresponde máximo local; como, para $x_2 = +\sqrt{\frac{8}{3}}$ es $y_2 = 3{,}08$ es $Q\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\,;\,3{,}08\right)$, en Q hay máximo local.

Para $x_3 = 0$ corresponde mínimo relativo; como para $x_3 = 0$ es $y_3 = 0$ es $O\,(0\,;0)$.

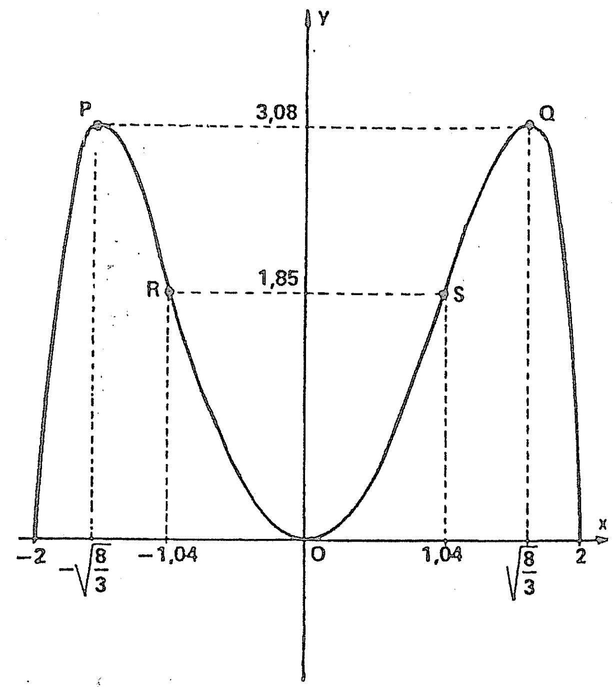
En 0 hay mínimo local.

Para $x_4 = -1{,}04$ corresponde inflexión; como para $x_4 = -1{,}04$ es $y_4 = 1{,}85$ es $R\,(-1{,}04; 1{,}85)$, en R hay inflexión de tangente oblicua.

Para $x_5 = 1{,}04$ corresponde inflexión; como para $x_5 = 1{,}04$ es $y_5 = 1{,}85$ es $S\,(1{,}04;\,1{,}85)$, en S hay inflexión de tangente oblicua.

El valor 3,08 que alcanza en P y en Q es el máximo absoluto.

El valor 0 es el mínimo absoluto, lo alcanza en 0 y en los extremos del dominio -2 y 2.



38°) $f(x) = x\sqrt[3]{x\,(1-x)}$

Rta.: Para $x_1 = 0$ corresponde mínimo local; como para $x_1 = 0$ es $y_1 = 0$ es $O\,(0\,;0)$.

En 0 hay mínimo local.

Para $x_2 = \frac{4}{5}$ corresponde máximo local.

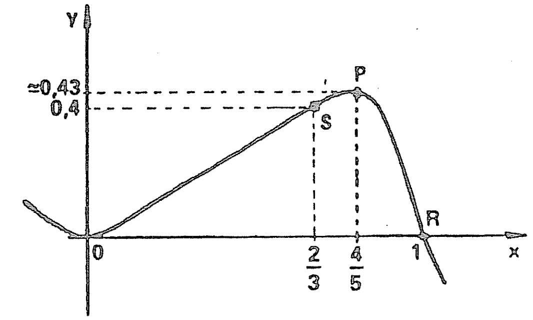
Como para $x_2 = \frac{4}{5}$ es $y_2 \simeq 0{,}43$ es $P\left(\frac{4}{5}\,;0{,}43\right)$.

En P hay máximo local.

Para $x_3 = \frac{2}{3}$ corresponde inflexión.

Como para $x_3 = \frac{2}{3}$ es $y_3 \simeq 0{,}4$ es $S\left(\frac{2}{3}\,;0\,;4\right)$, en S hay inflexión.

Para $x_4 = 1$ corresponde inflexión. Como para $x_4 = 1$ es $y_4 = 0$ es R (1 ; 0). En R hay inflexión.



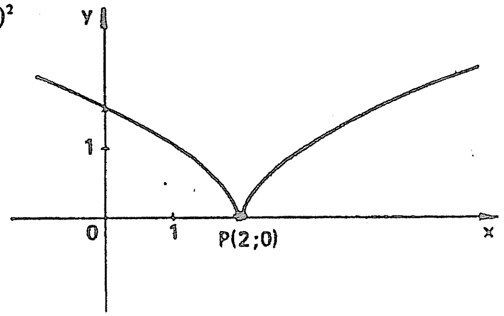
39°) $\varphi(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$

Se puede escribir también $\varphi(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$

Rta.: Para $x_1 = 2$ corresponde un mínimo local; como para $x_1 = 2$ es $y_1 = 0$ es P (2 ; 0), en P hay mínimo local.

Este valor 0 que toma en P es mínimo absoluto.

No hay puntos de inflexión.



40°) $f(x) = 2\,sen\,x + cos\,2\,x$ en el intervalo $[0;\,2\,\pi]$

Rta.: Es función periódica del período $2\,\pi$. Lo que ocurre en $[0\,;2\,\pi]$ se repite en los otros períodos.

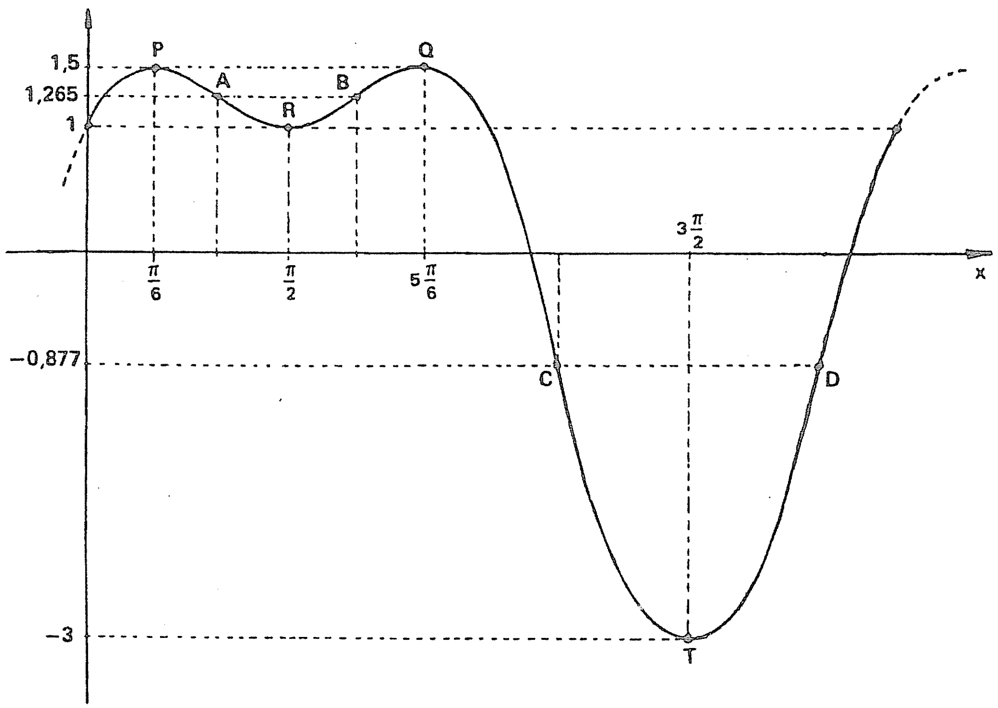
Para $x_1 = \frac{\pi}{6}$ corresponde un máximo local; como para $x_1 = \frac{\pi}{6}$ es $y_1 = \frac{3}{2}$; en $P\left(\frac{\pi}{6};\,\frac{3}{2}\right)$, hay máximo local.

Para $x_2 = 5\,\frac{\pi}{6}$ corresponde un máximo local; como para $x_2 = 5\,\frac{\pi}{6}$ es $y_2 = \frac{3}{2}$.
En $Q\left(5\,\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{3}{2}\right)$ hay máximo local.

Para $x_3 = \frac{\pi}{2}$ corresponde un mínimo local; como para $x_3 = \frac{\pi}{2}$ es $y_3 = 1$.

En $R\left(\frac{\pi}{2}\,;\,1\right)$ hay mínimo local.

Para $x_4 = 3\,\frac{\pi}{2}$ corresponde un mínimo local; como para $x_4 = 3\,\frac{\pi}{2}$ es $y_4 = -3$ en $T\left(3\,\frac{\pi}{2}\,;\,-3\right)$, hay mínimo local.



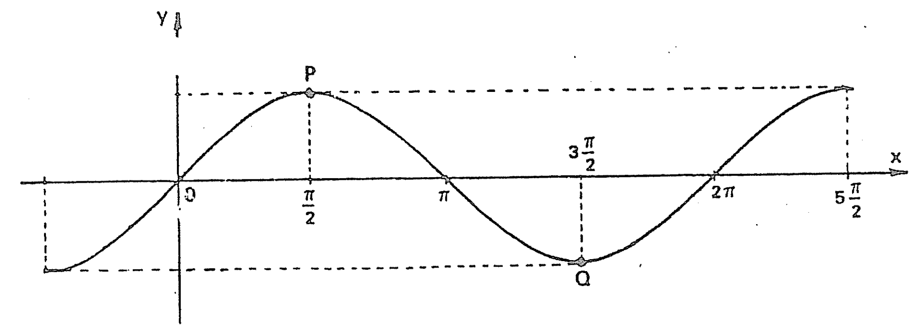
El valor $\frac{3}{2}$ es máximo absoluto. El valor -3 es mínimo absoluto. Hay inflexiones en los puntos:

A (1,001 ; 1,265) ; B (2,141 ; 1,265) ; C (3,772 ; − 0,877) ; D (5,652 ; − 0 877).

41°) $f(x) = sen\,x$

Rta.: Es función periódica del período $2\,\pi$. Lo que ocurre en el período $[0\,;\,2\,\pi]$ se repite en todos los otros períodos.

Para $x_1 = \frac{\pi}{2}$ y todos los congruentes con él, es decir $x = \frac{\pi}{2} + k\,2\,\pi$ corresponde un máximo local. Como para $x_1 = \frac{\pi}{2}$ y para todos los congruentes $x = \frac{\pi}{2} + k\,2\,\pi$ es $y_1 = 1$ en $P\left(\frac{\pi}{2}\,;\,1\right)$ y en todos los puntos de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2} + k\,2\,\pi\,;\,1\right)$ hay máximo local.



Para $x = 3\,\frac{\pi}{2}$ y todos los congruentes con él, es decir $x = \frac{3\,\pi}{2} + k\,2\,\pi$ corresponde un mínimo local. Como para $x_2 = 3\,\frac{\pi}{2}$ y todos los congruentes es $y = -1$ en Q de coordenadas $\left(3\,\frac{\pi}{2}\,;\,-1\right)$ y en todos los de coordenadas $\left(3\,\frac{\pi}{2} + k\,2\,\pi\,;\,1\right)$ hay mínimo local.

Para $x_3 = 0$ y todos los congruentes es decir $0 + k\,2\,\pi$ corresponde inflexión, como para $x_3 = 0$ y todos los congruentes es $y = 0$ resulta que en el punto de coordenadas $(0\,;\,0)$ y en todos los de coordenadas $(2\,k\,\pi\,;\,0)$ hay inflexiones de tangente oblicua.

Para $x_4 = \pi$ y todos los congruentes, es decir $x = \pi + k\,2\,\pi$ corresponde inflexión. Como para $x_4 = \pi$ y todos los congruentes es $y = 0$; resulta que en todos los puntos de coordenadas $(\pi\,;\,0)$ y los $(\pi + 2\,k\,\pi\,;\,0)$ hay inflexiones de tangente oblicua.

El valor 1 que lo alcanza en infinitos puntos es máximo absoluto. El valor -1 que lo alcanza en infinitos puntos es mínimo absoluto.

En definitiva: infinitos máximos locales y absolutos, infinitos mínimos locales y absolutos, infinitas inflexiones de tangente oblicua.

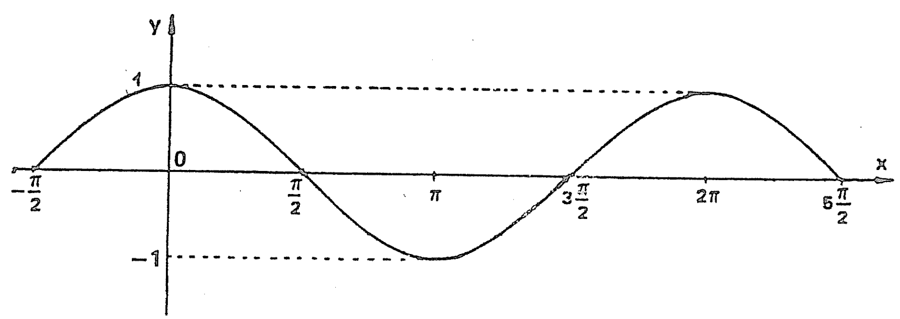
42°) $\varphi(x) = \cos x$

Rta.: Es también función periódica de período 2π con características semejantes a la función $\operatorname{sen} x$, pero desplazadas en $\frac{\pi}{2}$ los valores de x que corresponden a máximos, a mínimos locales y absolutos y a inflexión.

Por lo tanto:

En $x_1 = 0$ e $y_1 = 1$ y todos los congruentes de coordenadas $(0 + k\,2\pi\,;1)$ hay máximo local que es a la vez máximo absoluto.

En $x_2 = \pi$ e $y_2 = -1$ y todas las congruentes de coordenadas $(\pi + k\,2\pi\,;-1)$ hay mínimo local que es a la vez mínimo absoluto.



En $x_3 = \frac{\pi}{2}$ es $y_3 = 0$ y en todos los puntos de coordenadas $\left(\frac{\pi}{2} + k\,2\pi\,;0\right)$ hay inflexiones de tangente oblicua.

También en todos los puntos $x_4 = 3\,\frac{\pi}{2}$; $y_4 = 0$ y todos los puntos de coordenadas $\left(3\,\frac{\pi}{2} + k\,2\pi\,;0\right)$ hay inflexiones de tangente oblicua.

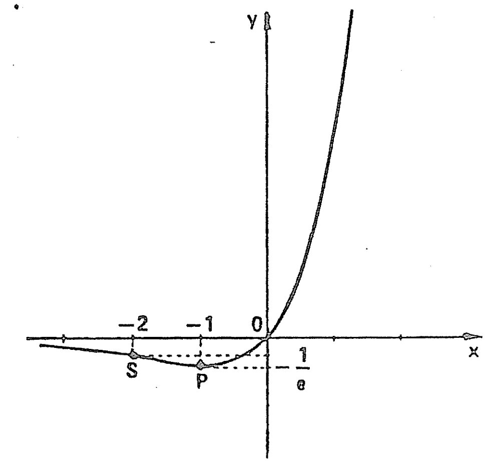
43°) $f(x) = x\,e^{x}$

Rta.: Para $x_1 = -1$ corresponde mínimo local; como para $x_1 = -1$ es $y_1 = -\frac{1}{e} \simeq -0{,}37$ en $P\,(-1\,;-0{,}37)$ hay mínimo local.

Para $x_2 = -2$ corresponde inflexión; como para $x_2 = -2$ es $y_2 = -\frac{2}{e^2} \simeq -0{,}27$ es $S\,(-2\,;-0{,}27)$ en S hay inflexión.

No hay máximo local.

El valor $-0{,}37$ que toma en P es mínimo absoluto.



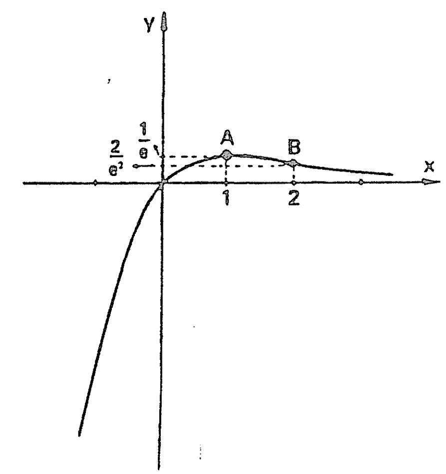
44°) $f(x) = x\,e^{-x}$

Rta.: Para $x_1 = 1$ corresponde máximo local; como para $x_1 = 1$ es $y_1 = \frac{1}{e} \simeq 0{,}37$ es $P\,(1\,;0{,}37)$, en P hay máximo local.

Para $x_2 = 2$ corresponde inflexión, como para $x_2 = 2$ es $y_2 = \frac{2}{e^2} \simeq$ $\simeq 0{,}27$ es $S\,(2\,;0{,}27)$, en S hay inflexión.

No hay mínimo local.

El valor $0{,}37$ que toma en P es máximo absoluto.



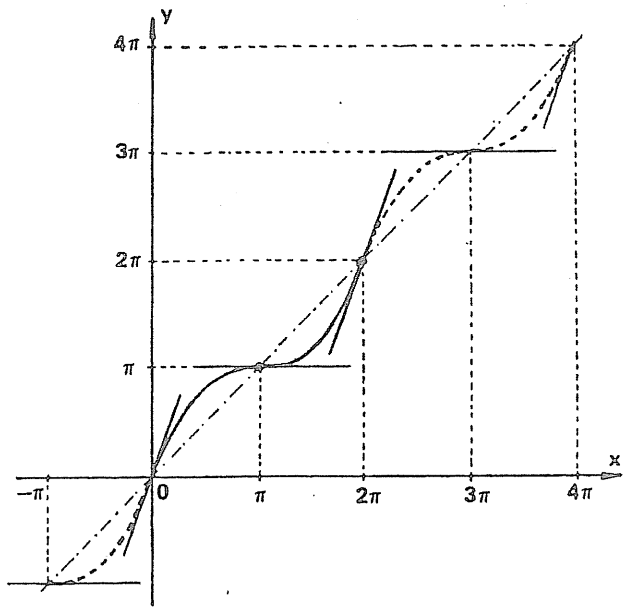
45°) $\varphi(x) = x + sen\, x$

Rta.: No hay máximos ni mínimos.

Hay inflexión de tangente horizontal en todos los puntos de abscisa $x = \pi + 2\,k\,\pi$.

Hay inflexión de tangente oblicua en todos los puntos de abscisa $x = 2\,k\,\pi$, se destaca el gráfico en el intervalo $[0\,;\,2\,\pi]$, pues se verifica

$$\varphi\,(x + 2\,\pi) = \varphi(x) + 2\,\pi$$



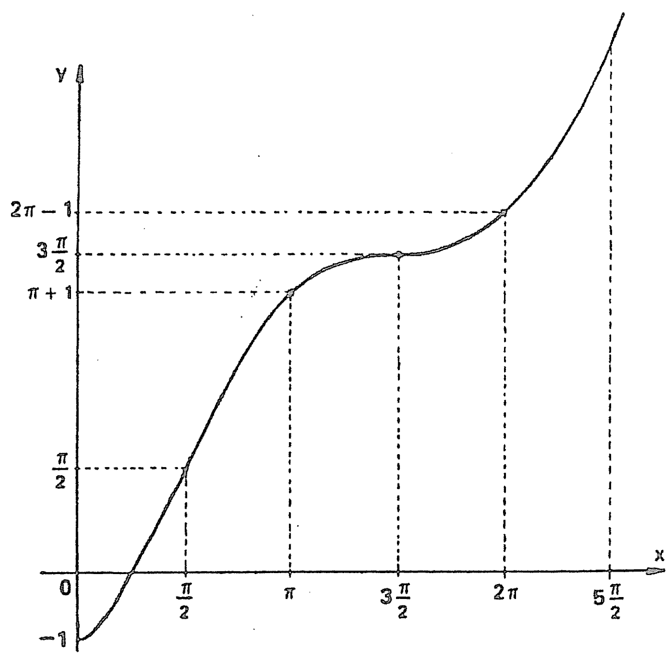
46°) $g(x) = x - cos\, x$

Rta.: No hay máximos ni mínimos.

Hay inflexión de tangente horizontal en todos los puntos de abscisa $x = 3\,\dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$.

Hay inflexión de tangente oblicua en todos los puntos de abscisa $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\,k\,\pi$, se destaca el gráfico en el intervalo $[0\,;\,2\,\pi]$ pues se verifica

$$g(x + 2\,\pi) = g(x) + 2\,\pi$$

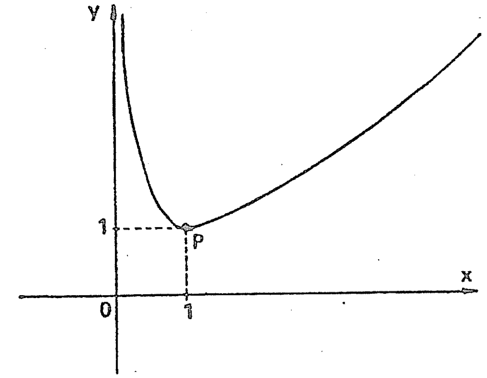


47°) $f(x) = x - ln\, x$

Rta.: Para $x_1 = 1$ corresponde un mínimo relativo; como para $x_1 = 1$ es $y_1 = 1$ es P (1 ; 1), en P hay un mínimo local.

No hay máximos relativos ni inflexiones.

El valor 1 que alcanza en P es mínimo absoluto.

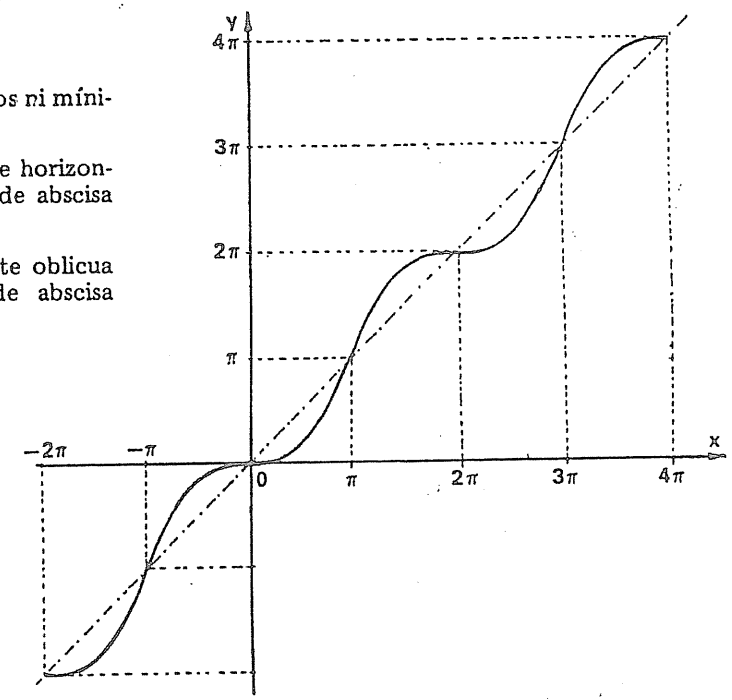


48°) $f(x) = x - sen\, x$

Rta.: No hay máximos ni mínimos.

Hay inflexión de tangente horizontal en todos los puntos de abscisa $x = 2\,k\,\pi$.

Hay inflexión de tangente oblicua en todos los puntos de abscisa $x = \pi + 2\,k\,\pi$.



