El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico[1]

Yves Chevallard[2]

Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1.999.

Resumen
Este artículo retoma una serie de conferencias impartidas en la Universidad de verano para profesores de matemáticas que tuvo lugar en La Rochelle (Francia) en julio de 1.998. Propone una presentación lineal de los conceptos clave del enfoque antropológico de la enseñanza de las matemáticas. Su principal objetivo es permitir, a todos los que practican la didáctica, que profundicen su conocimiento de las modalidades básicas en este enfoque.

1. LA NOCIÓN DE ORGANIZACIÓN PRAXEOLÓGICA

1.1. ¿Por qué la *antropología*?

La etiqueta de enfoque o teoría antropológica parece proclamar una exclusividad -los demás enfoques, existentes o posibles, no merecerían este calificativo...- de la que hay que decir enseguida que no es más que un efecto del lenguaje. No hay ninguna razón para que la organización del saber que aparecerá en los desarrollos que siguen reciba el monopolio de la referencia legítima al campo de la antropología, incluso si parece ser, hoy en día, la única que se designa así.

En lo esencial, hablaré pues aquí de la teoría antropológica de lo didáctico -*la* TAD- como, en cualquier pueblo, se os presentará *el* Luis, *el* Carlos, *el* Francisco, etc., ¡sin que la exclusividad del nombre esté garantizada! Además, el hecho de llamarse Luis, Carlos, o Francisco no dice gran cosa de la persona que lleva tal nombre. Es ahí quizá donde se termina la comparación anterior. Pues, por supuesto, *hay razones* para llamar *antropológica* a la teorización cuyos elementos serán explicados a continuación. De hecho, el empleo de este adjetivo *quiere decir* algo, y algo de lo que más vale estar prevenidos para evitar ir de incomprensiones a malentendidos.

El punto crucial al respecto, del que se descubrirán poco a poco las implicaciones, es que la TAD sitúa la actividad *matemática*, y en consecuencia la actividad del *estudio* en matemáticas, *en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales*. Ahora bien esta postura epistemológica conduce a cualquiera que se someta a ella a atravesar en todos los

[1]Traducción de Ricardo Barroso Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Con la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martinéz Montañes, Sevilla.

[2]IUFM d’Aix-Marseille, 63 La Canebière, 13001 Marseille.

sentidos -e incluso a ignorar- muchas fronteras institucionales en cuyo interior debe sin embargo *mantenerse*, porque, normalmente, se respeta el reparto del mundo social que las instituciones establecidas, y la cultura corriente que difunde los mensajes hasta la saciedad, dan por sentado, el reparto que nos presentan como casi *natural*, y a fin de cuentas *obligado*.

Según esta vulgata de lo "culturalmente correcto", hablar válidamente de didáctica de las matemáticas, por ejemplo, supone hablar de algunos objetos distintivos -las matemáticas, primero, y después, solidariamente, los alumnos, los profesores, los manuales, etc.-, *excluyendo casi todos los demás objetos*, y en particular de todos aquellos que creemos demasiado rápidamente como no pertinentes científicamente porque aparecen *culturalmente alejados* de los objetos considerados como emblemáticos de las cuestiones de didáctica de las matemáticas.

El postulado de base de la TAD es contrario a esta visión particularista del mundo social: se admite en efecto que *toda* actividad humana regularmente realizada puede describirse con un modelo *único*, que se resume aquí con la palabra de *praxeología*. Antes incluso de examinar lo que se denomina así, se debe señalar que se parte pues de una hipótesis que no especifica *de ninguna manera* la actividad *matemática* entre las actividades humanas: las matemáticas deberán ver reconocidas su especificidad *de otra manera*.

1.2. La noción de la praxeología

Tipos de tareas.

En la raíz de la noción de praxeología, se encuentran las nociones solidarias de *tarea* t, y de *tipo* de tareas, T. Cuando una tarea t forma parte de un tipo de tareas T, se escribirá $t \in T$. En la mayoría de casos, una tarea (y el tipo de tareas *asociado*) se expresa por un verbo: *limpiar* la habitación, *desarrollar* la expresión literal dada, *dividir* un entero entre otro, *saludar* a un vecino, *leer* un manual de empleo, *subir* una escalera, *integrar* la función $x \quad x \ln x$ entre $x = 1$ y $x = 2$, etc. Tres puntos deben ser subrayados inmediatamente.

En primer lugar, la noción de tarea empleada aquí es evidentemente *más amplia* que la del lenguaje corriente: rascarse la mejilla, ir del sofá al armario, e incluso sonreír a alguien, *son también tareas*. Se trata de una puesta en práctica particularmente simple del "principio antropológico" evocado anteriormente.