49°) $\varphi(x) = x^2 . e^x$

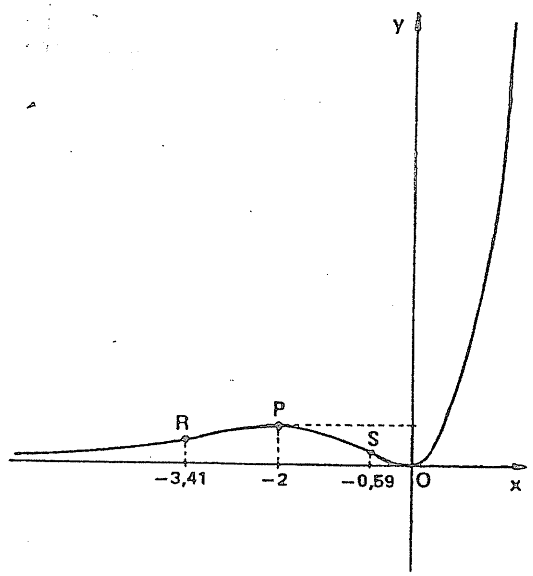
Rta.: Para $x_1 = -2$ corresponde máximo local; como para $x_1 = -2$ es $y_1 = \dfrac{4}{e^2} \simeq 0{,}54$ es P $(-2 ; 0{,}54)$, en P hay máximo local.

Para $x_2 = 0$ corresponde un mínimo local; como para $x_2 = 0$ es $y_2 = 0$ es O $(0 ; 0)$ en el origen O hay mínimo relativo.

Para $x_3 = -2 + \sqrt{2}$ corresponde una inflexión; como para $x_3 = -2 + \sqrt{2}$ es $y_3 \simeq 0{,}19$ es S $(-0{,}59 ; 0{,}19)$, en S hay inflexión.

Para $x_4 = -2 - \sqrt{2}$ corresponde una inflexión; como para $x_4 = -2 - \sqrt{2} \simeq -3{,}41$ es $y_4 = 0{,}38$ es R $(-3{,}41 ; 0{,}38)$, en R hay inflexión.

El valor 0 que toma en el origen, es mínimo absoluto.



50°) $g(x) = x - 5 + \dfrac{9}{x}$

Rta.: Para $x_1 = 3$ corresponde mínimo relativo; como para $x_1 = 3$ es $y_1 = 1$ es P $(3 ; 1)$, en P hay mínimo relativo.

Para $x_2 = -3$ corresponde máximo relativo; como para $x_2 = -3$ corresponde máximo relativo; como para $x_2 = -3$ es $y_2 = -11$ es Q $(-3 ; -11)$.

No hay inflexiones.

51°) $f(x) = x + \cos x$

Rta.: No hay máximos ni mínimos.

Hay inflexión de tangente horizontal en todos los puntos de abscisa

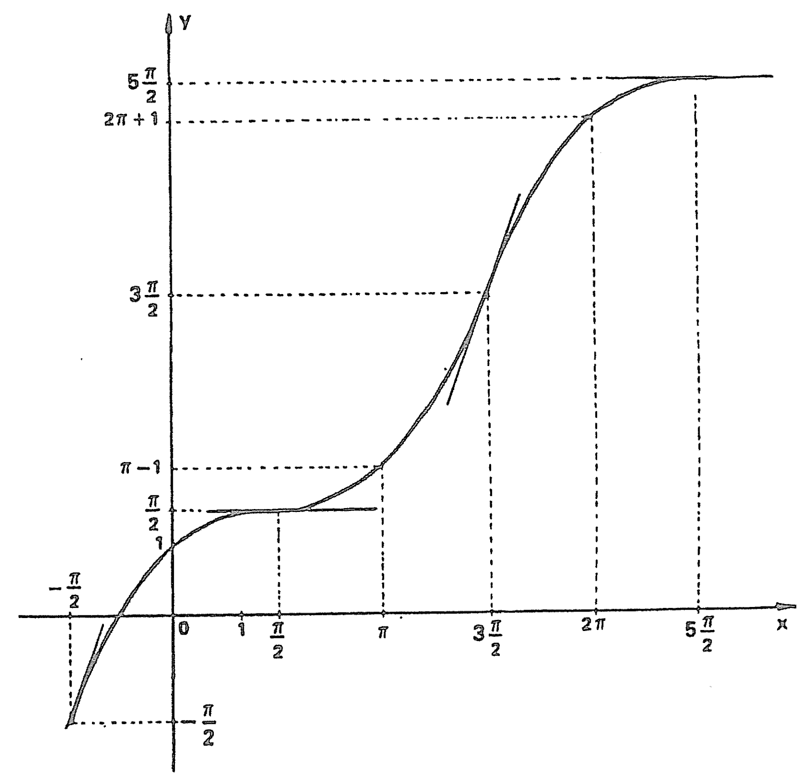
$$x = \frac{\pi}{2} + 2 k \pi .$$

Hay inflexión de tangente oblicua en todos los puntos de abscisa

$$x = 3 \frac{\pi}{2} + 2 k \pi .$$

Se verifica

$$f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi$$



52°) $f(x) = (x-1)^2\,(x^2-3)$

Rta.: Para $x_1 = -1$ corresponde mínimo local; como para $x_1 = -1$ es $y_1 = -8$ es $P_1(-1\,;-8)$, en P hay mínimo local.

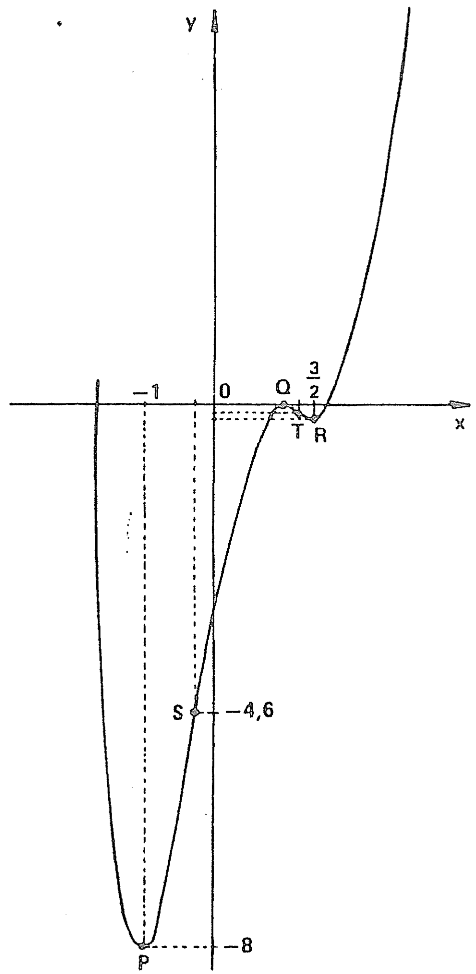
Para $x_2 = 1$ corresponde máximo local; como para $x_2 = 1$ es $y_2 = 0$ es Q $(1\,;0)$, en Q hay máximo local.

Para $x_3 = \dfrac{3}{2}$ corresponde mínimo local, como para $x_3 = \dfrac{3}{2}$ es $y_3 = -\dfrac{3}{16}$ es R $\left(\dfrac{3}{2}\,;\,-\dfrac{3}{16}\right)$, en R hay mínimo local.

Para $x_4 \simeq -0{,}26$ corresponde inflexión, como para $x_4 = -0{,}26$ es $y_4 = -4{,}6$ es S $(-0{,}26\,;-4{,}6)$, en S hay inflexión.

Para $x_5 \simeq 1{,}26$ corresponde inflexión, como para $x_5 = 1{,}26$ es $y_5 = 0{,}19$ es T $(1{,}26\,;0{,}19)$, en T hay inflexión.

El valor -8 que toma en P es mínimo absoluto.



Estudio completo y gráfica de funciones

Se determina el dominio de la función.

Si es derivable se obtiene la primera derivada y se determinan los puntos críticos.

Se estudia el signo de esta primera derivada en los intervalos comprendidos entre cada dos puntos críticos consecutivos; a la izquierda de la menor abscisa de punto crítico y a la derecha de la mayor abscisa de punto crítico. Este signo se puede determinar por dos procedimientos:

1°) Procedimiento: es el más fácil. Dado que el signo de la derivada permanece invariable en cada uno de estos intervalos, basta determinar el signo de la misma en un punto del intervalo.

2°) Procedimiento: se resuelve la inecuación que resulta en cada intervalo.

Estos signos permiten determinar los intervalos en que la función es creciente, en los que es decreciente y si en los puntos críticos hay máximos o mínimos locales e inflexiones de tangente horizontal. Se observa si los máximos y mínimos locales son absolutos.

Se obtiene la segunda derivada; se determinan los valores de x que la anulan. Si la tercera derivada en ellos es distinta de cero hay inflexión. Se estudia el signo de la segunda derivada en los intervalos correspondientes, por cualquiera de los dos procedimientos que se indicaron para determinar el signo de la primera derivada, y este signo nos da los intervalos de concavidad, de convexidad y ratifica los puntos de inflexión ya encontrados.

Para el gráfico, es conveniente: 1°) observar si la curva es simétrica; 2°) determinar (si no es muy complicado) los puntos en que la curva corta al eje x y al eje y; 3°) obtener las asíntotas si es que las hay.

Ejemplos resueltos

1°) Estudiar la función:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$$

Como toda la función polinómica está definida para todo x, luego $D = R$.

La primera derivada es:

$$f'(x) = x^2 + x - 6$$

esta derivada está definida para todo x, luego los únicos puntos críticos son aquellos valores de x que la anulan:

$$x^2 + x - 6 = 0 \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

en los puntos que corresponden a estos valores $x = -3$ y $x = 2$ puede haber máximo, o mínimo relativo o inflexión. Para saber qué ocurre se estudia el signo de la primera derivada en cada uno de los tres intervalos:

$$x < -3 \;;\; -3 < x < 2 \;;\; x > 2$$

Primer Procedimiento

En el intervalo $x < -3$ se considera un punto cualquiera, por ejemplo: $x = -4$, resulta $f'(-4) = 16 - 4 - 6 = 6 > 0 \Longrightarrow f'(x)$ positiva $\Longrightarrow f(x)$ es creciente para $x < -3$.

En el intervalo $-3 < x < 2$ se considera un punto cualquiera, por ejemplo: $x = 0$ resulta $f'(0) = -6 < 0 \Longrightarrow f'(x)$ negativa $\Longrightarrow f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-3\,;2)$.

En el intervalo $x > 2$ se considera un punto cualquiera, por ejemplo: $x = 5$, resulta $f'(5) = 25 + 5 - 6 = 24 > 0 \Longrightarrow f'(x)$ positiva $\Longrightarrow f(x)$ creciente para $x > 2$.

Segundo procedimiento

En este ejemplo, se ha visto que las raíces de $x^2 + x - 6 = 0$ son -3 y 2, se puede factorear:

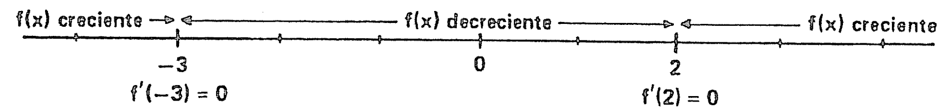
$f(x)' = x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ queda expresada como producto de dos factores:

$\forall\, x < -3$ los dos factores son negativos $\Longrightarrow f'(x)$ positiva $\Longrightarrow f(x)$ es creciente para $x < -3$.

$\forall\, x \,/\, -3 < x < 2$ el primer factor es $+$ el segundo es $- \Longrightarrow f'(x)$ negativa $\Longrightarrow f(x)$ es decreciente en $(-3\,;2)$.

$\forall\, x > 2$ los dos factores son positivos $\Longrightarrow f'(x)$ positiva $\Longrightarrow f(x)$ es creciente para $x > 2$.

Por los dos procedimientos se obtienen los mismos resultados, que gráficamente se pueden expresar:



En $x = -3$ la derivada es 0, a la izquierda la función es creciente y a la derecha decreciente; esto implica que en el punto correspondiente a $x = -3$ hay un máximo local. Como para:

$$x = -3 \quad \text{es} \quad f(-3) = \frac{1}{3}(-27) + \frac{1}{2}\,9 - 6\,(-3) = -9 + \frac{9}{2} + 18 = 13{,}5$$

resulta que en el punto de coordenadas $x = -3\,;\; y = 13{,}5$ hay un máximo local.

En $x = 2$ la derivada es 0; la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha, esto implica que en el punto que corresponde a $x = 2$ hay un mínimo local. Como para $x = 2$ es

$$f(2) = \frac{1}{3}8 + \frac{1}{2}4 - 6 \cdot 2 = \frac{8}{3} + 2 - 12 \simeq -7{,}3$$

resulta que en el punto de coordenadas $x = 2\,;\; y = -7{,}3$ hay un mínimo local.

Este máximo y este mínimo no son absolutos, pues:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6\right) = -\infty$$

Puntos de inflexión -- Intervalos de concavidad y de convexidad

Se obtiene la segunda derivada

$f''(x) = 2x + 1$ está definida para todo x. Se determina para qué valores de x se anula.

$f''(x) = 0 \Longrightarrow 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

se obtiene la tercera derivada

$f'''(x) = 2 \neq 0$

en el punto que corresponde a $x = -\dfrac{1}{2}$ hay inflexión de tangente oblicua.

Como para $x = -\dfrac{1}{2}$ es $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{8}\right) + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4} - 6\left(-\dfrac{1}{2}\right) =$

$$= -\frac{1}{24} + \frac{1}{8} + 3 \simeq 3{,}1$$

resulta que en el punto de coordenadas $x = -\dfrac{1}{2}$; $y = 3{,}1$ hay una inflexión de tangente oblicua.

Para determinar los intervalos de concavidad hacia arriba o hacia abajo, se estudia el signo de la segunda derivada a la izquierda y a la derecha de $x = -\dfrac{1}{2}$ que es donde se anula. Se tiene:

Primer Procedimiento

A la izquierda de $x = -\dfrac{1}{2}$ por ejemplo $x = -1$ es $f''(-1) = 2(-1) + 1 = -1$ negativa $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ convexidad.

A la derecha de $x = -\dfrac{1}{2}$ por ejemplo $x = 1$ es $f''(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ positiva $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ concavidad.

Segundo Procedimiento

$\forall x < -\dfrac{1}{2}$ la $f''(x)$ es negativa, en efecto: $f''(x) = 2x + 1 < 0 \Longrightarrow 2x < -1$

$\Longrightarrow x < -\dfrac{1}{2}$

por lo tanto a la izquierda de $x = -\dfrac{1}{2}$ la función es cóncava hacia abajo, o sea convexa.

$\forall x > -\dfrac{1}{2}$ la $f''(x)$ es positiva, en efecto: $f''(x) = 2x + 1 > 0 \Longrightarrow 2x > -1$

$\Longrightarrow x > -\dfrac{1}{2}$

por lo tanto a la derecha de $x = -\dfrac{1}{2}$ la función es cóncava hacia arriba.

OBSERVACIONES

1°) El que la curva sea convexa a la izquierda de $x = -\dfrac{1}{2}$ y cóncava a la derecha, ratifica, como ya se vio, que para $x = -\dfrac{1}{2}$ corresponde un punto de inflexión.

2°) Como para $x = -3$ y $x = -2$ donde se anula la primera derivada es:

$f''(-3) = 2(-3) + 1 = -5 < 0 \Longrightarrow$ para $x = -3$ un máximo relativo como ya se determinó.

$f''(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 > 0 \Longrightarrow$ para $x = 2$ un mínimo relativo como ya se determinó.

Puntos en que la curva corta a los ejes. El punto en que la curva corta al eje y es el que resulta para $x = 0$ como $f(0) = 0$ la curva pasa por el origen.

Los puntos en que la curva corta al eje x son los ceros de la función, es decir aquellos puntos en que la función toma el valor 0, o sea:

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 6x = 0$ se multiplica por 6 para evitar coeficientes fraccionarios

$2x^3 + 3x^2 - 36x = 0$ se saca factor común x

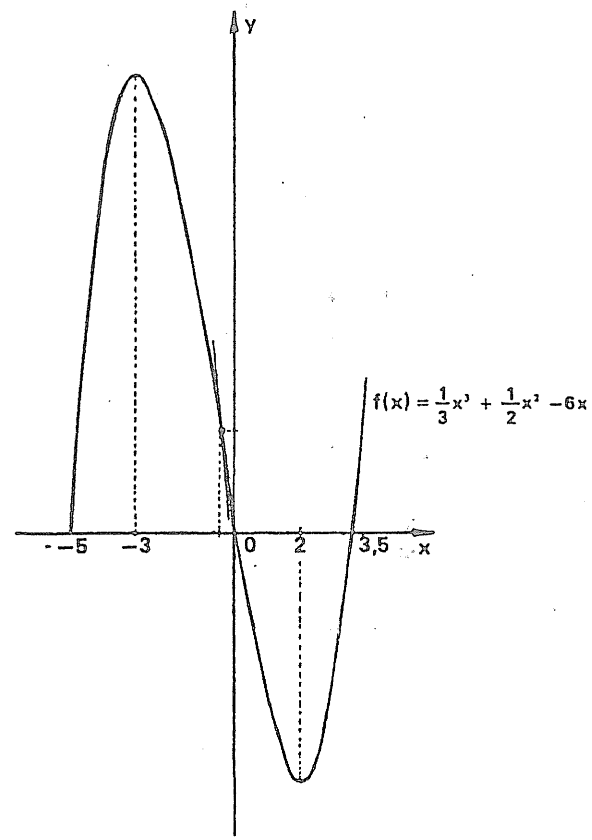
$$x(2x^2 + 3x - 36) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + 3x - 36 = 0 \end{cases}$$

como las raíces de $2x^2 + 3x - 36 = 0$ son

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+288}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{297}}{4} \simeq \frac{-3 \pm 17}{4} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+17}{4} \simeq 3{,}5 \\[2ex] x_2 = \dfrac{-3-17}{4} \simeq -5 \end{cases}$$

Los tres valores que anulan la función son: $x = 0$; $x \simeq 3{,}5$; $x \simeq -5$, que son los puntos en que la curva corta al eje x.

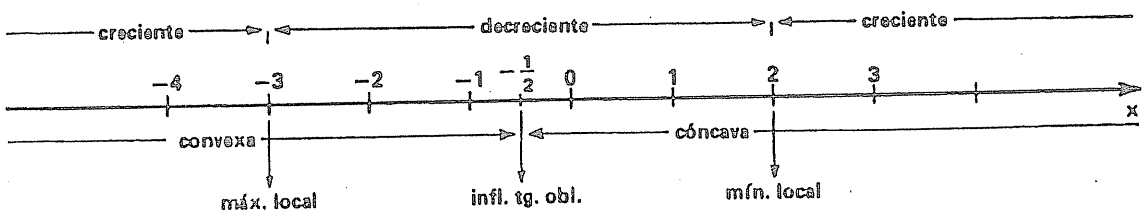
No tiene asíntotas por ser una función polinómica.



Cuadro sinóptico del comportamiento de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	*Conclusiones*
$x < -3$		> 0			Creciente a la izquierda de $x = -3$
$x = -3$	13,5	0	$-5 < 0$		Máximo local en el punto $\begin{cases} x = -3 \\ y = 13{,}5 \end{cases}$
$-3 < x < 2$		< 0			Decreciente en el intervalo $(-3\,;2)$
$x = -\frac{1}{2}$	3,1	$\neq 0$	0	$2 \neq$	Inflex. de tg. oblicua en el pto. $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 3{,}1 \end{cases}$
$x = 2$	$-7{,}3$	0	$5 > 0$		Mínimo local en el punto $\begin{cases} x = 2 \\ y = -7{,}3 \end{cases}$
$x > 2$		> 0			Creciente a la derecha de $x = 2$
$x < -\frac{1}{2}$			< 0		Convexa o cóncava hacia abajo a la izquierda de $x = -\frac{1}{2}$
$x > -\frac{1}{2}$			> 0		Cóncava hacia arriba a la derecha de $x = -\frac{1}{2}$
$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3{,}5 \\ x = -5 \end{array}\right\}$	0				La curva corta al eje x en 0 ; en 3,5 y en -5.
$x = 0$	0				La curva corta al eje x en el origen

Abreviadamente



2°) Estudiar la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

Es una función racional, como tal puede tener asíntotas y no estar definida en algunos puntos.

Esta función no está definida en $x = 1$ pues en él se anula el denominador, por lo tanto el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto 1.
La primera derivada es:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - 1 \cdot (x^2 - 2x + 2)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - \cancel{2x} - 2x + \cancel{2} - x^2 + \cancel{2x} - \cancel{2}}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

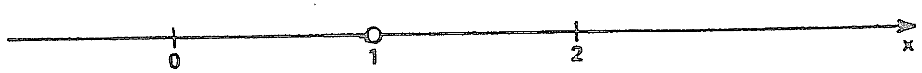
$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Esta derivada no está definida en $x = 1$ y se anula para los valores de x que anulan el numerador, o sea:

$$x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bien} \\ x - 2 = 0 \implies x = 2 \end{cases}$$

es decir que se anula en dos puntos.

Hay 3 puntos críticos: $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$.



Para saber en qué puntos la función es creciente y en cuáles decreciente, hay que determinar el signo de la primera derivada en cuatro intervalos que son: a la izquierda de 0, el intervalo (0 ; 1), el (1 ; 2) y a la derecha de 2.

Primer Procedimiento:

En el intervalo $x < 0$ se considera un punto cualquiera, por ejemplo $x = -3$, resulta

$$f'(-3) = \frac{(-3)(-3-2)}{(-3-1)^2} = \frac{(-3)(-5)}{(-4)^2} = \frac{15}{16} > 0 \implies f'(x) \text{ positivo} \implies f(x) \text{ crec. en } x < 0$$

En el intervalo (0 , 1) se elige un punto cualquiera, por ejemplo $x = 0{,}5$, resulta

$$f'(0{,}5) = \frac{0{,}5\,(0{,}5-2)}{(0{,}5-1)^2} = \frac{0{,}5\,(-1{,}5)}{(-0{,}5)^2} = \frac{-0{,}75}{0{,}25} < 0 \implies f'(x) \text{ negativo} \implies f(x) \text{ decrec. en } (0{,}1)$$

En el intervalo (1 ; 2) se elige un punto cualquiera, por ejemplo $x = 1{,}5$, resulta

$$f'(1{,}5) = \frac{1{,}5\,(1{,}5-2)}{(1{,}5-1)^2} = \frac{1{,}5\,(-0{,}5)}{0{,}5^2} = \frac{-0{,}75}{0{,}25} < 0 \implies f'(x) \text{ negativo} \implies f(x) \text{ decrec. en } (1;2)$$

En el intervalo $x > 2$ se elige un punto cualquiera, por ejemplo $x = 3$, resulta

$$f'(3) = \frac{3\,(3-2)}{(3-1)^2} = \frac{3 \cdot 1}{2^2} = \frac{3}{4} > 0 \implies f'(x) \text{ positivo} \implies f(x) \text{ creciente en } x > 2.$$

Segundo Procedimiento

La derivada tiene el denominador siempre positivo porque es un cuadrado y en el numerador 2 factores que son x y $(x-2)$, para determinar el signo de $f'(x)$ se determina el de cada uno de ellos y se tiene:

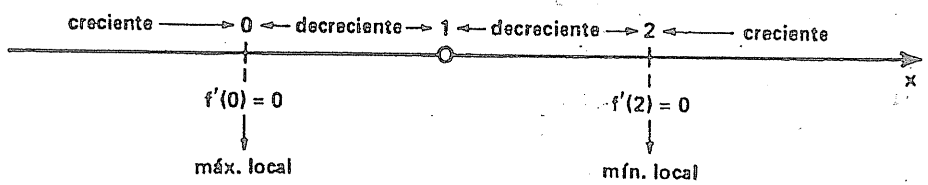
$$\forall x < 0 \quad sig \text{ de } f'(x) = \frac{- \cdot (-)}{+} = + \implies \text{función creciente a la izquierda de 0}$$

$$\forall x / 0 < x < 1 \quad sig \text{ de } f'(x) = \frac{+ (-)}{+} = - \implies \text{función decreciente en el intervalo } (0 ; 1)$$

$$\forall x \,/\, 1 < x < 2 \quad sig \text{ de } f\,'(x) = \frac{+\,(-)}{+} = - \Longrightarrow$$ función decreciente en el intervalo (1 ; 2)

$$\forall x > 2 \quad sig \text{ de } f\,'(x) = \frac{+\,(+)}{+} = + \Longrightarrow$$ función creciente a la derecha de 2.

Luego:



Como en $x = 0$ la primera derivada es 0, a la izquierda la función es creciente y a la derecha decreciente, para $x = 0$ corresponde un máximo local.

Dado que para $x = 0$ es $f(0) = -2$, resulta que en el punto de coordenadas $x = 0\,;\, y = -2$ hay un máximo relativo.

Como en $x = 2$ la primera derivada es 0, a la izquierda la función es decreciente y a la derecha es creciente, resulta que para $x = 2$ corresponde un mínimo relativo. Dado que para $x = 2$ es $f(2) = 2$ resulta que en el punto de coordenadas $x = 2\,;\, y = 2$ hay un mínimo relativo.

Este máximo y este mínimo relativos no son absolutos, pues:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = +\infty$$

Puntos de inflexión intervalos de concavidad

Se obtiene la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{[1\,(x-2) + 1\,x]\;(x-1)^2 - 2\,(x-1)\,[x\,(x-2)]}{(x-1)^4} = \frac{[2\,x-2]\,(x-1) - 2\,x\,(x-2)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{2x} - \cancel{2x} + 2 - \cancel{2x^2} + \cancel{4x}}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$ esta segunda derivada no se anula para ningún valor de x, luego, no hay punto de inflexión.

No está definida en $x = 1$.

Para determinar los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo, se estudia el signo de la segunda derivada en los puntos en que está definida, es decir a la izquierda de 1 y a la derecha de 1.

$$\forall x < 1 \quad \text{es} \quad f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$ negativa porque el denominador es < 0 luego, la función es cóncava hacia abajo a la izquierda de 1.

$$\forall x > 1 \quad \text{es} \quad f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$ positiva porque el denominador es > 0 luego, la función es cóncava hacia arriba a la derecha de 1.

Observación: en los puntos $x = 0$ y $x = 2$ en que se anula la primera derivada, resulta para la segunda derivada los valores:

$$f''(0) = \frac{2}{(0-1)^3} = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \Longrightarrow$$ para $x = 0$ corresponde un máximo relativo

$$f''(2) = \frac{2}{(2-1)^3} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Longrightarrow$$ para $x = 2$ corresponde un mínimo local

Resultados que ratifican los que ya se han obtenido mediante el cambio de signo de la primera derivada.

ASINTOTAS

Asíntotas oblicuas

$$p = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-2x+2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+2}{x^2-x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - p\,x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+2}{x-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}-2x+2-\cancel{x^2}+x}{x-1}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+2}{x-1} = -1$$

luego, hay una asíntota oblicua que es:

$$y = x - 1$$

Asíntotas verticales

Cuando $x \longrightarrow 1$ la función tiende a ∞, luego, hay una asíntota vertical que es $x = 1$.

Puntos en que la curva corta a los ejes

La función se anula para los valores de x que hacen 0 al numerador, es decir para las raíces de la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$.

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \implies x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} \begin{cases} x_1 = 1 + i \\ x_2 = 1 - i \end{cases}$$

que son números complejos, en consecuencia la función no se anula para ningún x real y por lo tanto la curva no corta al eje x.

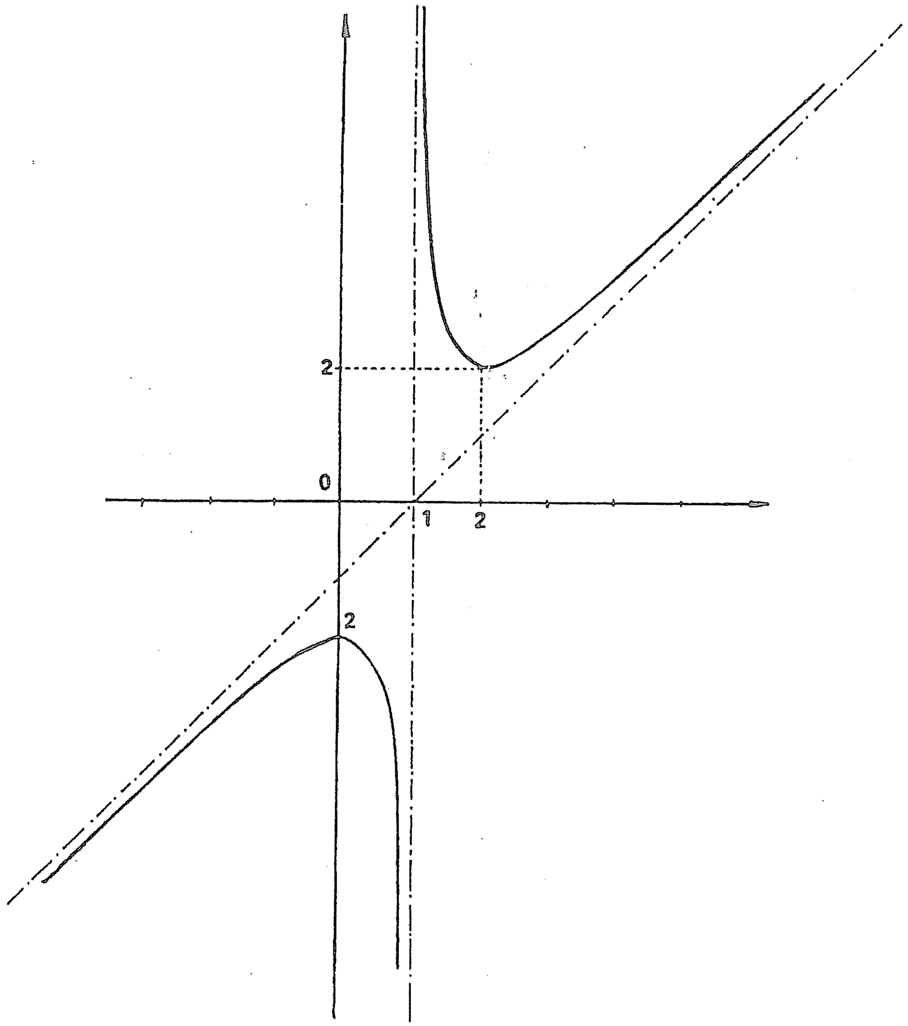
Como para $x = 0$ la función toma el valor $f(0) = -2$ resulta que la curva corta al eje y en el punto -2.

Cuadro sinóptico del comportamiento de la función $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	*Conclusiones*
$x < 0$		$+$		La función es creciente a la izquierda de $x = 0$
$x = 0$	-2	0	$-2 < 0$	Máximo local en el punto de coordenadas $(0; -2)$
$0 < x < 1$		$-$		La función es decreciente en el intervalo
$x = 1$	No está def.			Punto de discontinuidad en $x = 1$
$1 < x < 2$		$-$		La función es decreciente en el intervalo
$x = 2$	2	0	$2 > 0$	Mínimo local en el punto de coordenadas $(2; 2)$
$x > 2$		$+$		La función es creciente a la derecha de 2
$\alpha_1 = 1 + i$, $\alpha_2 = 1 - i$	0			La curva no corta al eje x
$x = 0$	-2			La curva corta al eje y en $y = -2$

Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

Asíntotas $\begin{cases} y = x - 1 \\ x = 1 \end{cases}$



3°) Estudiar la función:

$$f(x) = \frac{5}{2}\, x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$$

Está definida para todo x, luego, el dominio es el conjunto de todos los números reales, es decir $D = R$.

La derivada es:

$$f'(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}\, x^{\frac{2}{3}} \qquad \text{o sea}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3}\, x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}\, x^{\frac{2}{3}} \qquad \text{que también se puede expresar:}$$

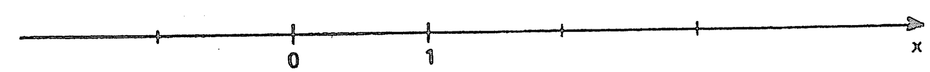
$$f'(x) = \frac{5}{3}\, x^{-\frac{1}{3}}\, [1 - x] \qquad \text{o bien:}$$

$$f'(x) = \frac{5}{3\sqrt[3]{x}}\, [1 - x]$$

no está definida en $x = 0$ y se anula para $x = 1$, pues

$$f'(x) = \frac{5}{3\sqrt[3]{x}}\, [1 - x] = 0 \implies [1 - x] = 0 \implies x = 1$$

Luego, los dos puntos críticos son: $x = 0$ y $x = 1$.



Para saber qué ocurre en ellos y en qué puntos la función es creciente y en cuáles decreciente, hay que determinar el signo de la primera derivada en tres intervalos que son: a la izquierda de 0, el intervalo (0 ; 1) y a la derecha de 1.

Primer Procedimiento

En el intervalo $x < 0$ se considera un punto cualquiera, por ejemplo $x = -1$, resulta:

$$f'(-1) = \frac{5}{3\sqrt[3]{-1}}\left[1-(-1)\right] = \frac{5}{3(-1)}[1+1] = -\frac{10}{3} < 0 \Longrightarrow f'(x) \text{ neg.} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{decreciente en } x < 0$$

En el intervalo $(0\,;1)$ se elige un punto cualquiera por ejemplo $x = \frac{1}{8}$, resulta:

$$f'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{3\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}\left[1-\frac{1}{8}\right] = \frac{5}{3\cdot\frac{1}{2}}\left[\frac{7}{8}\right] = \frac{35}{12} > 0 \Longrightarrow f'(x) \text{ positiva} \Longrightarrow f(x) \text{ creciente en el intervalo } [0\,;1]$$

En el intervalo $x > 1$ se elige un punto, por ejemplo $x = 8$, resulta:

$$f'(8) = \frac{5}{3\sqrt[3]{8}}[1-8] = \frac{5}{3\,.\,2}[-7] = -\frac{35}{6} < 0 \Longrightarrow f'(x) \text{ negativa} \Longrightarrow f(x) \text{ decreciente en } x > 1$$

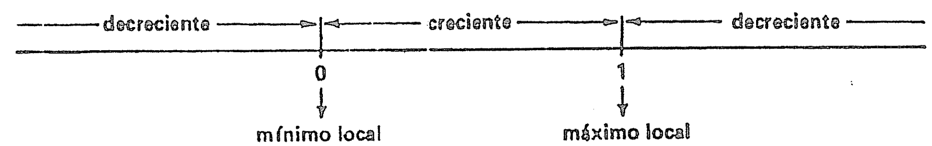
Segundo Procedimiento

$$\forall x < 0 \text{ es } f'(x) = \frac{5}{3\sqrt[3]{x}}[1-x] < 0$$

pues el factor $\frac{5}{3\sqrt[3]{x}}$ es negativo y el corchete $[1-x]$ es positivo, por lo tanto el producto es negativo. Luego, la función es decreciente a la izquierda de $x = 0$.

$\forall x \,/\, 0 < x < 1$ es $f'(x) = \frac{5}{3\sqrt[3]{x}}[1-x] > 0$ pues el factor $\frac{5}{3\sqrt[3]{x}}$ y el factor corchete $[1-x]$ son los dos positivos. Luego, la función es creciente en el intervalo $[0^+\,;1^-]$.

$\forall x > 1$ es $f'(x) = \frac{5}{3\sqrt[3]{x}}[1-x] < 0$ pues el factor $\frac{5}{3\sqrt[3]{x}}$ es positivo y el factor corchete $[1-x]$ es negativo, el producto es negativo, luego la función es decreciente a la derecha de $x = 1$.



A la izquierda de 0 la función es decreciente y a la derecha creciente, resulta que para $x = 0$ corresponde un mínimo local. Como para $x = 0$ es $f(0) = 0$ se tiene que en el origen hay un mínimo local.

A la izquierda de $x = 1$ la función es creciente y a la derecha decreciente, resulta que para $x = 1$ corresponde un máximo local. Como para $x = 1$ es $f(1) = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$ se tiene que en el punto de coordenadas $x = 1$; $y = \frac{3}{2}$ hay un máximo relativo.

Pero este mínimo y este máximo locales, no son absolutos, pues:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{5}{2}x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} = \lim_{x\to-\infty}\left[x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{5}{2}-x\right)\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim\left[x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{5}{2}-x\right)\right] = -\infty$$

Puntos de inflexión e intervalos de concavidad

Se obtiene la segunda derivada

$$f''(x) = -\frac{5}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{5}{9}x^{-\frac{4}{3}}[1+2x] = -\frac{5}{9\sqrt[3]{x^4}}[1+2x]$$

No está definida para $x=0$ y se anula únicamente cuando el factor corchete $[1+2x]$ es 0, o sea:

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow 1+2x=0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Se obtiene la tercera derivada

$$f'''(x) = \frac{20}{27}x^{-\frac{7}{3}} + \frac{10}{27}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{10}{27}x^{-\frac{7}{3}}[2+x] = \frac{10}{2\sqrt[3]{x^7}}[2+x]$$

para $x = -\frac{1}{2}$ los dos factores son $\neq 0$, luego $f'''\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0$.

para $x = -\frac{1}{2}$ corresponde una inflexión de tangente oblicua.

Como para $x = -\frac{1}{2}$ es $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right] =$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 3 = 3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \simeq 3 \times 0{,}63 = 1{,}89$$

resulta que en el punto de coordenadas $x = -\frac{1}{2}$; $y = 1{,}89$ hay una inflexión de tangente oblicua.

Para determinar los puntos en que la curva es cóncava y en los que es convexa, hay que estudiar el signo de la segunda derivada en 3 intervalos que son: a la izquierda de $x = -\frac{1}{2}$; el intervalo $\left(-\frac{1}{2}\,;0\right)$ y a la derecha de $x = 1$.

En la segunda derivada:

$f''(x) = -\frac{5}{9\sqrt[3]{x^4}}[1+2x]$ el factor $\frac{5}{9\sqrt[3]{x^4}}$ es siempre positivo porque x figura a la cuarta potencia, el que puede tener distintos signos es el corchete $[1+2x]$.

En el intervalo $x < -\frac{1}{2}$ por ejemplo $x = -1$ resulta:

$$f''(-1) = -\frac{5}{9\sqrt[3]{(-1)^4}}\left[1+2(-1)\right] = -\frac{5}{9\,.\,1}[1-2] = -\frac{5}{9}(-1) = \frac{5}{9} > 0 \Longrightarrow f''(x) \text{ positiva}$$

$\Longrightarrow f(x)$ cóncava hacia arriba a la izquierda de $x = -\frac{1}{2}$.

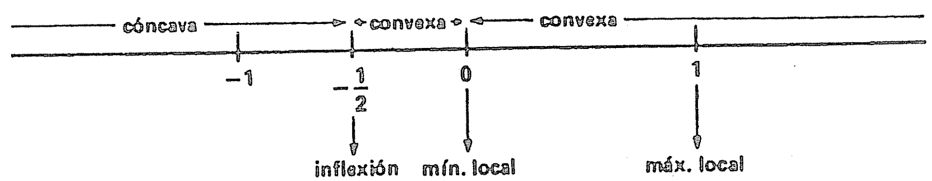
En el intervalo $-\frac{1}{2} < x < 0$ por ejemplo para $x = -\frac{1}{8}$ resulta:

$$f''\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{5}{9\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{8}\right)^4}}\left[1+2\left(-\frac{1}{8}\right)\right] = -\frac{5}{9\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^4}}\left[1-\frac{1}{4}\right] = -\frac{5}{9\,\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}\left[\frac{3}{4}\right] =$$

$$= -\frac{5\cdot 3}{9\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4} = -\frac{5}{3} < 0 \Longrightarrow f''(x) \text{ negativo} \Longrightarrow f(x) \text{ cóncava hacia abajo en el intervalo } -\frac{1}{2} < x < 0.$$

En el intervalo $x > 0$ por ejemplo para $x = 1$ resulta:

$$f''(1) = -\frac{5}{9\sqrt[3]{1^4}}\,[1 + 2 \cdot 1] = -\frac{5}{9 \cdot 1}\,[3] = -\frac{5}{3} \Longleftrightarrow f''(x)$$ negativa, por lo tanto $f(x)$ cóncava hacia abajo a la derecha de $x = 0$.



Observación: el que la curva sea cóncava a la izquierda de $x < -\frac{1}{2}$ y convexa a la derecha, implica que en $x = -\frac{1}{2}$ hay una inflexión, como ya se ha establecido.

Puntos en que la curva corta a los ejes

La curva corta al eje x en los puntos en que la función toma valor 0, es decir:

$$f(x) = \frac{5}{2}\,x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{2}{3}}\left[\frac{5}{2} - x\right] = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{o bien} \\ \frac{5}{2} - x = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{2} = 2{,}5 \end{cases}$$

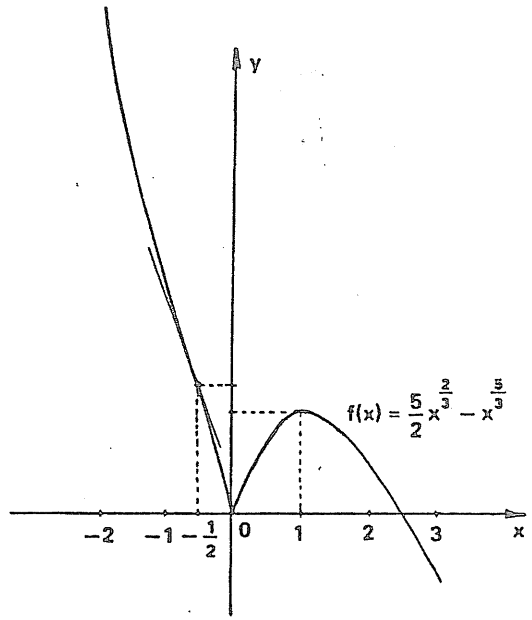
es decir que la curva corta al eje x en 0 y en 2,5.

Corta al eje y cuando $x = 0$ y como $f(0) = 0$ resulta que la curva corta al eje y en el origen.

Cuadro sinóptico del comportamiento de la función

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	*Conclusiones*
$x < 0$		$-$			Decreciente
$x < -\frac{1}{2}$			$+$		Cóncava hacia arriba a la izquierda de $x = -\frac{1}{2}$
$x = -\frac{1}{2}$	1,89	$-3{,}15$	0	$\neq 0$	Inflexión de *tg* oblicua en $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1{,}89 \end{cases}$
$-\frac{1}{2} < x$			$-$		Convexa o cóncava hacia abajo en el int. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
$x = 0$	0	No está def.	No está def.		Mínimo local en el origen
$0 < x < 1$		$+$			Creciente en el intervalo $(0 ; 1)$
$x = 1$	1,5	0	$-$		Máximo local en el punto de coordenadas $x = 1$; $y = 1{,}5$.
$x > 1$		$-$			Decreciente a la derecha de $x = 1$
$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ x = 2{,}5 \end{matrix}\right\}$	0				La curva corta al eje x en 0 y en 2,5
0	0				La curva corta al eje y en el origen.

Gráfica de la función



Ejercicios propuestos:

Hacer el estudio completo de las siguientes funciones:

1°) La función del ejercicio N° 26 $\quad f(x) = x + \dfrac{9}{x} - 1$

Rta.: Dominio es R excluido el 0. Discontinua en $x = 0$.
Ya se determinó que: en $(-3\,;-7)$ hay máximo local
en $(3\,;5)$ hay mínimo local
No hay inflexiones.

En $(-\infty\,;0)$ cóncava hacia abajo.
En $(0\,;+\infty)$ cóncava hacia arriba.
En $(-\infty\,;-3)$ y $(3\,;+\infty)$ es creciente.
En $(-3\,;3)$ es decreciente.

Asíntotas: vertical $x = 0$; oblicua $y = x - 1$.

2°) La función del ejercicio N° 27 $\quad f(x) = x^2 - \dfrac{250}{x}$

Rta.: Dominio R excluido el 0. Discontinua en 0.
Ya se determinó que: en $(-5\,;75)$ hay mínimo local.
en $\left(5\sqrt[3]{2}\,;0\right)$ hay inflexión de tangente oblicua.

Es cóncava hacia arriba en $(-\infty\,;0)$ y en $\left(5\sqrt[3]{2}\,;+\infty\right)$
Es cóncava hacia abajo en $\left(0\,;5\sqrt[3]{2}\right)$
Es creciente en $(-5\,;+\infty)$
Es decreciente en $(-\infty\,;-5)$

Asíntota vertical $x = 0$.

3°) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Rta.: Dominio es R excepto 1 y -1.
En $(0\,;-1)$ máximo local. No hay inflexiones.
Es cóncava hacia arriba en $(-\infty\,;-1)$ y en $(1+\infty)$
Es cóncava hacia abajo en $(-1\,;1)$

Corta al eje y en -1
Es creciente en $(-\infty\,;0)$
Es decreciente en $(0\,;+\infty)$

Asíntotas: $x = 1$; $x = -1$; $y = 1$.

4°) $f(x) = x^3 - 3x^2$

Rta.: Dominio es R. Continua en todos los puntos.
En $(0\,;0)$ máximo relativo; en $(2;-4)$ mínimo relativo.
En $(-\infty\,;1)$ cóncava hacia abajo.
En $(1\,;+\infty)$ cóncava hacia arriba.
En $(1\,;-2)$ inflexión de tangente oblicua.

Es creciente en $(-\infty\,;0)$ y en $(2\,;+\infty)$
Es decreciente en $(0\,;2)$

Corta al eje x en $x = 0$ y en $x = 3$.
Corta al eje y en el origen.

8 Elasticidad

En Economía se observa que si el precio de un bien o sea de un artículo aumenta, la cantidad demandada del mismo, en general disminuye, mientras que la cantidad ofertada aumenta; es decir que: la cantidad que se demanda y la que se oferta son funciones del precio.

Por otra parte, si aumenta la cantidad que se compra, también aumentan los gastos de los consumidores y los ingresos de los empresarios.

Por esa razón, una cuestión importante para el economista y para el hombre de negocios en general, es poder conocer la tendencia del cambio que experimenta la variable dependiente, que es la cantidad demandada, frente a un cambio de la variable independiente que es el precio. Poder cuantificar la magnitud de dichos cambios, es equivalente a: dada una función $y = f(x)$ cuantificar el cambio de la variable dependiente y ante un cambio de la variable independiente x. Si a un incremento Δx de la variable independiente le corresponde un incremento Δy del valor de la función, el cociente incremental $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ es la variación promedio del valor de la función, con respecto a la variación de la variable independiente; o sea la variación del valor de la función por cada unidad que varíe la variable independiente. Pero este cociente incremental tiene el inconveniente que la unidad en que está expresado el numerador es en general distinta de la unidad en que está expresado el denominador. Por ejemplo, si x representa los metros de cierta tela e y el precio de la misma, siendo $y = f(x)$ el numerador está expresado en \$ mientras que el denominador está expresado en metros.