A continuación, la noción de tarea o, mejor, de *tipo* de tareas, supone un objeto relativamente preciso. *Subir una escalera* es un tipo de tarea, pero *subir*, simplemente, *no lo es*. De la misma manera, *calcular el valor de una función en un punto* es un tipo de tareas, pero *calcular*, simplemente, es lo que se llamará un *género* de tareas, que pide un determinativo.

> Concretamente, un género de tareas no existe más que bajo la forma de diferentes *tipos* de tareas, cuyo contenido está estrechamente especificado. *Calcular*... es, se ha dicho, un género de tareas; pero *calcular el valor (exacto) de una expresión numérica conteniendo un radical* es un tipo de tareas, lo mismo que *calcular el valor de una expresión conteniendo la letra x cuando se da a x un valor determinado*. Durante los años de colegio, el género *calcular*... se enriquece de nuevos tipos tareas; ocurrirá lo mismo en el instituto, donde el alumno va en primer lugar a aprender a calcular *con vectores*, después, más tarde, a *calcular una integral o una primitiva*, etc. Y se repetirá lo mismo, por supuesto, con los géneros *Demostrar* ...,

Construir ..., o también *Expresar ... en función de ...*

Por último, tareas, tipos de tareas, géneros de tareas *no son* datos de la naturaleza, son "artefactos", "obras", *construcciones institucionales,* cuya reconstrucción en tal institución, y por ejemplo en tal clase, es un problema completo, *que es el objeto mismo de la didáctica*.

Técnicas

A pesar de lo indicado previamente, no se considerará en primer lugar, en esta primera parte, más que la *estática* de las praxeologías, ignorando pues, provisionalmente, la cuestión de su *dinámica*, y en particular de su génesis. Sea pues *T* un tipo de tareas *dado*. Una praxeología relativa a *T* requiere (en principio) *una manera* de *realizar* las tareas $t \in T$: a una determinada *manera de hacer,* ô, se le da aquí el nombre de *técnica* (del griego *tekhnê*, saber hacer). Una praxeología relativa al tipo de tareas *T* contiene pues, en principio, una técnica ô relativa a *T*. Contiene así un "bloque" designado por [*T*/ô], que se denomina bloque *práctico-técnico* y que se identificará genéricamente con lo que comúnmente se denomina *un saber-hacer*: un determinado tipo de tareas, *T* y una determinada manera, ô, de realizar las tareas de este tipo. Una vez más deben hacerse aquí tres precisiones.

En primer lugar, una técnica ô -una "manera de hacer"- no tiene éxito más que sobre una *parte* *P*(ô) de las tareas del tipo *T* a la cual es relativa, parte que se denomina *alcance* de la técnica: la técnica tiende a *fracasar* sobre $T \setminus$ P(ô) de manera que se puede decir que "no se sabe, *en general,* realizar las tareas del tipo *T* ".

La cosa es obvia, pero muy a menudo olvidada, en matemáticas. Así toda técnica de cálculo sobre **N** fracasa a partir de cierta extensión de los números. Del mismo modo, el hecho de que no se pueda *en general* factorizar un entero dado está claramente en la base de algunas técnicas de *criptografía*.

En esta visión, una técnica puede ser *superior* a otra, si no sobre toda *T*, al menos sobre alguna parte de ella: tema al que volveremos a propósito de la *evaluación* de las praxeologías.

A continuación, observemos que una técnica ô no es necesariamente de naturaleza *algorítmica* o *casi algorítmica*: no es así más que en casos poco frecuentes. Axiomatizar tal ámbito de las matemáticas, pintar un paisaje, fundar una familia son tipos de tareas para las cuales no existe forzosamente una técnica algorítmica... Pero es verdad que parece existir una tendencia bastante general a la algoritmización -aun cuando este proceso de *progreso técnico* parezca a veces detenerse por largo tiempo, en una determinada institución, a propósito de tal o cual tipo de tareas o de tal o cual complejo de tipo de tareas.

Por fin, en una institución *I* dada, y a propósito de un tipo de tareas *T* dado, existe en general una *sola* técnica, o al menos un *pequeño número* de técnicas *institucionalmente reconocidas,* con la exclusión de técnicas alternativas posibles -que pueden existir efectivamente pero en *otras* instituciones. Dicha exclusión es correlativa, entre los actores de *I*, de una ilusión de "naturalidad" de las técnicas *institucionales* en *I* -hacerlo así, es natural...-, por contraste con el conjunto de técnicas alternativas posibles, que los sujetos de *I* ignoran, o, si se les confronta a ellas, las miran espontáneamente como *artificiales*, y (por ello) "contestables", "inaceptables", etc. En esta visión, se observa frecuentemente, entre los sujetos de *I*, verdaderas *pasiones institucionales* para las técnicas naturalizadas en la institución.