Para evitar este inconveniente es que se considera la elasticidad y para llegar a ella se procede así: se obtiene la variación media o porcentual de la variable dependiente por una parte y la de la variable independiente por otra.

La variación media o porcentual del valor de la función $y = f(x)$ es $\dfrac{\Delta y}{y}$ o sea $\dfrac{\Delta f(x)}{f(x)}$. Como las dos se expresan en la misma unidad, el cociente es un número.

Ejemplo:

Si el precio $f(x) = \$\ 200$ se incrementa en \$ 2, es decir $\Delta y = \Delta f(x) = \$\ 2$ la unidad de las dos cantidades es la misma \$ y la variación media o porcentual es: $\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\$\ 2}{\$\ 200} = \frac{1}{100}$ es decir que la variación o porcentual de la función es del 1 por ciento.

Se observa que:

1°) la variación media o porcentual es independiente de la unidad, pues si el precio se expresa en centavos es $y = f(x) = \$\ 200 = 20.000$ centavos y $\Delta y = \Delta f(x) = \$\ 2 = 200$ centavos, la variación media o porcentual es:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{y} = \frac{200 \text{ centavos}}{20.000 \text{ centavos}} = \frac{1}{100}$$

es decir también resulta el 1 por ciento.

2°) En cambio, a distinta cantidad de la función e igual incremento \$ 2, el porcentual que resulta es también distinto:

Así si el precio es $f(x) = \$\ 20$ y se hace el mismo incremento de \$ 2, es decir $\Delta y = \$\ 2$, la variación media o porcentual es:

$$\frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \frac{\Delta y}{y} = \frac{\$\ 2}{\$\ 20} = \frac{1}{10}$$

es 1 cada 10, o sea el 10 por ciento.

Análogamente la variación media o porcentual de la variable independiente x es $\frac{\Delta x}{x}$ y como los dos se expresan en la misma unidad da un número.

El cociente de estas dos variaciones medias o porcentuales:

$$\frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} \quad \text{o sea} \quad \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

que como ya se ha dicho, es independiente de las unidades en que se expresan x e y da el promedio de la variación porcentual de la función, correspondiente a una variación porcentual de la variable independiente.

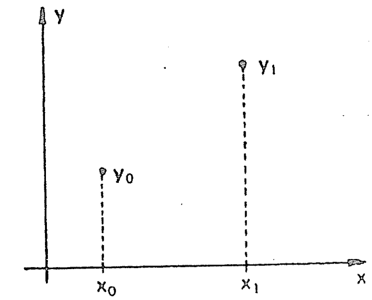
Este cociente:

$$\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} \quad \text{también se puede expresar} \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

y recibe el nombre de **"elasticidad de arco"**, pues es la variación del valor de la función al pasar de un extremo a otro del arco que corresponde a Δx. Si bien se llama elasticidad de arco, sería más correcto llamarla de cuerda, pues es en verdad la variación entre los extremos del segmento determinado por los puntos de $f(x)$ que corresponden a los extremos de Δx.

Si: $\Delta x = x_1 - x_0$

$$\left.\begin{aligned} f(x_0) &= y_0 \\ f(x_1) &= y_1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \Delta y = y_1 - y_0$$



se reemplaza en la elasticidad de arco y se tiene:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

se suelen considerar las coordenadas x e y del punto medio de la cuerda, es decir:

$$x = \frac{x_0 + x_1}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_0 + y_1}{2}$$

y la expresión de elasticidad de arco resulta:

$$\frac{\frac{x_0 + x_1}{2}}{\frac{y_0 + y_1}{2}} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \Longrightarrow \frac{x_0 + x_1}{y_0 + y_1} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La elasticidad puede interpretarse como la variación porcentual de la función producida por una variación del 1% de la variable independiente.

En efecto: si Δx es el $r\%$ de x se tiene:

$$\begin{aligned} x &\text{ ------ } 100 \\ \Delta x &\text{ ------ } r \end{aligned} \quad \text{de donde} \quad \frac{x}{\Delta x} = \frac{100}{r} \Longrightarrow r = \frac{\Delta x}{x}\ 100$$

si $r = 1\%$ resulta $1 = \frac{\Delta x}{x}\ 100 \Longrightarrow \frac{x}{\Delta x} = 100$

La elasticidad es:

$$\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} \Longrightarrow \frac{\Delta y}{y} \cdot \frac{x}{\Delta x}$$

si la variación de la variable independiente es del 1% se ha visto que $\frac{x}{\Delta x} = 100$, luego $\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\Delta y}{y} \cdot 100$ si se compara con la expresión de r resulta que la elasticidad es la variación porcentual de la función producida por una variación del 1% de la variable independiente.

Pero la elasticidad de arco supone que la variación de $y = f(x)$ que se debe a un cambio de la variable independiente, es la misma a lo largo de la cuerda, sin embargo no siempre es así. De ahí que para tener mayor precisión en la determinación de la elasticidad en un punto, y que es a la vez más cómodo, si la función $f(x)$ es derivable, se considera el límite de la elasticidad de arco cuando $\Delta x \longrightarrow 0$, es decir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'$$

que se llama elasticidad de la función con respecto a x y se indica con la notación:

$$\boxed{\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y} \cdot y'}$$

o bien

$$\boxed{\frac{Ef(x)}{Ex} = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x)}$$

que expresa la variación porcentual instantánea de la función, cuando el incremento $\Delta x \longrightarrow 0$.

Cuando se quiere determinar la elasticidad en un punto $(x_0\ ;\ y_0)$ se tiene

$$\frac{Ef(x_0)}{Ex} = \frac{x_0}{y_0}\ f'(x_0)$$

Otra expresión de la elasticidad:

En $\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y} \cdot y'$ el segundo miembro se puede escribir

$$\frac{x}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y} \cdot x \Longrightarrow \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{y'}{y} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{y'}{y}}{\frac{1}{x}}$$

pero

$$\frac{y'}{y} = D\ ln\ y \quad \wedge \quad \frac{1}{x} = D\ ln\ x$$

luego: $\frac{x}{y}\ y' = \frac{D\ ln\ y}{D\ ln\ x}$ por lo tanto otra expresión de la elasticidad es:

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{D\ ln\ y}{D\ ln\ x} \quad \text{o también} \quad \frac{Ey}{Ex} = \frac{D\ log\ y}{D\ log\ x}$$

Reglas operatorias

Con la definición de elasticidad, se puede obtener la elasticidad de cualquier función derivable; pero así como se conocen las reglas para derivar, es cómodo conocer algunas pocas reglas para obtener la elasticidad.

1°) La elasticidad de $f(x) = x^n$ es n. En efecto:

$$\frac{E x^n}{Ex} = \frac{x}{x^n}\ n\ x^{n-1} = \frac{\cancel{x^n}}{\cancel{x^n}} \cdot n = n$$

Ejemplo:

$$\frac{Ex^3}{Ex} = 3$$

2°) La elasticidad del producto de una constante por una función, es igual a la elasticidad de la función.

En efecto: Sea $f(x) = k\,\varphi(x)$

$$\frac{E\,[k\,\varphi(x)]}{Ex} = \frac{x}{k\,\varphi(x)} \cdot k\,\varphi'(x) = \frac{x}{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x)$$

pero $\frac{x}{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = \frac{E\,\varphi(x)}{Ex}$ luego:

$$\frac{E\,[k\,\varphi(x)]}{Ex} = \frac{E\,\varphi(x)}{Ex}$$

Es decir que el factor constante no influye en la elasticidad.

Ejemplo:

Sea $f(x) = 8\,x^5 \quad \frac{E\,8\,x^5}{Ex} = \frac{Ex^5}{Ex} = 5$

3°) La elasticidad del producto de dos funciones, es igual a la suma de la elasticidad de cada una de ellas. En efecto:

Sea $f(x) = u \cdot v$

$$\frac{E\,(u \cdot v)}{Ex} = \frac{x}{u \cdot v}\,(u'\,v + v'\,u) = \frac{x\,u'\,\cancel{v}}{u\,\cancel{v}} + \frac{x\,\cancel{u}\,v'}{\cancel{u}\,v} = \frac{x}{u}\,u' + \frac{x}{v}\,v'$$

pero $\frac{x}{u}\,u' = \frac{Eu}{Ex}$ y $\frac{x}{v} \cdot v' = \frac{Ev}{Ex}$ luego: $\frac{E(u \cdot v)}{Ex} = \frac{Eu}{Ex} + \frac{Ev}{Ex}$

Ejemplo:

Hallar la elasticidad de: $f(x) = x^5 \cdot \text{sen}\,x$

$$\frac{E(x^5 \cdot \text{sen}\,x)}{Ex} = \frac{Ex^5}{Ex} + \frac{E\,\text{sen}\,x}{Ex} = 5 + \frac{x}{\text{sen}\,x}\cos x = 5 + x\,\text{cotg}\,x$$

4°) La elasticidad del cociente de dos funciones es igual a la elasticidad de la función dividendo, menos la elasticidad de la función divisor.

En efecto:

Sea: $f(x) = \frac{u}{v}$

$$\frac{E\,\frac{u}{v}}{Ex} = \frac{x}{\frac{u}{v}} \cdot \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2} = \frac{x\,u'\,\cancel{v}}{u\,v^{\cancel{2}}} - \frac{x\,v'\,\cancel{u}}{\cancel{u}\,v} = \frac{x}{u}\,u' - \frac{x}{v}\,v'$$

luego:

$$\frac{E\,\frac{u}{v}}{Ex} = \frac{Eu}{Ex} - \frac{Ev}{Ex}$$

Ejemplo:

Hallar la elasticidad de $f(x) = \frac{5\,x^4}{e^{2x}}$

$$\frac{E\,\frac{5\,x^4}{e^{2x}}}{Ex} = \frac{E\,5x^4}{Ex} - \frac{E\,e^{2x}}{Ex} = 4 - \frac{x}{\cancel{e^{2x}}} \cdot 2\,\cancel{e^{2x}} = 4 - 2\,x$$

Nota: para que una función derivable tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto, la derivada debe ser 0, como consecuencia la elasticidad de la función en ese punto también debe ser 0 dado que en ella aparece el factor derivada.

lgunas aplicaciones de la elasticidad a la Economía

roblemas resueltos

) Si la función de demanda de un bien es $D(I) = \frac{I+2}{100}$ donde D es la función demanda e I el ingreso. Obtener: la elasticidad de la función demanda D con respecto al ingreso I y calcular dicha elasticidad en el punto que corresponde a un nivel de ingreso $I = 18$.

Solución:

$$\frac{E\,D(I)}{E\,I} = \frac{E\,\frac{I+2}{100}}{E\,I} = \frac{I}{\frac{I+2}{100}} \cdot D'(I) = \frac{I}{\frac{I+2}{\cancel{100}}} \cdot \frac{1}{\cancel{100}} = \frac{I}{I+2}$$

Para $I = 18$ es $\frac{E\,D(I)}{E\,I} = \frac{18}{18+2} = \frac{18}{20} = 0{,}9$

Esto significa que si el ingreso aumenta 1% la cantidad demandada aumenta aproximadamente 0,9%.

) La función de producción de una fábrica es $y = -x^3 + 5x^2 + 14x$, donde y son las unidades producidas y x la cantidad de insumos utilizados. Calcular la elasticidad de y con respecto a x cuando el nivel de insumos utilizados es $x = 4$.

Solución:

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{-x^3 + 5x^2 + 14x}(-3x^2 + 10x + 14) = \frac{1}{-x^2 + 5x + 14}(-3x^2 + 10x + 14)$$

o sea:

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{-3x^2 + 10x + 14}{-x^2 + 5x + 14} \quad \text{para } x = 4 \quad \text{resulta} \quad \frac{-3 \,.\, 16 + 40 + 14}{-16 + 20 + 14} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \simeq 0{,}3$$

este resultado se interpreta económicamente así: ante una variación en la cantidad de insumos del 1% (vale decir de $x = 4$ a $x = 4{,}01$) la producción aumenta aproximadamente 0,33.

Problemas propuestos

1°) Si la función de demanda de un consumidor es $q = 24 - 8p$ calcular $\mu = -\frac{Eq}{Ep}$ en el punto $p = 2$.

Rta.: 2.

2°) Si la función demanda es $q = e^{-p} + 100$ hallar $\mu = -\frac{Eq}{Ep}$ cuando $p = 1$.

Rta.: $\frac{e^{-1}}{e^{-1} + 100}$

3°) Si la función demanda es $q = 14 - \ln p$ hallar $\mu = -\frac{Eq}{Ep}$: 1° para $p = 1$; 2° para $p = e^{13}$.

Rta.: 1°) $\frac{1}{14}$

2°) 1

4°) Si la función de demanda de un consumidor de cierto bien es $q(I) = \frac{I}{p}$ donde q son las cantidades comparadas; p el precio constante del bien e I el ingreso del consumidor; calcular la elasticidad de la demanda del bien con respecto al ingreso I.

Rta.: 1

5°) Si la demanda de mercado es $Q = D(p) = 14 - \ln p^2$, calcular $\mu = -\frac{E\,D(p)}{Ep}$ cuando $p = 1$.

Rta.: $\frac{1}{7} \simeq 0{,}14$

6°) Sea $f(x) = -x^3 + 24x^2 - \frac{47}{3}x + 2$ la función de producción de cierta fábrica que utiliza en su proceso un solo insumo variable x (medido en unidades convencionales).

Se pide:

a) Hallar la expresión de la función de producción marginal.

b) Hallar la función de elasticidad de la producción respecto al insumo variable x.

c) Determinar para qué valor de x la producción marginal es nula y para cuál la producción es máxima.

Rta.: a) $f'(x) = -3x^2 + 48x - \frac{47}{3}$

b) $\frac{E f(x)}{Ex} = 3 + \frac{24x^2 - \frac{94}{3}x + 6}{x^3 - 24x^2 + \frac{47}{3}x - 2}$

c) La producción marginal es nula para:

$x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = \frac{47}{3}$.

La producción es máxima para $x_3 = \frac{47}{3}$.

7°) Sea $f(x) = -2x^3 + 36x^2 + 270x + 5$ la función de producción de cierta industria extractiva, donde x es la cantidad de trabajo (medido en cientos de miles de horas-hombres bimestrales), empleado.

Se pide:

a) Hallar la expresión de la productividad marginal.

b) Hallar la función elasticidad de la producción respecto al trabajo.

c) Determinar la cantidad de trabajo que maximiza la producción.

d) Si el precio de venta por unidad extraída es $p = \$\ 2$ y el costo de una unidad de x es $C = \$\ 297$:

Obtener el beneficio de la empresa, cuando su producción es máxima.

Obtener el máximo beneficio de la empresa.

Rta.: a) $f'(x) = -6x^2 + 72x + 270$

b) $\frac{Ef}{Ex} = 3 - \frac{36x^2 + 540x + 15}{-2x^3 + 36x^2 + 270x + 5}$

c) $x = 15$

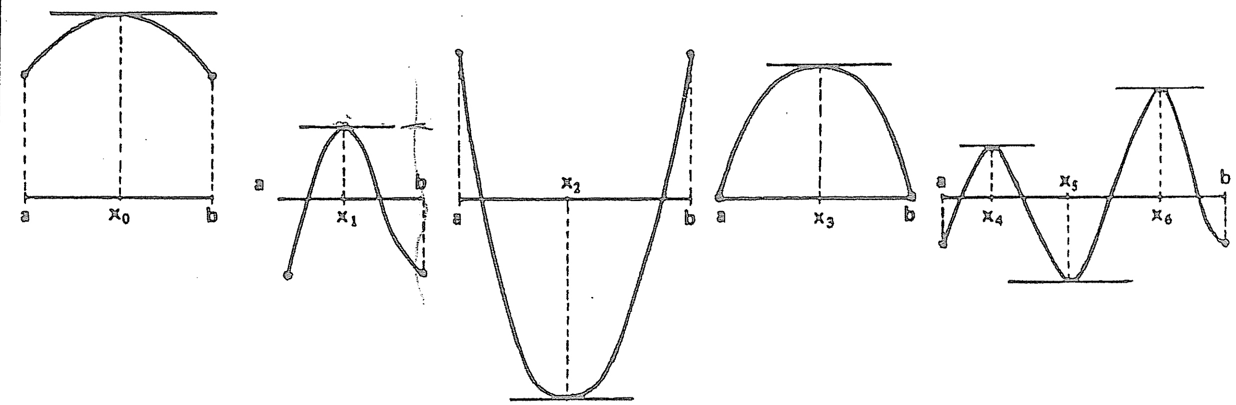
d) $\pi(x) = 6.355$

e) $Máx\ [\ \pi(x)\ ] = 7921$

9 Teoremas de las funciones derivables

Teorema de Rolle

Las siguientes gráficas corresponden a funciones derivables que toman valores iguales en los extremos del intervalo $[\,a\,;b\,]$



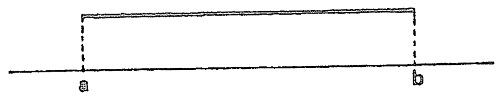
Se observa en todas ellas que hay por lo menos un punto interior del intervalo en que la tangente es paralela al eje x; en la primera figura se verifica en el punto correspondiente a x_0, en la segunda para x_1, en la tercera para x_2, en la cuarta para x_3, en la quinta para x_4 ; x_5 ; x_6. Entonces, en esos puntos la pendiente de la tangente es 0 y como dicha pendiente está dada por la derivada de la función, resulta que en cada uno de esos puntos la derivada es 0. La observación hecha en estas figuras, es general y se enuncia el:

Teorema de Rolle: si una función derivable toma valores iguales en los extremos de un intervalo, existe por lo menos un punto interior del mismo, en que se anula la derivada de la función.

En símbolos:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ derivable} \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, x_0 \;/\; a < x_0 < b \quad \wedge \quad f'(x_0) = 0$$

En efecto, por ser la función derivable es continua y por ser continua alcanza en el intervalo un valor M que es el máximo absoluto y un valor m que es el mínimo absoluto. Si cada uno de esos valores lo alcanza en uno de los extremos del intervalo, como en este caso, los valores de la función en dichos extremos son iguales; resulta $M = m = f(a) = f(b)$ y como todos los valores de la función están comprendidos entre el máximo y el mínimo absoluto, al ser estos iguales, son iguales los valores de la función en todo el intervalo, es decir la función es *Cte.*, y por lo tanto la derivada es 0 en todos los puntos, y el teorema queda demostrado.



Si el máximo o el mínimo absoluto, o por lo menos uno de ellos lo toma en un punto interior del intervalo, es a la vez máximo o mínimo relativo y en consecuencia en él la derivada debe ser 0 y el teorema está demostrado.

Observación: el teorema dice que existe por lo menos un punto en que se anula la derivada, pero puede haber más de uno, como indica la quinta figura del ejemplo.

> Miguel Rolle, que vivió entre los años 1652 y 1719, fue quien enunció y demostró este teorema, que por eso lleva su nombre.

Teorema del Valor Medio, se lo llama también de **Lagrange** o **de los incrementos finitos**

Si una función es derivable en un intervalo, el incremento de la función en él, es igual al producto de la derivada de la función en un punto interior de ese intervalo por la amplitud del mismo.

En símbolos:

$$\boxed{f(x) \text{ es derivable en } [\,a\,;\,b\,] \Longrightarrow f(b) - f(a) = f'(x_0)\,(b-a) \quad / \quad a < x_0 < b}$$

Demostración:

Se elige la función derivable:

$$\varphi(x) = (b-a)\,\big[f(x) - f(a)\big] - (x-a)\,\big[f(b) - f(a)\big]$$

Esta función toma valores iguales en los extremos a y b del intervalo, en efecto:

En el extremo a, es decir para $x = a$ es:

$$\varphi(a) = (b-a)\,\big[f(a) - f(a)\big] - (a-a)\,\big[f(b) - f(a)\big] = (b-a)\,.\,0 - 0\,\big[f(b) - f(a)\big] = 0$$

En el extremo b, es decir para $x = b$ es:

$$\varphi(b) = (b-a)\,\big[f(b) - f(a)\big] - (b-a)\,\big[f(b) - f(a)\big] = 0$$

pues el minuendo es igual al sustraendo.

Como la función derivable $\varphi(x)$ toma el mismo valor 0 en los extremos del intervalo, satisface las condiciones del Teorema de Rolle, por lo tanto su derivada:

$$\varphi'(x) = (b-a)\,\big[f'(x) - 0\big] - (1-0)\,\big[f(b) - f(a)\big]$$ o sea efectuando operaciones:

$$\varphi'(x) = (b-a)\,f'(x) - \big[f(b) - f(a)\big]$$

se debe anular en un punto x_0 interior del intervalo, es decir:

$\varphi'(x_0) = (b-a)\,f'(x_0) - \big[f(b) - f(a)\big] = 0$ para que esta diferencia sea 0, el sustraendo $\big[f(b) - f(a)\big]$ debe ser igual al minuendo $(b-a)\,f'(x_0)$, es decir:

$f(b) - f(a) = (b-a)\,f'(x_0)$ se permutan los factores del segundo miembro

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(x_0)\,(b-a)}$$

que es lo que se quería demostrar.

Si al incremento de la función $f(b) - f(a)$ se lo designa con Δy, a la amplitud del intervalo $(b-a)$ con Δx, pues $a + \Delta x = b \Longrightarrow b - a = \Delta x$, se reemplaza en la igualdad anterior y se tiene:

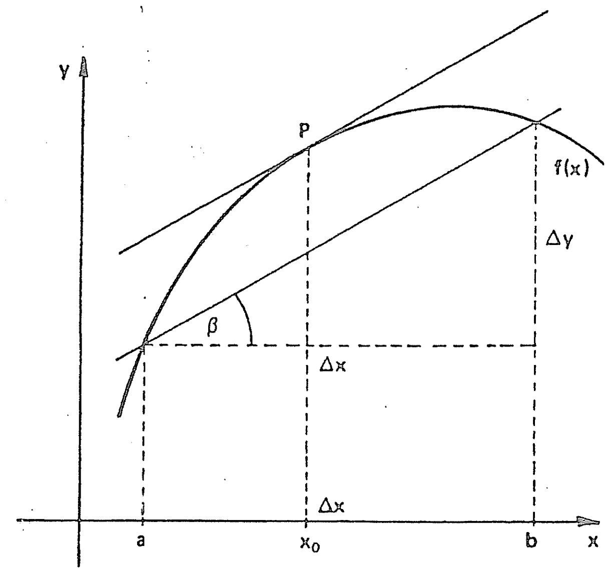
$$\boxed{\Delta y = f'(x_0)\,.\,\Delta x}$$

otra expresión simbólica que establece: el incremento de la función es igual al producto de la derivada de la función en un punto interior del intervalo por el incremento de la variable independiente. Si en la última igualdad se despeja $f'(x_0)$, se tiene:

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Según esta expresión el teorema del valor medio se enuncia también: si una función es derivable en un intervalo, existe por lo menos un punto interior del intervalo tal que, la derivada en él, es igual al cociente entre el incremento de la función y el incremento de la variable independiente.

Significado geométrico del teorema del valor medio o de Lagrange



En la igualdad:

$$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

el primer miembro representa la pendiente de la tangente en P.

El segundo miembro la $tg\ \beta$, o sea la pendiente de la recta a que pertenece la cuerda.

Como estas dos pendientes, de acuerdo con la relación anterior son iguales, resulta que las rectas son paralelas, es decir: existe por lo menos un punto del arco en el que la tangente es paralela a la cuerda.

José Luis Lagrange, uno de los más grandes matemáticos, nació en Turín en 1736 y murió en París en 1813. Su padre perdió una enorme fortuna y eso lo obligó a trabajar, así es que, a los 17 años dictó clase en la Academia Militar de Turín. Sus conocimientos matemáticos llaman la atención cuando solo tenía 19 años y ya a los 26 años era famoso en toda Europa. El emperador Federico el Grande, lo llama a Berlín en estos términos: "Donde estoy yo, el más importante rey de Europa, debe estar Ud. que es el más grande matemático". Allí, en Berlín, investigó intensamente e hizo numerosas publicaciones. Muere Federico el Grande y pierde apoyo en Berlín, pero entonces lo manda llamar desde París el rey de Francia; Luis XVI, y allí vivió hasta el final.

NOTA: El Teorema de Cauchy que se estudia a continuación, se refiere a la razón entre los incrementos de dos funciones derivables. Para cursos destinados a técnicos este teorema se puede omitir y aceptar también sin demostración la regla de L'Hôpital, la mayoría lo llama L'Hospital, que se considera a continuación.

Teorema de Cauchy:

Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son derivables en el intervalo $[\,a\,;\,b\,]$, la función $\varphi(x)$ toma valores distintos en los extremos del intervalo, es decir $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, existe un punto x_0 interior al intervalo tal que en él $\varphi'(x_0) \neq 0$ se verifica:

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$$

es decir: el cociente entre los incrementos de las funciones, es igual al cociente de las respectivas derivadas en un punto interior del intervalo.

Demostración: es semejante a la del Teorema del Valor Medio. Se considera la función derivable:

$$g(x) = \varphi(x)\,\big[f(b) - f(a)\big] - f(x)\,\big[\varphi(b) - \varphi(a)\big]$$

esta función toma valores iguales en los extremos del inervalo $[\,a\,;\,b\,]$; en efecto:

Para $x = a$ es:

$$g(a) = \varphi(a)\,\big[f(b) - f(a)\big] - f(a)\big[\varphi(b) - \varphi(a)\big]$$ se efectúan operaciones:

$$g(a) = \varphi(a)\,f(b) - \cancel{\varphi(a)\,f(a)} - f(a)\,\varphi(b) + \cancel{f(a)\,\varphi(a)}$$ o sea:

$$g(a) = \varphi(a)\,f(b) - f(a)\,\varphi(b)$$

Para $x = b$ es:

$$g(b) = \varphi(b)\,\big[f(b) - f(a)\big] - f(b)\,\big[\varphi(b) - \varphi(a)\big]$$ se efectúan operaciones:

$$g(b) = \cancel{\varphi(b)\,f(b)} - \varphi(b)\,f(a) - \cancel{f(b)\,\varphi(b)} + f(b)\,\varphi(a)$$ o sea:

$$g(b) = f(b)\,\varphi(a) - \varphi(b)\,f(a)$$

por ser $g(x)$ derivable y $g(a) = g(b)$, de acuerdo con el Teorema de Rolle, la derivada de $g(x)$ que es:

$$g'(x) = \varphi'(x)\big[f(b) - f(a)\big] - f'(x)\,\big[\varphi(b) - \varphi(a)\big]$$ se anula por lo menos en un punto x_0 interior del intervalo, es decir:

$g'(x_0) = \varphi'(x_0)\left[f(b)-f(a)\right] - f'(x_0)\left[\varphi(b)-\varphi(a)\right] = 0$ esta diferencia igual a 0 implica que el minuendo es igual al sustraendo; por lo tanto:

$$\varphi'(x_0)\left[f(b)-f(a)\right] = f'(x_0)\left[\varphi(b)-\varphi(a)\right]$$

el corchete $\left[\varphi(b)-\varphi(a)\right] \neq 0$ por ser $\varphi(b) \neq \varphi(a)$ se puede pasar al primer miembro como divisor; $\varphi'(x_0) \neq 0$ por hipótesis se puede pasar al segundo miembro como divisor y se tiene:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)}$$

que es lo que se quería demostrar.

Observaciones:

1°) El teorema se puede demostrar exigiendo que las derivadas de $f(x)$ y $\varphi(x)$ no se anulen simultáneamente en ningún punto interior del intervalo $[a;b]$

2°) El teorema del valor medio se puede obtener como corolario de este Teorema cuando $\varphi(x)=x$, pues $\varphi(x)$ cumple la condición $\varphi(b)\neq\varphi(a)$ pues en este caso $\varphi(a)=a$; $\varphi(b)=b$ y $a\neq b$; por otra parte $\varphi'(x)=Dx=1$ siempre distinta de 0. Entonces, resulta para $f(x)$ derivable:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(x_0)}{1} \implies f(b)-f(a) = f'(x_0)(b-a)$$

que es el Teorema del valor medio.

Regla de L'Hospital

Esta regla permite mediante la derivación, el cálculo de límite de casos de indeterminación. Trataremos de inducirla en dos ejemplos:

1°) Sea calcular

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5-3x^2-20}{3x^4-5x^3-8}$ corresponde a la indeterminación $\dfrac{\to 0}{\to 0}$ según hemos visto en el capítulo de límites, se puede resolver dividiendo numerador y denominador por $(x-2)$ aplicando la regla de Ruffini, así:

Para el numerador:

	1	0	0	−3	0	−20
2		2	4	8	10	20
	1	2	4	5	10	$\boxed{0}$
2		2	8	24	58	
	1	4	12	29	$\boxed{68}$	

$\implies x^5-3x^2-20 = (x-2)(x^4+2x^3+4x^2+5x+10)$

$\implies \lim\limits_{x\to 2}(x^4+2x^3+4x^2+5x+10) = 68$

Para el denominador:

	3	−5	0	0	−8
2		6	2	4	8
	3	1	2	4	$\boxed{0}$
2		6	14	32	
	3	7	16	$\boxed{36}$	

$\implies 3x^4-5x^3-8 = (x-2)(3x^3+x^2+2x+4)$

$\implies \lim\limits_{x\to 2}(3x^3+x^2+2x+4) = 36$

luego: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-3x^2-20}{3x^4-5x^3-8} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^4+2x^3+4x^2+5x+10)}{(x-2)(3x^3+x^2+2x+4)} =$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4+2x^3+4x^2+5x+10}{3x^3+x^2+2x+4} = \frac{68}{36} = \frac{17}{9} \qquad (1)$$

Si se deriva el numerador y el denominador de la expresión dada y se halla el límite para $x \to 2$ del cociente de las respectivas derivadas se llega al mismo resultado, en efecto:

$D(x^5-3x^2-20) = 5x^4-6x$; $\lim\limits_{x\to 2}(5x^4-6x) = 80-12 = 68$

$D(3x^4-5x^3-8) = 12x^3-15x^2$; $\lim\limits_{x\to 2}(12x^3-15x^2) = 96-60 = 36$

por lo tanto $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{D(x^5-3x^2-20)}{D(3x^4-5x^3-8)} = \dfrac{68}{36} = \dfrac{17}{9} \qquad (2)$

De (1) y (2) resulta:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^5 - 3x^2 - 20}{3x^4 - 5x^3 - 8} = \lim_{x\to 2} \frac{D(x^5 - 3x^2 - 20)}{D(3x^4 - 5x^3 - 8)}$$

2°) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ también corresponde a la indeterminación $\frac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$.

En el capítulo de límites se calculó que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

El límite del cociente de las derivadas es:

$$\lim_{x\to 0} \frac{D \operatorname{sen} x}{D x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$ es decir el mismo resultado; o sea:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{D \operatorname{sen} x}{D x}$$

En ambos ejemplos se observa que cuando dos funciones derivables tienden a 0 para $x \longrightarrow a$, el límite del cociente de las funciones para $x \longrightarrow a$ es igual al límite del cociente de las respectivas derivadas.

Esta observación se generaliza en la:

Regla de L'Hospital: Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son derivables en un entorno del punto a y ambas son 0 para $x = a$ es decir $f(a) = \varphi(a) = 0$ y existe:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$ se verifica

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

En efecto; de acuerdo con el Teorema de Cauchy para todo $x \in E_a$ en que las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ derivables satisfacen el teorema; se verifica:

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)} \quad / \quad x_0$$ está comprendido entre x y a..

Como $f(a) = \varphi(a) = 0$ la igualdad anterior se transforma en:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)} \qquad (1)$$

cuando $x \longrightarrow a$ también $x_0 \longrightarrow a$ pues x_0 está comprendido entre x y a, luego:

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)} = \lim_{x_0\to a} \frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

por lo tanto, al tomar límite en (1) resulta:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Esta regla tiene la ventaja que resuelve la indeterminación $\frac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$ aún cuando las funciones no son polinomios, que es el único caso que resuelve el procedimiento estudiado en el capítulo de límites.

Observaciones:

1°) La regla es válida cuando $f(x)$ y $\varphi(x)$ no están definidas en a pero es $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0$.

2°) Si $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$ se vuelve a aplicar la regla.

Ejercicios resueltos: indeterminación del tipo $\frac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$

1°)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$ Como $\lim_{x\to 1} \ln x = 0$ y $\lim_{x\to 1} (x - 1) = 0$ se presenta el caso $\frac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$

Se aplica la regla:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{D \ln x}{D(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

2°)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}}{sen\, x} \quad \text{como} \quad \lim_{x\to 0} (e^{x}-e^{-x}) = (e^0 - e^0) = 1 - 1 = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} sen\, x = 0$$

Se aplica la regla: $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}}{sen\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}+e^{-x}}{cos\, x} = \frac{2}{1} = 2$$

3°)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln cos\,(x-2)}{1 - sen\, x\, \frac{\pi}{4}} \quad \text{como} \quad \lim_{x\to 2} \ln cos\,(x-2) = \ln cos\, 0 = \ln 1 = 0$$

$$\text{y} \quad \lim_{x\to 2} \left(1 - sen\, x\, \frac{\pi}{4}\right) = 1 - sen\, \frac{\pi}{2} = 1 - 1 = 0$$

Otra vez es la indeterminación $\frac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$ se aplica la regla:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln cos\,(x-2)}{1 - sen\, x\, \frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{cos\,(x-2)}\left[-sen\,(x-2)\right]}{-\frac{\pi}{4}\, cos\, x\, \frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to 2} \frac{tg\,(x-2)}{\frac{\pi}{4}\, cos\, x\, \frac{\pi}{4}}$$

este límite es también del tipo $\frac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$ luego, es preciso aplicar otra vez la regla:

$$\lim_{x\to 2} \frac{tg\,(x-2)}{\frac{\pi}{4}\, cos\, x\, \frac{\pi}{4}} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{cos^2\,(x-2)}}{-\frac{\pi^2}{16}\, sen\, x\, \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{1}}{-\frac{\pi^2}{16}} = -\frac{16}{\pi^2}$$

Guillermo L'Hôpital vivió entre los años 1661 y 1704, era noble de Francia, tenía el título de marqués, y actuó como un verdadero mecenas, pues prestó su ayuda a los matemáticos que no tenían recursos.

Generalización de la regla de L'Hospital

La regla es válida también para cada uno de los siguientes casos:

Cuando $\lim_{x\to a} f'(x) \neq 0$ y $\lim_{x\to a} \varphi'(x) = 0$

Ejemplo $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{1-cos\, x}$ como $\lim_{x\to 0} (e^{x}-1) = e^0 - 1 = 0$ y $\lim_{x\to 0} (1 - cos\, x) = 0$

se presenta el caso $\frac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$, se aplica la regla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{1-cos\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}}{sen\, x} = \frac{1}{\longrightarrow 0} = \infty$$

Cuando $\lim_{x\to \infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to \infty} \varphi(x) = 0$

Ejemplo $$\lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{2x}}{sen\, \frac{2}{x}} = \lim_{x\to \infty} \frac{-\frac{1}{2x^2}}{cos\, \frac{2}{x} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{2}}{2\, cos\, \frac{2}{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{2\, cos\, 0} = \frac{1}{4}$$

La indeterminación del tipo $\frac{\longrightarrow \infty}{\longrightarrow \infty}$ también se resuelve por la regla de L'Hospital, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} \varphi(x) = \infty \\ \text{y existe} \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{4}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\dfrac{x^2}{4}\right) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty \\ \text{y existe } \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Ejemplo $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{e^x}$ como $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

se aplica la regla: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{e^x} = 0$

La indeterminación del tipo $(\longrightarrow 0) \cdot (\longrightarrow \infty)$ se reduce a uno de los casos anteriores, en efecto:

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{\varphi(x)} = 0$

Como $[f(x) \cdot \varphi(x)] = f(x) : \dfrac{1}{\varphi(x)} = \boxed{\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} [f(x)\,\varphi(x)] = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$

reduce a la indeterminación $\dfrac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$

O bien, como $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$

$\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot \varphi(x)]$ se transforma en $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$ que se reduce a la indeterminación $\dfrac{\longrightarrow \infty}{\longrightarrow \infty}$

Ejemplos:

1°) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left[(x^2-1) \cdot \ln(x-1)\right]$ como $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-1) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x-1) = -\infty$

se presenta el caso $(\longrightarrow 0)(\longrightarrow -\infty)$ que se reduce al caso $\dfrac{\longrightarrow -\infty}{\longrightarrow \infty}$ mediante la transformación

$(x^2-1) \cdot \ln(x-1) = \dfrac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{x^2-1}}$ se aplica la regla:

$$\lim_{x\to 1^+} \left[(x^2-1) \cdot \ln(x-1)\right] = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{-2x}{[(x+1)(x-1)]^2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{-2x}{(x+1)^2 (x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)^2 (x-1)}{-2x} = 0$$

2°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right)$ como $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = \operatorname{sen} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \operatorname{sen} 0 = 0$

se presenta el caso $(\longrightarrow \infty)(\longrightarrow 0)$ que se reduce a $\dfrac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$, haciendo la transformación:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}$ se aplica la regla:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos \dfrac{1}{x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \cos \frac{1}{x} =$$

$$= \cos \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \cos 0 = 1$$

NOTA: En este ejemplo al llegar a la expresión: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{sen\ x}{\dfrac{1}{x}}$ ya se sabe que el límite es 1, pues se reduce a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\ x}{x} = 1$ pero se ha resuelto mediante la regla de L'Hospital para ejercitar la aplicación de la misma.

La indeterminación del tipo $(\longrightarrow +\infty) + (\longrightarrow -\infty)$ que suele indicarse $+\infty - \infty$ también se reduce al caso $\dfrac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \\ \text{y } \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to a} \left[f(x) - \varphi(x) \right] = +\infty - \infty \quad \text{se transforma así:}$$

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\dfrac{1}{\varphi(x)}} = \frac{\dfrac{1}{\varphi(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)} \cdot \dfrac{1}{\varphi(x)}} \quad \text{que es el caso } \frac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$$

pues como para $x \longrightarrow a$ se sabe que $\varphi(x) \longrightarrow +\infty \Longrightarrow \dfrac{1}{\varphi(x)} \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow a$. Análogamente, para $\dfrac{1}{f(x)}$.

En muchos ejercicios de este tipo de indeterminación, al efectuar las operaciones indicadas ya se reduce al tipo de indeterminación $\dfrac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$.

Ejemplo:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{sen\ x} - \dfrac{1}{x} \right)$ es del tipo $+\infty - \infty$. Se efectúa la operación dentro del paréntesis:

$$\left(\frac{1}{sen\ x} - \frac{1}{x} \right) = \frac{x - sen\ x}{x\ .\ sen\ x} \quad \text{luego:}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{sen\ x} - \frac{1}{x} \right) = \lim \frac{x - sen\ x}{x\ .\ sen\ x} \quad \text{que es del tipo } \frac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}. \text{ Se aplica la regla:}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - sen\ x}{x\ .\ sen\ x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - cos\ x}{sen\ x + x\ cos\ x} \quad \text{otra vez } \frac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}. \text{ Se vuelve a aplicar la regla}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - cos\ x}{sen\ x + x\ .\ cos\ x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{sen\ x}{cos\ x + cos\ x - x\ sen\ x} = \frac{0}{1 + 1 - 0} = 0$$

Luego: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{sen\ x} - \dfrac{1}{x} = 0$

Las indeterminaciones de los tipos $\longrightarrow \overset{\to 0}{0}$; $\longrightarrow \overset{\to 0}{\infty}$; $\longrightarrow \overset{\to\infty}{1}$ se resuelven mediante ln y se reducen a una de las formas de indeterminación conocidas:

Ejemplo 1°)

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{sen\ x}$ como $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} sen\ x = 0$ se tiene la indeterminación $\longrightarrow \overset{\to 0}{0}$

Se toma ln

$$ln\ \left(x^{sen\ x}\right) = sen\ x\ .\ ln\ x$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} ln\ \left(x^{sen\ x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} (sen\ x\ .\ ln\ x)$ indeterminación del tipo $(\longrightarrow 0)(\longrightarrow \infty)$

luego, según se ha visto:

$\lim\limits_{x\to 0^+} (sen\ x\ .\ ln\ x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{ln\ x}{\dfrac{1}{sen\ x}}$ se aplica la regla

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(x^{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x \,.\, \cos x}$$ se aplica otra vez la regla

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(x^{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2 \operatorname{sen} x \,.\, \cos x}{\cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{2\,.\,0\,.\,1}{1-0} = 0$$ pero el *lím.* del *ln* es igual al *ln* del *lím.* Luego:

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(x^{\operatorname{sen} x}\right) = \ln \lim_{x\to 0^+} \left(x^{\operatorname{sen} x}\right) = 0$$

por otra parte, $\ln 1 = 0$. Si los *ln* son iguales, las expresiones también lo son, es decir:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x^{\operatorname{sen} x}\right) = 1$$

Ejemplo 2°)

$\lim\limits_{x\to 1} \left(x^{\frac{1}{x^2-1}}\right)$ es indeterminación del tipo $\longrightarrow 1^{\to\infty}$. Se toma *ln* de la expresión:

$$\ln\left(x^{\frac{1}{x^2-1}}\right) = \frac{1}{x^2-1} \ln x = \frac{\ln x}{x^2-1}$$ luego:

$$\lim_{x\to 1} \ln\left(x^{\frac{1}{x^2-1}}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1}$$ que es indeterminación $\dfrac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$. Se aplica la regla:

$$\lim_{x\to 1} \ln\left(x^{\frac{1}{x^2-1}}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

pero el *lím.* del *ln* es igual al *ln* del *lím.*, luego:

$$\lim_{x\to 1} \ln\left(x^{\frac{1}{x^2-1}}\right) = \ln \lim_{x\to 1} \left(x^{\frac{1}{x^2-1}}\right) = \frac{1}{2}$$ por otra parte:

$$\ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}\, 1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$ si los *ln* son iguales, las expresiones también lo son, es decir: $\lim\limits_{x\to 1} \left(x^{\frac{1}{x^2-1}}\right) = e^{\frac{1}{2}}$

Ejemplo 3°)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x+1\right)^{\frac{2}{x}}$ es una indeterminación del tipo $\longrightarrow\infty^{\to 0}$ se toma logaritmo:

$$\ln\left(e^x+1\right)^{\frac{2}{x}} = \frac{2}{x} \ln\left(e^x+1\right) = \frac{2\ln\left(e^x+1\right)}{x}$$ por lo tanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^x+1\right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln\left(e^x+1\right)}{x}$$ que es indeterminación del tipo $\dfrac{\longrightarrow\infty}{\longrightarrow\infty}$. Se aplica la regla de L'Hospital.

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^x+1\right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\,\dfrac{1}{e^x+1}\,e^x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x+1}$$ indeterminación del tipo $\dfrac{\longrightarrow\infty}{\longrightarrow\infty}$

Se aplica otra vez la regla:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^x+1\right)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x}{e^x} = 2 \Longrightarrow \ln \lim_{x\to\infty} \left(e^x+1\right)^{\frac{2}{x}} = 2$$

y como $\ln e^2 = 2$

resulta que: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x+1\right)^{\frac{2}{x}} = e^2$

Cuadro sinóptico de la aplicación de la regla de L'Hospital en los distintos casos de indeterminación

Casos de indeterminación	Regla a aplicar
$\left.\begin{array}{l} \lim.\ \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0} \\ \lim.\ \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\longrightarrow \infty}{\longrightarrow \infty} \end{array}\right\}$	$\lim.\ \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$
$\lim.\ \left[f(x)\,.\,\varphi(x)\right] = (\longrightarrow 0)\,.\,(\longrightarrow \infty)$	$\lim.\left[\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}\right]$ o bien $\lim.\left[\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\right]$
$\lim.\ \left[f(x) + \varphi(x)\right] = (\longrightarrow +\infty) + (\longrightarrow -\infty)$	En general, al efectuar las operaciones se reduce al caso $\dfrac{\longrightarrow C}{\longrightarrow 0}$. Si no es así, se aplica: $\lim.\ \dfrac{\dfrac{1}{\varphi(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\,.\,\varphi(x)}}$
$\left.\begin{array}{l} \lim.\ \left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = \longrightarrow \vec{0}^{\,\to 0} \\ \lim.\ \left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = \longrightarrow \vec{\infty}^{\,\to 0} \\ \lim.\ \left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = \longrightarrow \vec{1}^{\,\infty} \end{array}\right\}$	Se resuelven tomando el ln de la expresión.