Así, se puede determinar el *signo* de un binomio $ax+b$ escribiendo esta expresión como $a[x-(-\frac{b}{a})]$, lo que permite concluir mediante un pequeño *razonamiento:* $2-3x=-3(x-\frac{2}{3})$ es negativo si $x>\frac{2}{3}$, positivo para $x<\frac{2}{3}$; $5x+3=5[x-(-0{,}6)]$ es positivo para $x>-0{,}6$, negativo para $x<-0{,}6$; etc. Pero esta manera de hacer, prácticamente desconocida en la enseñanza secundaria francesa actual, recibiría sin duda una oleada de críticas.

Tecnologías

Se entiende por *tecnología*, y se indica generalmente por θ, un *discurso racional* -el *logos*- sobre la técnica -la *tekhnê*- ô, discurso cuyo primer objetivo es *justificar* "racionalmente" la técnica ô, para asegurarse de que permite realizar las tareas del tipo *T*, es decir, realizar lo que se pretende. El estilo de racionalidad puesto en juego varía por supuesto en el espacio institucional y, en una institución dada, al filo de la historia de esta institución, de manera que una racionalidad institucionalmente dada podrá aparecer... como poco racional en otra institución. De nuevo tres observaciones completarán esta presentación.

Se admitirá en primer lugar como un hecho de observación que, en una institución *I*, cualquiera que sea el tipo de tareas *T*, la técnica ô relativa a *T* está siempre acompañada de al menos un *embrión* o más frecuentemente aún, de un *vestigio* de tecnología θ. En numerosos casos, incluso, algunos elementos tecnológicos están *integrados en la técnica*.

Así ocurre tradicionalmente en la aritmética elemental, en la que el mismo *pequeño discurso* tiene una doble función, técnica y tecnológica, que permite a la vez *encontrar* el resultado pedido (función técnica) y *justificar* que es correcto el resultado esperado (función tecnológica), como cuando se dice: "Si 8 caramelos cuestan 10 Francos, 24 caramelos, o sea, 3 veces 8 caramelos, costarán 3 *veces más*, es decir, 3 veces 10 Francos"

Por otra parte, el hecho de que exista en *I* una técnica *canónica*, en principio la única reconocida y la única empleada, confiere a esta técnica una virtud "autotecnológica": actuar de esta manera no exige justificación, porque es la *buena* manera de actuar (en *I*).

Cabe señalar después que una segunda función de la tecnología es la de *explicar*, de *hacer inteligible*, de *aclarar* la técnica. Si la primera función -justificar la técnica- consiste en asegurar que la técnica da lo pretendido, esta segunda función consiste en exponer *por qué* es correcta. Se observará que estas dos funciones son desigualmente asumidas por una tecnología dada. Desde este punto de vista, en matemáticas, la función de *justificación* predomina tradicionalmente, por medio de la exigencia demostrativa, sobre la función de *explicación*.

Se sabe que una ecuación $ax^2+bx+c=0$ (con $a\neq 0$) tiene una raíz doble cuando $b^2-4ac=0$, no tiene raíces (en **R**) si $b^2-4ac<0$, etc. Se puede explicar est resultado con la ayuda de la tecnología de los *números complejos.* Sean en efecto z y $\overline{z}$ las raíces complejas de la ecuación. Se tiene:

$$(z-\overline{z})^2=(z+\overline{z})^2-4z\overline{z}=(b/a)^2-4(c/a)=(b^2-4ac)/a^2.$$

Se ve así que $b^2-4ac=0$ si y sólo si $z=\overline{z}$; que si $b^2-4ac<0$, entonces z y $\overline{z}$ no puede ser reales, etc.

Por último, una tercera función corresponde a un empleo más actual del término de tecnología: la función de *producción* de técnicas. Notemos aquí que siempre hay tecnologías *potenciales*, a la espera de técnicas, que no son aún tecnologías de alguna técnica o que lo son de muy pocas técnicas. A este respecto se señalará este fenómeno de *sub-explotación* de las tecnologías disponibles, tanto desde el punto de vista de la explicación como de la producción.