Ejercicios propuestos de aplicación de la Regla de L'Hospital

Casos de indeterminación $\dfrac{\longrightarrow 0}{\longrightarrow 0}$

1°) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$ Rta.: $-\dfrac{1}{4}$

2°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 2x}$ Rta.: $-\dfrac{3}{2}$

3°) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5 - 32}{x - 2}$ Rta.: 80

4°) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^3 + 8}$ Rta.: $-\dfrac{5}{12}$

5°) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$ Rta.: 1

6°) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

7°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}$ Rta.: 0

8°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \operatorname{sen} x - 1}{\ln (x + 1)}$ Rta.: 0

9°) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x\,.\,\operatorname{tg} x}{x^2}$ Rta.: 1

10°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{3\,\operatorname{sen} x}$ Rta.: $\dfrac{2}{3}$

11°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$ Rta.: $\dfrac{2}{3}$

12°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - e^x + e^{-x}}{\cos x - 1}$ Rta.: 0

13°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9 + x} - 3}{x}$ Rta.: $\dfrac{1}{6}$

14°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} 2x}{x - \operatorname{sen} 2x}$ Rta.: -3

15°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{\operatorname{sen} x - x}$ Rta.: -16

16°) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{(\pi - 2x)}$ Rta.: 0

17°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \operatorname{sen} x - x}{2x^2 + x}$ Rta.: 0

18°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{\operatorname{sen} 2x - 2x}$ Rta.: $-\dfrac{1}{4}$

19°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln (x + 1) + e^x - 1}{x^2}$ Rta.: ∞

20°) $\lim\limits_{x\to \alpha} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \alpha}{x - \alpha}$ Rta.: $\cos \alpha$

21°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{\operatorname{sen} x - x}$ Rta.: 1

22°) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{x - \pi}}$ Rta.: 0

23°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg\,x - x}{x - sen\,x}$ Rta.: 2

24°) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(e^x - e^2)^2}{(x-4)\,e^x + x\,e^x}$ Rta.: 0

25°) $\lim\limits_{t \to 1^+} \dfrac{ln\,cos\,(t-1)}{1 - sen\,\dfrac{\pi}{2}\,t}$ Rta.: $-\dfrac{4}{\pi^2}$

26°) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1 - tg\,x}{cos\,2\,x}$ Rta.: 1

27°) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{cos\,z + e^z - 2}{ln\,(1 - 2\,z)}$ Rta.: $-\dfrac{1}{2}$

28°) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2\,x\,e^x + (x-3)\,e^x}$ Rta.: $+\infty$

29°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{x+4} - 2}$ Rta.: $\dfrac{2}{3}$

30°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\,4\,x + 2\,e^x - 2}{ln\,(1 + 3\,x)}$ Rta.: 2

31°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln\,(x^2+1)}{ln\,\sqrt{x+1}}$ Rta.: 0

32°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-sen^2\,x}{x + sen\,x\,.\,cos\,x}$ Rta.: 0

33°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,\dfrac{x+1}{x}}{ln\,\dfrac{x-1}{x}}$ Rta.: -1

Caso de indeterminación $\dfrac{\longrightarrow \infty}{\longrightarrow \infty}$

1°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\,x}{e^x}$ Rta.: 0

2°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ Rta.: $+\infty$

3°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x+2}}{x^2}$ Rta.: $+\infty$

4°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{e^{x^2}}$ Rta.: 0

5°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{6\,x^3 + 2\,x - 1}{3\,x^2 - 4}$ Rta.: $+\infty$

6°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3\,x^2 + 1}{2\,x^3 + x - 3}$ Rta.: 0

7°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,x}{x}$ Rta.: 0

8°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(ln\,x)^2}{x}$ Rta.: 0

9°) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{ln\,(x-1)}{ln\,sen\,(x-1)}$ Rta.: 1

10°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + ln\,x}{x\,.\,ln\,x}$ Rta.: 0

11°) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{ln\,sen\,x}{ln\,tg\,x}$ Rta.: 1

12°) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{ln\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)}{tg\,\dfrac{\pi}{x}}$ Rta.: 0

Caso de indeterminación del tipo $(\longrightarrow 0)\,.\,(\longrightarrow \infty)$

1°) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x\,.\,ln\,x)$ Rta.: 0

2°) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2\,.\,ln\,x)$ Rta.: 0

3°) $\lim \left(x\,.\,sen\,\dfrac{1}{x}\right)$ Rta.: 1

4°) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right).\,tg\,x\right]$ Rta.: -1

5°) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} \left[\left(x - 3\,\dfrac{\pi}{2}\right).tg\,x\right]$ Rta.: -1

6°) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[(x - sen\,x)\,.\,ln\,2\,x\right]$ Rta.: 0

7°) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left[(x^2 - 1).ln\,(x-1)\right]$ Rta.: 1

8°) $\lim\limits_{x \to 1} \left[(1 - x)\,.\,tg\,\dfrac{\pi\,x}{2}\right]$ Rta.: $\dfrac{2}{\pi}$

9°) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2\,.\,e^x)$ Rta.: 0

10°) $\lim\limits_{x \to 2^+} \left[(x - 2)\,.\,tg\,\dfrac{\pi}{4}\,x\right]$ Rta.: $-\dfrac{4}{\pi}$

Caso de indeterminación del tipo $+\infty - \infty$

1°) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{sen\, x}\right)$ Rta.: 0

2°) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{ln\, x}\right)$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

3°) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{e^{x}-1} - \dfrac{1}{sen\, x}\right]$ Rta.: $-\dfrac{1}{2}$

4°) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[x - \sqrt{x\,(x-2)}\right]$ Rta.: 1

5°) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{ln\, x}{x}\right]$ Rta.: 0

6°) $\lim\limits_{x\to 1^{+}} \left(\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$ Rta.: $-\dfrac{1}{2}$

7°) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \left[\dfrac{1}{e^{x}-1} - \dfrac{1}{2\,x}\right]$ Rta.: ∞

8°) $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{2}{1-cos\, x}\right]$ Rta.: $-\dfrac{1}{3}$

9°) $\lim\limits_{x\to 3} \left[\dfrac{2}{x^2-4x+3} - \dfrac{1}{x-3}\right]$ Rta.: $\dfrac{1}{2}$

Caso de indeterminación $\longrightarrow \overset{\to 0}{0}$

1°) $\lim\limits_{x\to 0} (sen\, x)^{x}$ Rta.: 1

2°) $\lim\limits_{x\to 1^{+}} (x-1)^{ln\, x}$ Rta.: 1

3°) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (cos\, x)^{\frac{\pi}{2}-x}$ Rta.: 1

4°) $\lim\limits_{x\to 0} x^{x}$ Rta.: 1

5°) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} x^{sen\, x}$ Rta.: 1

6°) $\lim\limits_{x\to 1^{+}} \left[(x-1)^{x^2-1}\right]$ Rta.: 1

7°) $\lim\limits_{x\to 2^{+}} \left[(x-2)^{x-2}\right]$ Rta.: 1

8°) $\lim\limits_{x\to 0} \left[(sen\, x)^{tg\, x}\right]$ Rta.: 1

9°) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left\{\left[tg\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]^{cos\, x}\right\}$ Rta.: 1

Caso de indeterminación $\longrightarrow \overset{\to 0}{\infty}$

1°) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \left[\left(\dfrac{1}{x}\right)^{sen\, x}\right]$ Rta.: 1

2°) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^{-}} \left[(tg\, x)^{cos\, x}\right]$ Rta.: 1

3°) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[(x+e^{x})^{\frac{1}{x}}\right]$ Rta.: e

4°) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{ln\, x}\right]$ Rta.: 1

5°) $\lim\limits_{x\to \infty} \left[(x^2+1)^{\frac{1}{x}}\right]$ Rta.: 1

6°) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left[(x^3+3)^{\frac{1}{ln\, x}}\right]$ Rta.: e^3

7°) $\lim\limits_{x\to 1} \left[\left(\dfrac{1}{ln\,(2-x)}\right)^{x-1}\right]$ Rta.: $\dfrac{1}{e}$

Caso de indeterminación $\longrightarrow \overset{\to \infty}{1}$

1°) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \left[(1+sen\, x)^{\frac{1}{x}}\right]$ Rta.: e

2°) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \left[\left(e^{x}+2\,x\right)^{\frac{1}{x^2}}\right]$ Rta.: $+\infty$

3°) $\lim\limits_{x\to 0^{+}} \left[(cos\, x)^{\frac{1}{x}}\right]$ Rta.: 1

4°) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \left[\left(tg\, x\right)^{\frac{1}{cos\, x-\frac{\sqrt{2}}{2}}}\right]$ Rta.: $e^{-2\sqrt{2}}$

5°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^{x}}\right)^{e^{x}}$ Rta.: $\frac{1}{e}$

6°) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\left(e^{x} + x\right)^{\frac{1}{sen\, x}}\right]$ Rta.: e^{2}

7°) $\lim\limits_{x \to 1^{+}} \left[\left(1 + 2\ln x\right)^{\frac{1}{sen\,(x-1)}}\right]$ Rta.: e^{2}

8°) $\lim\limits_{x \to 1} \left[x^{\frac{1}{x^{2}-1}}\right]$ Rta.: $\sqrt{e}$

9°) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\left(x^{2} + 1\right)^{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}\right]$ Rta.: 1

10°) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\left(1 + 2\,t^{2}\right)^{\frac{2}{t}}\right]$ Rta.: 1

10 Fórmula de Taylor

Las funciones polinómicas son las más simples, pues el valor de las mismas en un punto se calcula rápidamente, mediante un número finito de multiplicaciones y sumas algebraicas o incluso mediante la regla de Ruffini; además las sucesivas derivadas se obtienen derivando sin dificultad término a término y resultan cada vez polinomios de grado menor.

En cambio, hay otras funciones cuyos valores en un punto no se calculan fácilmente, tales por ejemplo, la función logarítimica y las trigonométricas; por lo tanto es importante y cómodo poder representar estas funciones por polinomios, aunque se comprende que la expresión polinómica de la función dada no es exacta, sino aproximada; pero cuando la aproximación (o acotación del error) es aceptable para el problema que se trata, puede adoptarse la simple expresión polinómica en lugar de la compleja función dada. El método más común para obtener la aproximación dé una función mediante un polinomio es el de la fórmula de Taylor; en homenaje al matemático inglés Brook Taylor, que allá por el año 1715 tuvo la genial idea de representar una función que admite sucesivas derivadas, en forma aproximada, mediante un polinomio.

Vamos a tratar de hallar esa fórmula.

Sea una función polinómica, por ejemplo de cuarto grado:

$$f(x) = c_0\, x^4 + c_1\, x^3 + c_2\, x^2 + c_3\, x + c_4$$

en el punto $x = a$ es $f(a) = c_0\, a^4 + c_1\, a^3 + c_2\, a^2 + c_3\, a + c_4$

Las sucesivas derivadas son:

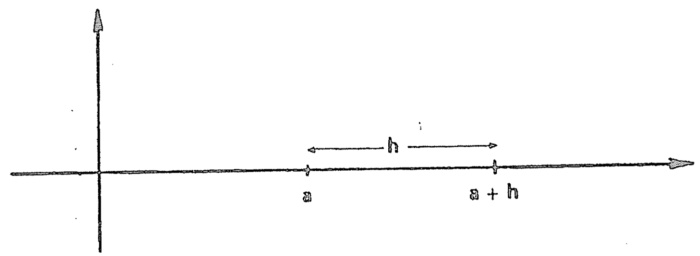
$f'(x) = c_0\, 4\,x^3 + c_1\, 3\,x^2 + c_2\, 2\,x + c_3$ en el punto $x = a$ es $f'(a) = c_0\, 4\,a^3 + c_1\, 3\,a^2 + c_2\, 2\,a + c_3$

$f''(x) = c_0\, 4\,.\,3\,x^2 + c_1\, 3.2x + c_2\, 2.$ en el punto $x = a$ es $f''(a) = c_0\, 4\,.\,3\,a^2 + c_1\, 3.2\,a + c_2\, 2$ (1)

$f'''(x) = c_0\, 4.3\,x + c_1\, 3.2$ en el punto $x = a$ es $f'''(a) = c_0\, 4.3.2\,a + c_1\, 3.2$

$f^{IV}(x) = c_0\, 4\,.\,3\,.\,2$ en el punto $x = a$ es $f^{IV}(a) = c_0\, 4\,.\,3\,.\,2$

Si se incrementa el punto a en h se tiene el punto incrementado $(a + h)$



en él la función toma el valor:

$$f(a+h) = c_0\,(a+h)^4 + c_1\,(a+h)^3 + c_2\,(a+h)^2 + c_3\,(a+h) + c_4$$

en cada término figura una potencia del binomio $(a + h)$, se desarrolla cada uno, se aplica la regla de Newton, y se escribe el desarrollo de cada uno de los cinco términos en un renglón, así:

$$\begin{aligned}
f(a+h) = {} & c_0\,a^4 + c_0\,4\,a^3\,h + c_0\,\frac{4\times 3}{2\,!}\,a^2\,h^2 + c_0\,\frac{4\times 3\times 2}{3\,!}\,a\,h^3 + c_0\,\frac{4\times 3\times 2\times 1}{4\,!}\,h^4 + \\
& + c_1\,a^3 + c_1\,3\,a^2\,h + c_1\,\frac{3\times 2}{2\,!}\,a\,h^2 + c_1\,\frac{3\times 2\times 1}{3\,!}\,h^3 + \\
& + c_2\,a^2 + c_2\,2\,a\,h + c_2\,\frac{2\times 1}{2\,!}\,h^2 + \\
& + c_3\,a + c_3\,h + \\
& + c_4
\end{aligned}$$

El segundo miembro se suma por columnas y resulta que:

la suma de los términos de la primera columna, según (1) es $f(a)$

la suma de los términos de la segunda columna, según (1) es $h\,f'(a)$

la suma de los términos de la tercera columna, según (1) es $\dfrac{h^2}{2!}\,f''(a)$

la suma de los términos de la cuarta columna, según (1) es $\dfrac{h^3}{3!}\,f'''(a)$

la cuarta es $\dfrac{h^4}{4!}\,c_0\;4\,.\,3\,.\,2\,.\,1 = \dfrac{h^4}{4!}\,f^{IV}(a)$

Luego, reemplazando:

$$f(a+h) \doteq f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2!}\,f''(a) + \frac{h^3}{3\,!}\,f'''(a) + \frac{h^4}{4!}\,f^{IV}(a)$$

Si la función polinómica $f(x)$ hubiera sido de quinto grado tendría un término más, es decir, seis términos y en el último figuraría la quinta derivada; o sea:

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2!}\,f''(a) + \frac{h^3}{3!}\,f'''(a) + \frac{h^4}{4!}\,f^{IV}(a) + \frac{h^5}{5!}\,f^{V}(a)$$

En general, si la función $f(x)$ es un polinomio de grado n, el desarrollo tiene $(n + 1)$ términos y en el último figura la enésima derivada así:

$$f(a+h) = f(a) + h\,f'(a) + \frac{h^2}{2!}\,f''(a) + \frac{h^3}{3!}\,f'''(a) + \frac{h^4}{4!}\,f^{IV}(a) + \frac{h^5}{5!}\,f^{V}(a) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)\,!}\,f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n\,!}\,f^{(n)}(a)$$

que es la fórmula de Taylor para una función polinómica de grado n, que da exactamente el valor de la función en el punto incrementado $(a + h)$ cuando se conoce el valor de la función y de las n primeras derivadas en el punto sin incrementar a.

Si al punto $a + h$ se lo designa x es decir:

$$a + h = x \Longrightarrow h = x - a$$

se reemplaza en la fórmula de Taylor, que se escribe entonces en la forma:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!}\,f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3\,!}\,f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)\,!}\,f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n\,!}\,f^{(n)}(a)$$

esta es otra expresión polinómica de la función $f(x)$ que ya es polinómica. Pero como se ha dicho, la idea de Taylor fue representar en esta forma las funciones $f(x)$ no polinómicas, pero que admiten sucesivas derivadas; la diferencia en más o en menos, entre el valor que tiene la función $f(x)$ en el punto x de su dominio y el valor que en el mismo punto toma el polinomio $P(x)$ que expresa la fórmula de Taylor correspondiente, se llama resto o término complementario y se lo designa con R_n.

Es decir: si $f(x)$ que no es polinómica admite sucesivas derivadas, se escribe mediante ellas, el polinomio de Taylor

$$P(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

la diferencia

$$\boxed{f(x) - P(x) = R_n(x)}$$

este término complementario, que agrega o quita respectivamente el defecto o el excedente del valor que en x atribuye el polinomio de Taylor y el que determina la función tiene diversas formas, la más simple y usual es

$$\boxed{R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)} \quad / \quad x_0 \text{ es un punto interior al intervalo } [a\,;x]$$

que se llama forma de Lagrange en homenaje al matemático francés Joseph Lagrange.

Luego, la función $f(x)$ se puede expresar:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) +$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)}_{R_n}$$

que es la fórmula generalizada de Taylor. Para aquellos valores de x en que el término complementario R_n es suficientemente pequeño, el polinomio de Taylor da un valor bastante aproximado de la función.

NOTA: esta forma del término complementario R_n se puede demostrar, al igual que las otras que son:

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p}}{n!\,p}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)] \quad 0<\theta<1 \text{ que es la forma que se llama de Schlömilch.}$$

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)] \quad 0<\theta<1 \text{ que es la forma llamada de Cauchy.}$$

Observaciones:

El error que se comete al reemplazar $f(x)$ por el polinomio de la fórmula de Taylor, es tanto menor:

1°) cuanto más próximo es el punto x al punto a.

2°) cuando mayor es el grado del polinomio.

3°) si se tiene una acotación $f^{(n+1)}(x_0)$ se tiene una estimación del error que se comete al reemplazar $f(x)$ por $P(x)$.

El último término de la fórmula generalizada de Taylor, debe adoptar la forma del resto, así, si se detiene el desarrollo en el término de la tercera derivada debe ser:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \underline{\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(x_0)}$$

Ejercicios resueltos

1°) Escribir el polinomio de Taylor de tercer grado para la función $f(x) = \cos x$ en el punto $a = \frac{\pi}{6}$ y calcular la acotación del término complementario.

$$f(x) = \cos x \implies f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x \implies f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\cos x \Longrightarrow f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x \Longrightarrow f'''\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$f^{IV}(x) = \cos x$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2}{2!}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3}{3!}\cdot\frac{1}{2} + \underline{\frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4}{4!}\cos x_0}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3 + \underline{\frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4\cos x_0}$$

Como $|\cos x| \leqslant 1 \Longrightarrow \underline{R_4} = \frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4\cos x_0 \leqslant \frac{1}{24}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4$

2°) Calcular, mediante los primeros términos de la fórmula de Taylor, el valor aproximado del sen del ángulo de $90°54'$. Se considera la expresión en radianes, como a 90° le corresponde $\frac{\pi}{2}$ en radianes, se escribe la fórmula para la función $\operatorname{sen} x$ en el punto $a = \frac{\pi}{2}$. Es decir:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \Longrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

$$f'(x) = \cos x \Longrightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \Longrightarrow f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1$$

$$f'''(x) = -\cos x \Longrightarrow f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x \Longrightarrow f^{IV}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Luego:

$$\operatorname{sen} x = 1 - \frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^6 + \cdots + \underline{R_n}$$

Si se considera hasta el término en que figura la cuarta potencia el valor aproximado de la función es:

$$\operatorname{sen} x \simeq 1 - \frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4$$

el valor que interesa es $\operatorname{sen}\ 90°54'$, se expresa en radianes.

Como a $180° = (180 \times 60)' = 10800'$ le corresponde π en radianes

a $54'$ le corresponde $\frac{\pi \times 54}{10800} = \frac{\pi}{200}$ radianes

O sea, a $90°54'$ le corresponde $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{200}$; es decir $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{200}$, por lo tanto cada paréntesis

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{200} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{200}.$$

Luego:

$$\operatorname{sen} 90°54' \simeq 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{200}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{200}\right)^4 \quad \text{pero} \quad \frac{\pi}{200} \simeq \frac{3{,}14}{200} \simeq 0{,}016$$

$$\operatorname{sen} 90°54' \simeq 1 - \frac{1}{2}\,0{,}016^2 + \frac{1}{24}\,0{,}016^4 \simeq 1 - \frac{1}{2}\,0{,}000256 + \frac{1}{24}\,0{,}000000065536 \simeq 0{,}99987$$

Si se considera $a = 0$, la fórmula de Taylor se transforma en:

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \frac{x^4}{4!}f^{IV}(0) + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + $$
$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)$$

que es la que se llama **fórmula de Mac Laurin.** Esta fórmula tiene una ventaja práctica sobre la de Taylor, porque en general, es más fácil calcular el valor de la función y de las sucesivas derivadas en el punto 0 que en otros puntos.

Ejercicio resuelto

Calcular aproximadamente e^{-2} mediante la fórmula de Mac Laurin, considerando $n = 5$. Se escribe la fórmula para $f(x) = e^{-x}$.

$$f(x) = e^{-x} \Longrightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = -e^{-x} \Longrightarrow f'(0) = -1$$
$$f''(x) = e^{-x} \Longrightarrow f''(0) = 1$$
$$f'''(x) = -e^{-x} \Longrightarrow f'''(0) = -1$$
$$f^{IV}(x) = e^{-x} \Longrightarrow f^{IV}(0) = 1$$

$$R_4 = \frac{1}{5!}\,e^{-x_0}\,x^5$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}e^{-x_0}x^5$$

$$e^{-2} \simeq 1 - 2 + 2 - \frac{1}{3}\,4 + \frac{2}{3} \simeq 0{,}3 \quad \text{con error} \quad |R_4| = \frac{1}{5!}\,e^{-x_0}\,2^5 \quad / \quad 0 < x_0 < 2$$

$$\frac{1}{e^{x_0}} < 1 \qquad R_4 < \frac{2^5}{5!} = \frac{4}{15} \simeq 0{,}26$$

Ejercicios propuestos

Escribir los términos de la fórmula de Taylor, según se indica, para cada una de las siguientes funciones:

1°) $f(x) = \sqrt{x}$ para $a = 1$ y $n = 3$

Rta.: $\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}\frac{x-1}{1!} - \frac{1}{4}\frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{3}{8}\frac{(x-1)^3}{3!} + R_4$

2°) $f(x) = ln\,x$ parar $a = 1$ y $n = 6$

Rta.:

$ln\,x = (x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{6}{4!}(x-1)^4 + \frac{24}{5!}(x-1)^5 - \frac{120}{6!}(x-1)^6 + R_6$

3°) $f(x) = cos\,x$ para $a = \frac{\pi}{3}$ $n = 4$

Rta.: $cos\,x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + R_4$

4°) $f(x) = arc\,tg\,x$ para $a = 1$ $n = 3$

Rta.: $arc\,tg\,x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + R_3$

Escribir los primeros términos de la fórmula de Mac Laurin, según se indica para cada una de las siguientes funciones:

1°) $f(x) = \sqrt{x+1}$ $n = 4$

Rta.: $\sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + R_4$

2°) $f(x) = \cos x$ $\qquad n = 5$

Rta.: $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + R_6$

3°) Calcular aproximadamente $\log 0{,}8$ mediante los seis primeros términos del desarrollo de $\ln(1 + x)$.

Recordar:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4\,!} + \ldots\ldots\ldots + R_n$$

aplicar que $0{,}8 = 1 - 0{,}2$

resulta $\ln 0{,}8 \simeq -0{,}2232$ para obtener el logaritmo decimal se multiplica por $\log e = 0{,}4343 \Rightarrow$ $\Longrightarrow \log 0{,}8 \simeq -0{,}2232 \times 0{,}4343 \simeq -0{,}0969$; para obtenerlo en la forma que se acostumbra con característica negativa y mantisa positiva se suma y resta 1, así:

$$-1 + (1 - 0{,}0969) = \bar{1}{,}09031 \Longrightarrow \log 0{,}8 \simeq \bar{1}{,}09031$$

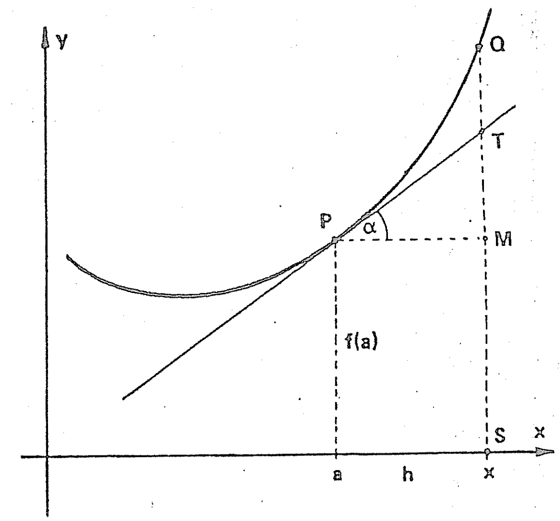
NOTA: cuando más adelante se estudien series de potencias, resulta la serie de Mac Laurin y allí es donde realmente se aplica el desarrollo o expresión de una función mediante la serie.

Ahora nos interesa especialmente la fórmula de Taylor para obtener las condiciones necesarias y suficientes, de concavidad, convexidad e inflexión.

Determinación de las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de concavidad, convexidad e inflexión

Consideremos los dos primeros términos de la fórmula de Taylor:

$f(a) + (x - a)\ f'(a)$



El primer término $f(a)$ es la ordenada de P que es el punto de la curva que corresponde a $x = a$. El segundo término $(x - a)\,f'(a)$ está dado según se vio al considerar diferencial, por el segmento $\overline{TM}$; en efecto:

$$tg\,\alpha = \frac{\overline{TM}}{\overline{PM}}$$

$tg\,\alpha$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en P, por lo tanto está dada por la derivada en el punto a, es decir $f'(a) = tg\,\alpha$; por otra parte $\overline{PM} = x - a$. Se reemplaza $tg\,\alpha$ y $\overline{PM}$.

Se tiene:

$$f'(a) = \frac{\overline{TM}}{x - a} \iff \overline{TM} = (x - a)\,f'(a) \qquad \text{como se había dicho.}$$

Se suma a ambos miembros

$$\overline{MS} = f(a) \qquad \text{y resulta}$$

$$\overline{TM} + \overline{MS} = (x - a)\ f'(a) + f(a)$$

o sea:

$$\boxed{\overline{TS} = f(a) + (x - a)\,f'(a)}$$

es decir que la suma de los dos primeros términos de la fórmula de Taylor, es la ordenada de la tangente en el punto incrementado $x = a + h$.

El primer miembro de la fórmula $f(x) = f(a + h)$ es el valor de la función en el punto incrementado $x = a + h$, o sea la ordenada del punto Q de la curva, es decir $\overline{QS}$; luego, si se pasa al primer miembro de la fórmula la suma:

$$\left[\,f(a) + (x - a)\,f'(a)\,\right]$$

se tiene:

$$f(x) - \left[f(a) + (x-a)\,f'(a)\right]$$

que es $\overline{QS} - \overline{ST}$, es decir la diferencia entre la ordenada de la curva y la ordenada de la tangente en el punto incrementado. Por lo tanto, si esta diferencia es positiva, la curva está por arriba de la tangente, en el semiplano superior (el caso de la figura); si es negativa la curva está por debajo de la tangente, en el semiplano inferior.

Supongamos que la derivada segunda sea distinta de cero y limitemos el desarrollo de Taylor al que corresponde a esa segunda derivada, es decir:

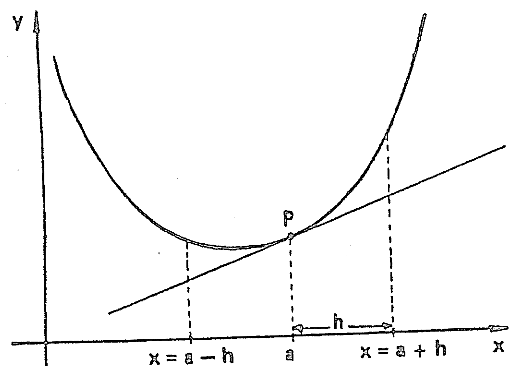
$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!}\,f''(x_0)$$

se pasan los dos primeros términos al primer miembro y se tiene:

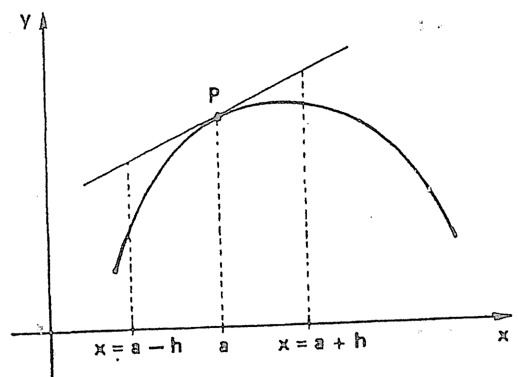
$$f(x) - \left[f(a) + (x-a)\,f'(a)\right] = \frac{(x-a)^2}{2\,!}\,f''(x_0)$$

como en el segundo miembro $(x-a) = h$ figura al cuadrado, tanto para h positivo como negativo, es decir para puntos a la izquierda como a la derecha de a, $(x-a)^2$ es positivo y por lo tanto el segundo miembro y en consecuencia el primero tienen el mismo signo de la derivada segunda $f''(x_0)$; o sea, si la derivada segunda es positiva el primer miembro es positivo; la curva tanto a la izquierda como a la derecha de a está en el semiplano superior con respecto a la tangente, vale decir, hay concavidad hacia arriba.

Si la segunda derivada es negativa, tanto a la izquierda como a la derecha de a el primer miembro es negativo, es decir la curva está por debajo de la tangente, hay convexidad, o sea concavidad hacia abajo.



$f''(a)$ positiva



$f''(a)$ negativa
concavidad hacia abajo

En el razonamiento se considera el signo de la segunda derivada en el punto x_0 pero para puntos suficientemente próximos a a, es decir h no muy grandes, dada la continuidad de la derivada segunda, el signo de ella en x_0 es igual al signo de la misma en a.

Queda así establecido lo que ya se enunció anteriormente que: **si la segunda derivada en un punto es positiva hay en él concavidad hacia arriba; si la segunda derivada es negativa hay en el punto concavidad hacia abajo.**

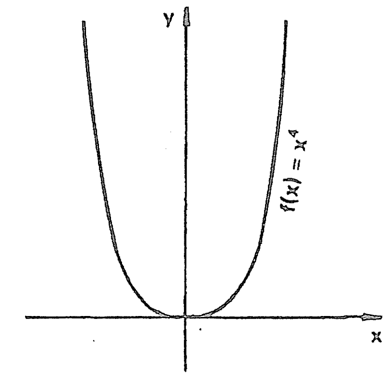
También queda establecido, como consecuencia de estas consideraciones que: para que exista punto de inflexión, la segunda derivada debe ser 0; en efecto, si la segunda derivada fuera positiva habría concaivdad, si fuera negativa convexidad, en ningún caso inflexión, luego **para que exista inflexión, la segunda derivada en el punto como no puede ser positiva ni negativa debe ser 0.**

Pero también observamos entonces que la anulación de la segunda derivada que es necesario, indispensable para la existencia de inflexión, no es suficiente, es preciso agregar algo más, así en el ejemplo ya considerado:

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = 4\,x^3 \quad ; \quad f''(x) = 12\,x^2$$

en el origen $f''(0) = 4\,.\,0 = 0$ y sin embargo, no hay inflexión.



Mediante la fórmula de Taylor se demuestra, según ya se dijo en su oportunidad, que si además de ser la segunda derivada 0 en un punto, la tercera derivada es distinta de cero, hay inflexión. En efecto, se escribe la fórmula de Taylor hasta el cuarto término:

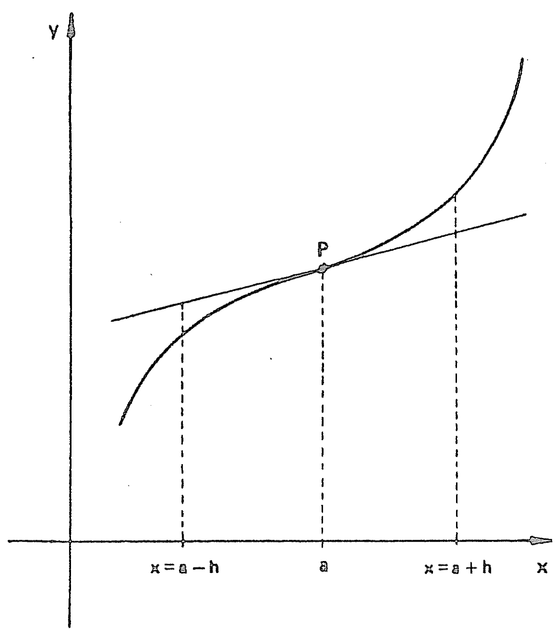
$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \cancel{\frac{(x-a)^2}{2\,!}\,f''(a)} + \frac{(x-a)^3}{3\,!}\,f'''(x_0)$$

se anula el tercer término porque se considera que $f''(a) = 0$.

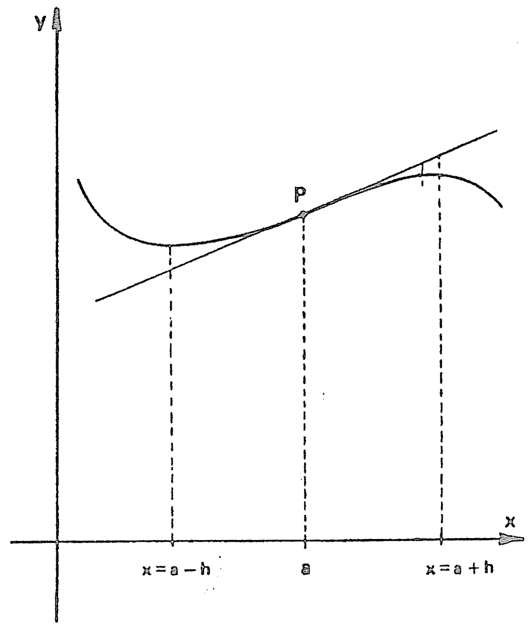
Se pasan los dos primeros términos al primer miembro y se tiene:

$$f(x) - \left[f(a) + (x-a)\,f'(a)\right] = \frac{(x-a)^3}{3\,!}\,f'''(x_0)$$

en el segundo miembro figura $(x - a) = h$ elevado a la tercera potencia, por lo tanto, para puntos a la derecha de a o sea h positivo el factor $\dfrac{(x-a)^3}{3\,!}$ es positivo y el segundo miembro y en consecuencia el primer miembro tienen el signo de la tercera derivada que es distinta de cero; en cambio, para puntos a la izquierda de a es decir h negativo, el factor $\dfrac{(x-a)^3}{3\,!}$ es negativo y el segundo miembro y en consecuencia el primero tiene signo contrario al de la tercera derivada. Vale decir que el primer miembro que es la diferencia entre la ordenada de la curva y la de la tangente, tiene distinto signo a la derecha que a la izquierda del punto; o sea, que si a la derecha la curva está por arriba de la tangente, a la izquierda está por debajo de la tangente; por lo tanto, hay inflexión.



$f'''(a) > 0$



$f'''(a) < 0$

El signo de la tercera derivada en puntos x_0 próximos a a es el mismo que el signo de la tercera derivada en a.

Se ha establecido que: **si en un punto la segunda derivada es 0 y la tercera es distinta de 0 hay inflexión.**

Generalización del criterio anterior

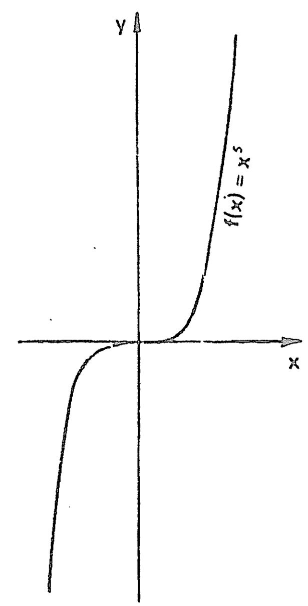
Si en un punto se anulan las sucesivas derivadas, hasta la de orden $n - 1$, la fórmula de Taylor se reduce a:

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)^n}{n\,!} f^{(n)}(x_0) \Rightarrow f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^n}{n\,!} f^{(n)}(x_0).$$

donde si n es par, el signo del segundo y del primer miembro es el mismo que el de la derivada enésima, a la izquierda y a la derecha del punto; si n es impar el signo es distinto a la derecha y a la izquierda del punto. Es decir: **si la primera derivada distinta de cero en el punto, es de orden par hay concavidad o convexidad; si en cambio, la primera derivada distinta de cero es de orden impar hay inflexión.**

Ejemplo 1°)

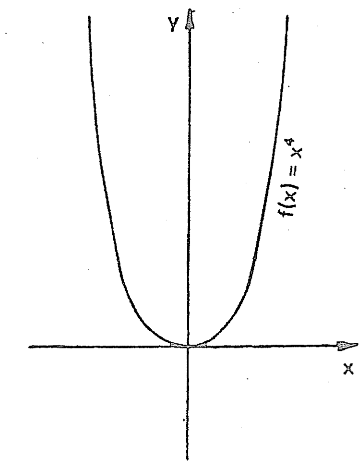
$f(x) = x^5$
$f'(x) = 5x^4$
$f''(x) = 20x^3$
$f'''(x) = 60x^2$
$f^{IV}(x) = 120x$
$f^{V}(x) = 120$



En el origen $x = 0$; la primera derivada distinta de 0 es $f^{V}(x) = 120$ de orden 5 impar, luego hay inflexión.

Ejemplo 2°)

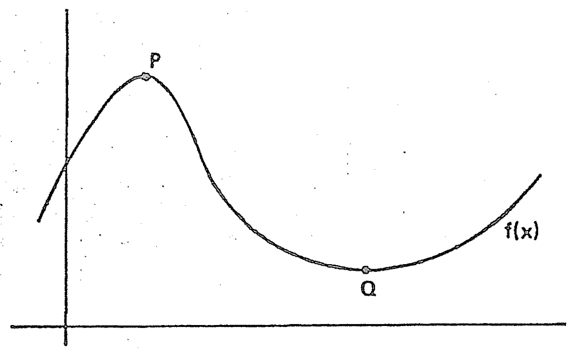
$f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2$
$f'''(x) = 24x$
$f^{IV}(x) = 24$



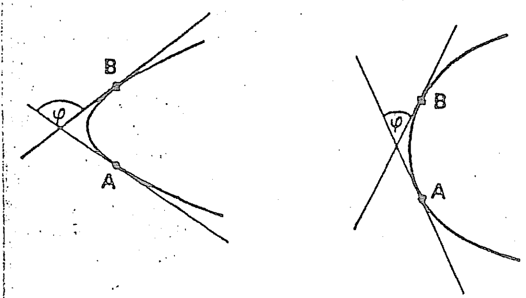
En el origen $x = 0$; la primera derivada distinta de 0 es la $f^{IV}(x) = 24$ de orden 4 par, luego hay convexidad.

CURVATURA DE UNA CURVA EN UN PUNTO

La forma de una curva en un punto está caracterizada por su curvatura, aun independientemente de toda definición matemática, decimos que la curva gráfica de $f(x)$ es más curva, tiene una curva más cerrada, tiene mayor curvatura en el punto P que en el punto Q; expresión que en lenguaje corriente se utiliza para señalar las curvas más pronunciadas al recorrer en coche una carretera.



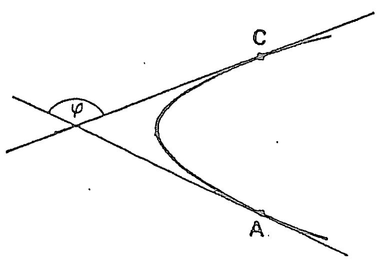
Consideraciones gráficas de funciones que admiten primera y segunda derivada y por lo tanto tangente en cada punto



En cada una de las curvas se consideran los arcos $\widehat{AB}$ de igual longitud y las tangentes respectivas en los puntos A y B.

El ángulo φ determinado por la tangente en A y la tangente en B se observa que es mayor en la curva más cerrada, en la de mayor curvatura, a pesar de corresponder a igual longitud de arco.

Por otra parte, es comprensible que para una longitud de arco distinto corresponda un ángulo φ diferente; por ejemplo, si en la primera curva se considera el arco $\widehat{AC}$ de mayor longitud que $\widehat{AB}$, el ángulo φ es distinto.



Se define curvatura media de un arco, al cociente entre el ángulo φ y la longitud del arco correspondiente.

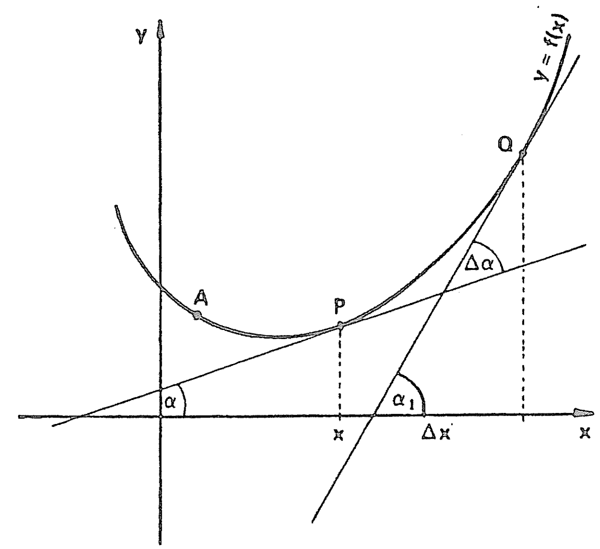
$$\text{curvatura media} = \frac{\varphi}{\text{long } \widehat{AB}}$$

La curvatura media en distintos arcos de una misma curva es distinta. Para determinar la curvatura en las proximidades de un punto se define: **curvatura de una curva en un punto, es el límite de la curvatura media *cuando la longitud* del arco tiende a cero.** Si la curvatura se indica con c la curvatura en A es:

$$c = \lim_{\text{long } \widehat{AB} \to 0} \frac{\varphi}{\text{long } \widehat{AB}}$$

Al ángulo φ se lo suele llamar ángulo de contingencia.

Determinación de la expresión de la curvatura, en función de $y = f(x)$ y de sus derivadas



Se considera el punto A de la curva y el punto $P(x\ ;\ y)$; la longitud del arco $\widehat{AP}$ se designa con s. Se incrementa x en Δx, se tiene el punto Q de la curva. A la longitud del arco $\widehat{PQ}$ que corresponde a Δx se lo designa con Δs; al ángulo de las tangentes en P y en Q con $\Delta\alpha$. Las tangentes en P y en Q determinan respectivamente con el semieje positivo x los ángulos α y $\alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha$ pues el ángulo α_1 es exterior del triángulo que determinan las tangentes con el eje x y en consecuencia igual a la suma de los interiores no adyacentes.

De acuerdo con la definición, la curvatura en P es:

$$c = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

o sea la derivada de α con respecto a s. Pero tanto α como s son funciones de x, luego la derivada anterior puede expresarse como el cociente de las respectivas diferenciales, es decir:

$$c = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$$

Como $f'(x) = y'$ es igual a la pendiente de la tangente en P o sea $tg\,\alpha = y'$,

pero $tg\,\alpha = y' \iff \alpha = arc\,tg\,y' \implies \alpha' = D\,arc\,tg\,y'$

como $d\alpha = \alpha'\,dx$ se reemplaza α' y se tiene $d\alpha = D\,arc\,tg\,y'\,dx$

por lo tanto, $d\alpha = \dfrac{1}{1 + y'^2}\,y''\,dx \implies d\alpha = \dfrac{y''}{1 + y'^2}\,dx$

Más adelante se verá que:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\;dx$$

Se reemplaza $d\alpha$ y ds en la expresión de la curvatura y se tiene:

$$c = \frac{\dfrac{y''}{1 + y'^2}\,dx}{\sqrt{1 + y'^2}\;dx}$$

$$c = \frac{y''}{(1 + y'^2)\sqrt{1 + y'^2}}$$

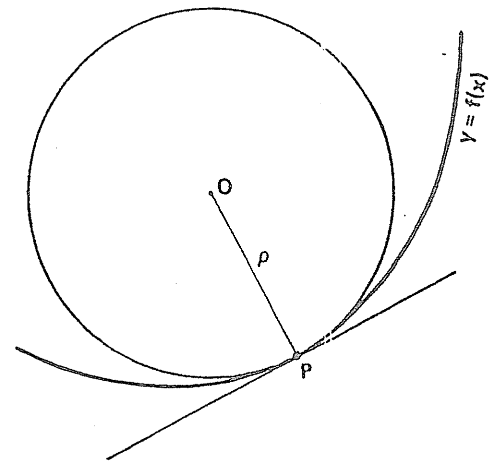
$$\boxed{c = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

La curvatura se la considera siempre positiva o nula; es cero en los puntos en que se anula la segunda derivada.

El valor $\dfrac{1}{c}$, se llama radio de curvatura de la curva en el punto y se lo designa con ρ.

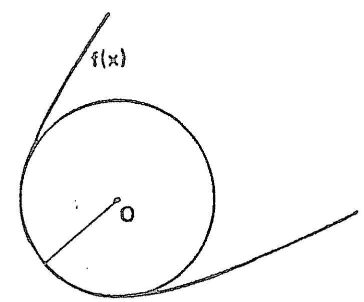
luego $\boxed{\rho = \dfrac{1}{c}}$ o sea $\boxed{\rho = \dfrac{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}}$

En cada punto de la curva en que existe la segunda derivada $\neq 0$ se puede determinar la curvatura y el radio de curvatura.



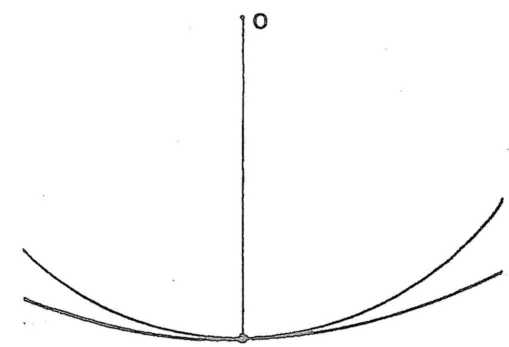
Si por el punto P se traza la perpendicular a la recta tangente y sobre ella se determina el segmento $\overline{PO} = \rho$ hacia la concavidad de la curva, o sea en el semiplano con respecto a la tangente en que se encuentra el arco de curva, el punto O se llama **centro de curvatura de la curva** en P; la **circunferencia** de centro O y de radio $\overline{OP}$ **circunferencia osculatriz** y el círculo correspondiente **círculo osculador.**

De acuerdo con lo dicho, en un punto de curvatura grande, resulta un radio de curvatura pequeño, por lo tanto una circunferencia osculatriz pequeña, en cambio en un punto de pequeña curvatura el radio de curvatura y la circunferencia osculatriz son grandes.



curvatura c grande

circunferencia osculatriz pequeña



curvatura c pequeña

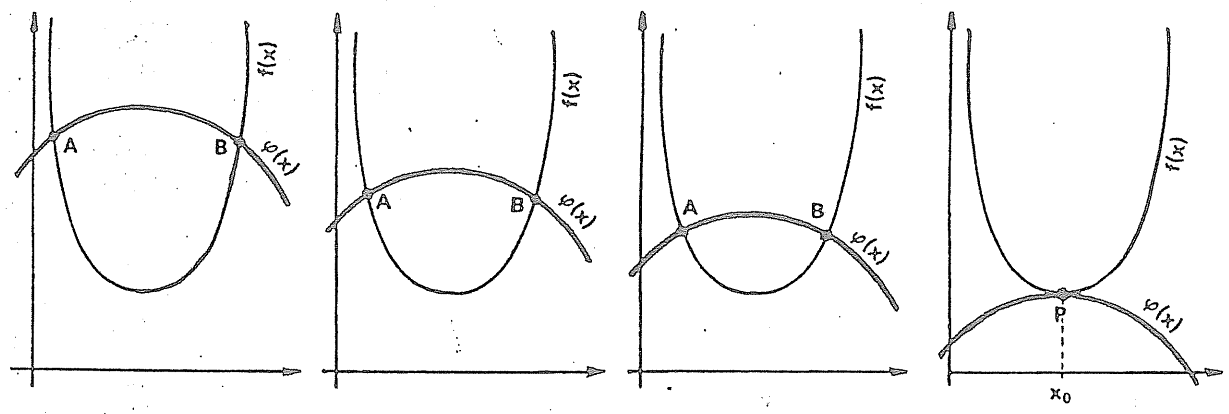
circunferencia osculatriz grande

La gráfica determinada por los centros de curvatura de todos los puntos de un arco de curva se llama **evoluta** del arco de curva.

La circunferencia osculatriz tiene con la curva en el punto un contacto de segundo orden

Veamos qué quiere decir orden de contacto de dos curvas en un punto común.

Dadas dos curvas gráficas de las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ en la primera figura, tienen dos puntos comunes A y B. Si se traslada la curva que corresponde a $\varphi(x)$ como se indica en la segunda y en la tercera figura, los puntos A y B están más próximos.



primera figura — segunda figura — tercera figura — cuarta figura

en la cuarta figura los puntos se han confundido en uno solo P, en él las dos curvas tienen la misma tangente y por lo tanto en x_0 las dos funciones tienen el mismo valor y también iguales las primeras derivadas, o sea:

$$\begin{cases} f(x_0) = \varphi(x_0) \\ f'(x_0) = \varphi'(x_0) \end{cases}$$

se dice que las dos curvas tienen en P un contacto de **primer orden.**

A veces en el punto común hay más de dos puntos confundidos; por ejemplo, las siguientes curvas que son las gráficas de las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ en la primera figura tienen 3 puntos comunes, A; B y P. Al hacer girar la curva $\varphi(x)$ alrededor del punto P como indica la segunda y tercera figura los puntos A y B se aproximan cada vez más a P. En la cuarta figura los 3 puntos están confundidos en P de abscisa x_0.

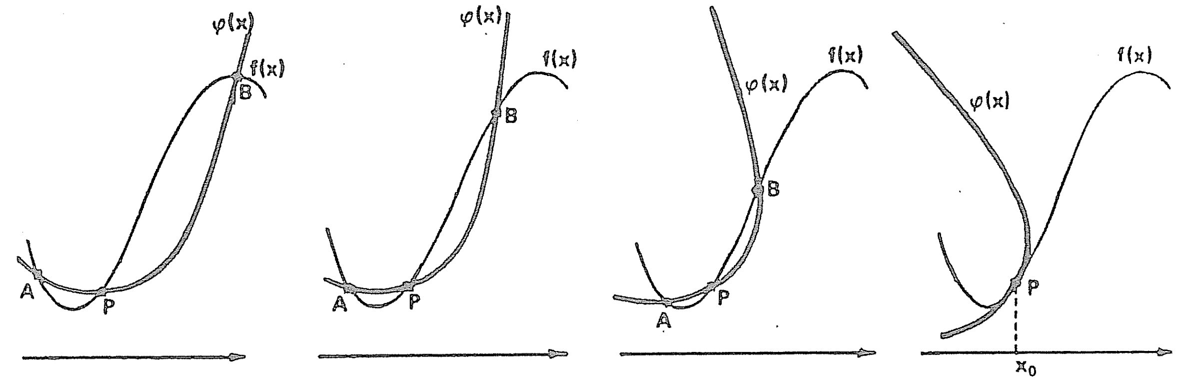


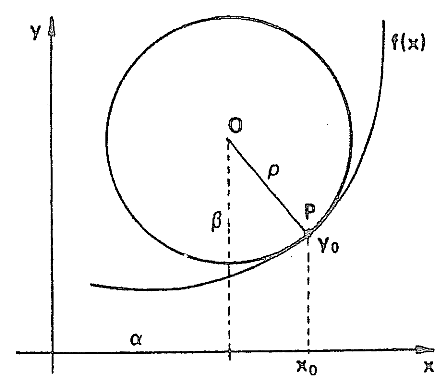
Figura 1 — Figura 2 — Figura 3 — Figura 4

En ese punto común las funciones tienen el mismo valor; y además la primera y la segunda derivada iguales:

$$\begin{cases} f(x_0) = \varphi(x_0) \\ f'(x_0) = \varphi'(x_0) \\ f''(x_0) = \varphi''(x_0) \end{cases}$$

se dice que las curvas tienen en P un contacto de **segundo orden.**

En general, si dos funciones tienen derivadas hasta las de orden $(n+1)$ en un punto común de abscisa x_0 y en él son iguales los valores de las funciones y de las n primeras derivadas y distintas las derivadas de orden igual o mayor que $(n+1)$, se dice que las dos curvas tienen en el punto un contacto de orden n.



Como la circunferencia osculatriz y la curva tienen en el punto común $P(x_0\,;y_0)$ un contacto de segundo orden, deben tener igual en x_0 el valor de las respectivas funciones, de la primera y de la segunda derivadas.

Sea la curva gráfica de la función dada $f(x)$ y en ella el punto P de coordenadas $(x_0\,;\,y_0)$, la circunferencia osculatriz en P tiene centro O de coordenadas $\alpha\,;\beta$ y radio $\overline{OP} = \rho$.

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2 \qquad (1)$$

De esta expresión se puede despejar y en función de x para un arco de circunferencia que contenga al punto P y se debe verificar:

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ y'(x_0) = f'(x_0) \\ y''(x_0) = f''(x_0) \end{cases}$$

Para obtener las coordenadas del centro y el radio expresados mediante la función dada $f(x)$ es cómodo proceder así: se deriva la expresión (1) como función de función, dado que y es función de x; hay que tener en cuenta que α ; β y ρ son números, luego:

$$2(x-\alpha) + 2(y-\beta)y' = 0$$

o sea:

$$2(y-\beta)y' = -2(x-\alpha)$$

se simplifica por 2 $\qquad (y-\beta)y' = -(x-\alpha) \qquad (2)$

se deriva nuevamente teniendo en cuenta que el primer miembro es un producto

$$y'y' + (y-\beta)y'' = -1$$

que se puede escribir:

$$y'^2 + (y-\beta)y'' = -1 \Longrightarrow (y-\beta) = \frac{-1-y'^2}{y''} \Longrightarrow y-\beta = -\frac{1+y'^2}{y''} \qquad (3)$$

Se reemplaza en (2); $(y-\beta)$ por esta expresión y se tiene:

$$\left(-\frac{1+y'^2}{y''}\right)y' = -(x-\alpha) \Longrightarrow \frac{(1+y'^2)y'}{y''} = x-\alpha \qquad (4)$$

De (4) resulta

$$(x-\alpha)^2 = \frac{(1+y'^2)^2 y'^2}{y''^2}$$

De (3) resulta

$$(y-\beta)^2 = \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}$$

se suman estas expresiones para obtener según (1) el cuadrado del radio:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \rho^2 \Longrightarrow \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2}y'^2 + \frac{(1+y'^2)^2}{y''^2} = \rho^2$$

como el denominador es el mismo: $\dfrac{(1+y'^2)^2 y'^2 + (1+y'^2)^2}{y''^2} = \rho^2$

se saca $(1+y'^2)^2$ factor común: $\dfrac{(1+y'^2)^2(y'^2+1)}{y''^2} = \rho^2$

o sea:

$$\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2} = \rho^2$$

para obtener el radio ρ se extrae la raíz cuadrada:

$$\sqrt{\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}} = \rho \Longrightarrow \boxed{\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}}$$

que es la misma expresión que ya se encontró para el radio de curvatura.

Observación: la expresión (3) la (4) y la del radio de curvatura, son válidas para cualquier punto de la circunferencia, en particular para el punto común, donde se conoce:

$$x_0 \; ; \quad y_0 = f(x_0)$$
$$y'(x_0) = f'(x_0)$$
$$y''(x_0) = f''(x_0)$$

pues por ser $f(x)$ la función dada, se calculan los segundos miembros y en consecuencia los primeros y se determinan α ; β y ρ.

NOTA: la circunferencia osculatriz se considera en este capítulo, pues se suele definir que 2 curvas tienen en un punto común de abscisa a, un contacto de orden n, cuando la diferencia de las ordenadas es de orden $(n+1)$ con respecto a $(x-a)$.

Como consecuencia, si las funciones correspondientes aceptan derivadas hasta la de orden $(n+1)$ se demuestra que en $x=a$ son iguales las primeras derivadas hasta la de orden n.

En efecto, sean $f(x)$ y $\varphi(x)$ las funciones, se desarrolla cada una según la fórmula de Taylor:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!}\,f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3\,!}\,f'''(a) + \frac{(x-a)^4}{4\,!}\,f^{IV}(a) + \dots\dots +$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{n\,!}\,f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)\,!}\,(x_0)$$

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\,\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!}\,\varphi''(a) + \frac{(x-a)^3}{3\,!}\,\varphi'''(a) + \frac{(x-a)^4}{4\,!}\,\varphi^{IV}(a) + \dots\dots +$$

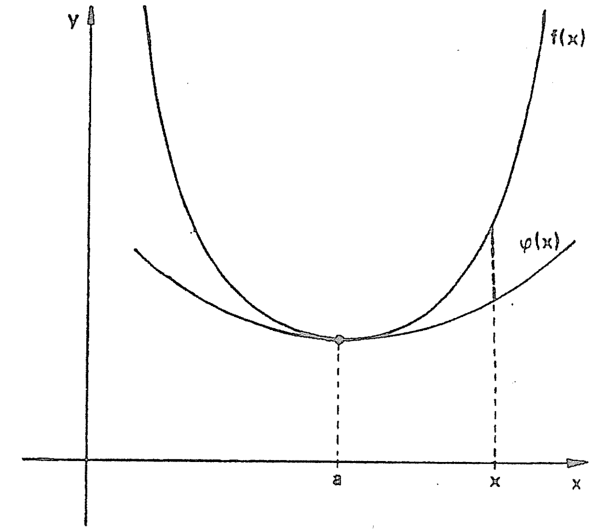
$$+ \frac{(x-a)^n}{n\,!}\,\varphi^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}\,\varphi^{(n+1)}(a)$$

Se restan y se saca factor común $(x-a)$; $\dfrac{(x-a)^2}{2\,!}$; $\dfrac{(x-a)^3}{3\,!}$; etc. y se tiene:

$$f(x)-\varphi(x) = \Big[f(a)-\varphi(a)\Big] + (x-a)\Big[f'(a)-\varphi'(a)\Big] + \frac{(x-a)^2}{2\,!}\Big[f''(a)-\varphi''(a)\Big] +$$

$$+ \frac{(x-a)^3}{3\,!}\Big[f'''(a)-\varphi'''(a)\Big] + \frac{(x-a)^4}{4\,!}\Big[f^{IV}(a)-\varphi^{IV}(a)\Big] + \dots\dots +$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{n\,!}\Big[f^{(n)}(a)-\varphi^{(n)}(a)\Big] + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}\Big[f^{(n+1)}(x_0)-\varphi^{(n+1)}(x_0)\Big]$$



El primer miembro es la diferencia de ordenadas en el punto x, para que sea de orden $(n+1)$ con respecto a $(x-a)$ éste debe figurar a la potencia $(n+1)$ y no a otra menor, por eso debe quedar solamente el último término del segundo miembro y en consecuencia anularse todos los anteriores:

El primer término $\big[f(a)-\varphi(a)\big]$ es 0 porque como el punto es común es $f(a)=\varphi(a)$ para que se anulen los otros términos, deben anularse los corchetes, es decir:

$$\begin{array}{lcl}
\big[f'(a)-\varphi'(a)\big] = 0 & \Longrightarrow & f'(a) = \varphi'(a) \\
\big[f''(a)-\varphi''(a)\big] = 0 & \Longrightarrow & f''(a) = \varphi''(a) \\
\big[f'''(a)-\varphi'''(a)\big] = 0 & \Longrightarrow & f'''(a) = \varphi'''(a) \\
\vdots & & \vdots \\
\big[f^{(n)}(a)-\varphi^{(n)}(a)\big] = 0 & \Longrightarrow & f^{(n)}(a) = \varphi^{(n)}(a)
\end{array}$$

es decir, como ya se estableció en la otra definición, para que el contacto sea de orden n en el punto común, deben ser iguales los valores de la función y de las n primeras derivadas.

Ejemplos:

Ejercicio resuelto:

1°) Calcular el radio de curvatura y la curvatura en el vértice de la parábola $y = \frac{1}{4} x^2$; es el caso particular de la parábola $y = \frac{1}{2p} x^2$ con vértice en el origen, cuyo eje es el eje y y el parámetro en el ejemplo es $p = 2$.

Se obtienen la primera y segunda derivada: $y' = \frac{1}{2} x$

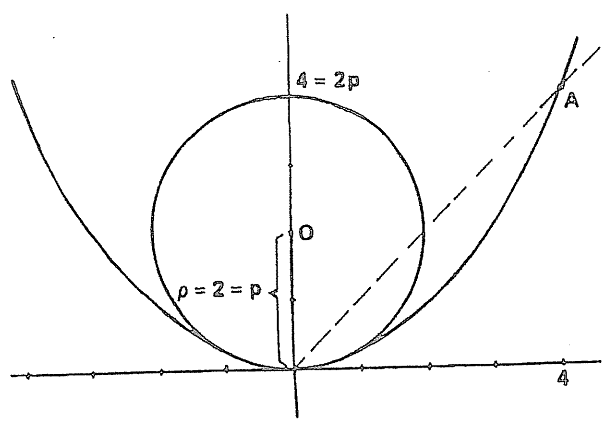
$$y'' = \frac{1}{2}$$

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \Longrightarrow \rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{1}{2} x\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \rho = \frac{\left[1 + \frac{1}{4} x^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

En el vértice $x = 0$ e $y = 0$ es:

$$\rho = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Longrightarrow c = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}$$

En este ejemplo es muy fácil determinar gráficamente, el centro de curvatura y la circunferencia osculatriz, en efecto:



Se traza la bisectriz del primer cuadrante que corta a la parábola en A; este punto por pertenecer a la bisectriz tiene la abscisa igual a la ordenada, o sea:

$$y = x \Longrightarrow \frac{1}{4} x^2 = x \Longrightarrow x = 4$$

luego, las coordenadas del punto A son:

$$y = x = 4 = 2\,\rho$$

o sea, el diámetro de la circunferencia osculatriz igual al duplo del parámetro.

Las coordenadas del centro de curvatura son: $\alpha = 0$; $\beta = 2$.

Ejercicios propuestos

Calcular el radio de curvatura, la curvatura y las coordenadas del centro de curvatura de cada una de las siguientes curvas, en el punto que se indica:

1°) La hipérbola equilátera $y = \frac{12}{x}$ en el punto de coordenadas $x_0 = 3$; $y_0 = 4$.

Rta.: $\rho = \frac{125}{24}$

$c = \frac{24}{125}$

$\alpha = \frac{43}{6}$; $\beta = \frac{57}{8}$

2°) La parábola $y = x^2 + 1$ en el vértice.

Rta.: $\rho = \frac{1}{2}$

$c = 2$

$\alpha = 0$; $\beta = \frac{3}{2}$

3°) La parábola $y = 2\sqrt{3x}$ en el punto de coordenadas $x_0 = 3$; $y_0 = 6$.

Rta.: $\rho = 12\sqrt{2}$

$c = \frac{\sqrt{2}}{24}$

$\alpha = 15$; $\beta = 0$

4°) $y = \frac{1}{3} x^3$ en el punto $P\left(1 ; \frac{1}{3}\right)$

Rta.: $\rho = \sqrt{2}$

$c = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha = 0 \quad ; \quad \beta = \frac{4}{3}$

5°) $y = x^{\frac{3}{2}}$ en el punto $P\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{8}\right)$

Rta.: $\rho = \frac{25}{32}$

$c = \frac{32}{25}$

$\alpha = -\frac{17}{32} \quad ; \quad \beta = \frac{7}{6}$

6°) $y = e^{-x^2}$ en el punto $P(0 ; 1)$

Rta.: $\rho = \frac{1}{2}$

$c = 2$

$\alpha = \frac{1}{2} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{2}$

7°) $y = \frac{1}{3} \sqrt{36 - 4x^2}$ en el punto de coordenadas $P(0 ; 2)$

Rta.: $\rho = 41$

$c = \frac{1}{41}$

$\alpha = -\frac{41}{9} \quad ; \quad \beta = -39$

8°) $y = \left(2 - x^{\frac{1}{2}}\right)^2$ en $P(0 ; 4)$

Rta.: $\rho = 8$

$c = \frac{1}{8}$

$\alpha = 8 \quad ; \quad \beta = 4$

9°) $y = x^3 - 3x + 1$ en el punto $P(1 ; -1)$

Rta.: $\rho = \frac{1}{6}$

$c = 6$

$\alpha = 1 \quad ; \quad \beta = -\frac{5}{6}$

10°) La hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto $P(5 ; 0)$

Rta.: $\rho = \frac{9}{5}$

$c = \frac{5}{9}$

$\alpha = \frac{34}{5} \quad ; \quad \beta = 0$

11°) $y + 2xy + x - 4 = 0$ en el punto $P(1 ; 1)$

Rta.: $\rho = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$c = \frac{2}{3\sqrt{2}}$

$\alpha = -\frac{1}{2} \; ; \; \beta = -\frac{1}{2}$

12°) $y = tg\,x$ en el punto $P\left(\frac{\pi}{4}\,;\,1\right)$

Rta.: $\rho = \frac{\sqrt{125}}{4}$

$c = \frac{4}{\sqrt{125}}$

$\alpha = \frac{\pi - 10}{4}\,;\ \beta = \frac{9}{4}$

13°) $y = sen\,x$ en los puntos en que alcanza un máximo relativo.

Rta.: $\rho = 1$

$c = 1$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\ \beta = 0$

Determinar los puntos en que es máxima la curvatura en cada una de las siguientes curvas:

1°) $y = cos\,x$ Rta.: $x = k\pi\,;\ y = \pm 1$

2°) $y = e^{x}$ Rta.: $P\left(-\frac{ln\,2}{2}\,;\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3°) $y = \frac{1}{3}x^3$ Rta.: $P\ (x \simeq 0{,}67\ ;\ y \simeq 1{,}02)$

$Q\ (x \simeq -0{,}67\ ;\ y \simeq 1{,}02)$

4°) $y = x\,(6 - x^2)$ Rta.: $P\ (x \simeq 2{,}01\ ;\ y \simeq 0{,}051)$

$Q\ (x \simeq -2{,}01\ ;\ y \simeq 0{,}051)$

5°) $y = ln\,x$ Rta.: $P\left(x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ y = -\frac{1}{2}\right)$

Expresión de la curvatura, cuando la curva está dada paramétricamente

Si se tiene $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = g(t) \end{cases}$

La curvatura en un punto es:

$$\boxed{c = \frac{g''(t)\,\varphi'(t) - g'(t)\,\varphi''(t)}{\left\{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}}$$

que también se suele expresar:

$$\boxed{c = \frac{y''x' - y'x''}{\left[x'^2 + y'^2\right]^{\frac{3}{2}}}}$$

Ejemplo:

Ejercicio resuelto

Calcular la curvatura de la cicloide, en el punto $t = \pi$.

La ecuación de la cicloide es:

$$\begin{cases} x = r\,(t - sen\,t) \\ y = r\,(1 - cos\,t) \end{cases}$$

$$x' = r\,(1 - cos\,t)$$
$$x'' = r\,sen\,t$$
$$y' = r\,sen\,t$$
$$y'' = r\,cos\,t$$

Se reemplaza en la expresión de la curvatura:

$$c = \frac{r\cos t \, . \, r\,(1-\cos t) - r\,sen\, t . r\,sen\, t}{\left[r^2\,(1-\cos t)^2 + r^2\,sen^2\, t\right]^{\frac{3}{2}}}$$ se efectúan operaciones:

$$c = \frac{r^2\cos t - r^2\cos^2 t - r^2\,sen^2\, t}{\left[r^2\,(1-2\cos t + \cos^2 t + sen^2\, t)\right]^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow c = \frac{r^2\left[\cos t - (\cos^2 t + sen^2\, t)\right]}{r^3\left[1 - 2\cos t + (\cos^2 t + sen^2\, t)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$c = \frac{\cos t - 1}{r\left[2 - 2\cos t\right]^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow c = \frac{\cos t - 1}{r\,2^{\frac{3}{2}}\,(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow c = -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\,r\,(1-\cos t)^{\frac{1}{2}}}$$

Pero $1 - \cos t = 2\,sen^2\,\dfrac{t}{2}$. Luego:

$$c = -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\,r\left(2\,sen^2\,\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow c = -\frac{1}{2^{\frac{4}{2}}\,r\,sen\,\frac{t}{2}} \Longrightarrow c = -\frac{1}{4\,r\,sen\,\frac{t}{2}}$$

en el punto que corresponde a $t = \pi$ es $sen\,\dfrac{t}{2} = sen\,\dfrac{\pi}{2} = 1$ como la curvatura la consideramos positiva

$$c = \frac{1}{4\,r} \Longrightarrow \rho = 4\,r$$

Ejercicios propuestos:

Calcular la curvatura, el radio de curvatura y las coordenadas del centro de curvatura de cada una de las siguientes curvas, en los puntos que se indican:

1°) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}\,(t^2 + 1) \\ y = \dfrac{1}{6}\,t^3 \end{cases}$ en el punto que corresponde a $t = 1$

Rta.: $\rho = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ $c = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$\alpha = -\dfrac{1}{2}$; $\beta = \dfrac{7}{6}$

2°) $\begin{cases} x = a\,(t\,sen\,t + \cos t) \\ y = a\,(sen\,t - t\cos t) \end{cases}$ en el punto que corresponde a $t = \dfrac{\pi}{4}$

Rta.: $\rho = \dfrac{\pi\,a}{4}$ $c = \dfrac{4}{\pi\,a}$

$\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,a$; $\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,a$

3°) $\begin{cases} x = 2\,t \\ y = t^2 - 2 \end{cases}$ en el punto que corresponde a $t = 2$

Rta.: $\rho = 10\sqrt{5}$ $c = \dfrac{1}{10\sqrt{5}}$

$\alpha = -16$; $\beta = 12$

4°) $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \operatorname{sen}^3 t \end{cases}$ en el punto que corresponde a $t = \dfrac{\pi}{6}$.

Rta.: $\rho = \dfrac{3\sqrt{3}\, a}{4}$ $c = \dfrac{4}{3\sqrt{3}\, a}$

$\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}\, a}{4}$; $\beta = \dfrac{4}{5}\, a$

5°) $\begin{cases} x = 3\, t^2 \\ y = 3\, t - t^3 \end{cases}$ en el punto que corresponde a $t = 1$

Rta.: $\rho = 6$ $c = \dfrac{1}{6}$

$\alpha = 3$; $\beta = -4$

CONTENIDO

Este libro se terminó de imprimir
en el mes de septiembre de 1997
en los talleres gráficos de INDUGRAF S.A.
Sánchez de Loria 2251, Buenos Aires, República Argentina