Es así como la tecnología de los números *fraccionarios* (cocientes de enteros) permite generar una técnica que clasifica lo visto anteriormente a propósito de los precios de los caramelos y que concreta el esquema discursivo siguiente: "Si a cosas valen b francos, entonces x cosas, es decir x/a veces a cosas, valdrán *x/a veces más*, es decir, x/a veces b francos." Así se dirá: "11 caramelos cuestan 11/8 *veces más* (que 8 caramelos), es decir, 11/8 veces 10 francos (= 13,75 francos)"; y, por una extensión atrevida del sentido de la expresión: "3 caramelos cuestan 3/8 *veces más* (que 8 caramelos), es decir 3/8 veces 10 francos (=3,75 francos). (Se indicará que es: $3/8\times10$ francos = $11/8\times10$ francos - $8/8\times10$ francos = 13,75 francos - 10 francos = 3,75 francos). Más correctamente, se dirá simplemente que "x cosas, es *x/a veces a* cosas", etc.

Teorías

A su vez, el discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, de las que se puede pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación-explicación-producción, el de la *teoría*, Θ, que retoma, en relación a la tecnología, el papel que ésta última tiene respecto a la técnica.

Por supuesto, se puede imaginar que esta regresión justificativa se persiga hasta el infinito -que exista una teoría de la teoría, etc. De hecho, la descripción en tres niveles presentada aquí (técnica/tecnología/teoría) es suficiente en general para darse cuenta de la actividad que se quiere analizar. La teoría, tierra de elección de perogrulladas, tautologías y otras evidencias, es incluso a menudo evanescente: la justificación de una tecnología dada es, en muchas las instituciones, tratada por simple reenvío a otra institución, real o supuesta, censada como poseedora de una tal justificación. Éste es el sentido clásico: "Se demuestra en matemáticas..." del profesor de física, o aún del "Se ha visto en geometría ..." del profesor de matemáticas de antaño.

En todo ámbito, la *naturaleza* de la teoría puede fluctuar, y de hecho fluctúa históricamente. Como ocurre en materia técnica o tecnológica, hay aquí un *progreso teórico* que conduce en general a sustituir las evidencias "metafísicas" por enunciados teóricos positivos.

Sea así el principio de recurrencia: $P \subseteq \mathbf{N} \wedge 0 \in P \wedge \forall n\ (n \in P \Rightarrow n+1 \in P) \Rightarrow P = \mathbf{N}$. Para justificar este ingrediente tecnológico principal de las demostraciones por recurrencia, se puede, entre otras cosas, referirse, como hace Henri Poincaré, a "la potencia del espíritu que se sabe capaz de concebir la repetición indefinida de un mismo acto desde que este acto es una vez posible" (Poincaré 1902), o bien admitir como un axioma que toda parte no vacía de **N** tiene un primer elemento, y mostrar entonces que de ahí se desprende el principio de recurrencia.

En griego, *theôria* ha tomado a partir de Platón el sentido moderno de "especulación abstracta". Pero, en el origen, significaba simplemente la idea de contemplación de un espectáculo -el *theôros* era el espectador que miraba la acción sin participar. De hecho, los enunciados teóricos aparecen frecuentemente como "abstractos", apartados de las preocupaciones de los "simples" tecnólogos y técnicos. Este efecto de abstracción es correlativo a lo que funda la gran *generatividad* de los enunciados teóricos -su capacidad para justificar, para explicar, para producir.

> El hecho de que, en **R**, la serie de término general 1/n tienda a 0 es un resultado tecnológico muy “concreto”. Su justificación teórica contempla el axioma de Eudoxo-Arquímedes, considerado ordinariamente como demasiado abstracto: si A y ε son dos reales estrictamente positivos, entonces existe un entero n tal que n ε > A. ¡Pero estas dos afirmaciones son matemáticamente equivalentes!

Saber-hacer y saberes

Alrededor de un tipo de tareas, T, se encuentra así, en principio, una tripleta formada por una *técnica* (al menos), ô, por una tecnología de ô, θ, y por una teoría de θ, Θ. El total, indicado por [T/ô/θ/Θ], constituye una praxeología *puntual*, donde este último calificativo significa que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas, T. Una tal praxeología -u *organización praxeológica*- está pues constituida por un bloque práctico-técnico, [T/ô], y por un bloque *tecnológico-teórico,* [θ/Θ].

El bloque [θ/Θ] se identifica habitualmente como *un saber*, mientras que el bloque [T/ô] constituye un *saber-hacer*. Por metonimia se designa corrientemente como “saber” la praxeología [T/ô/θ/Θ] *completa*, o incluso cualquier parte de ella. Pero esta manera de hablar estimula una *minoración del saber-hacer*, sobre todo en la producción y difusión de las praxeologías: así, como ya hemos señalado, encontramos a menudo tecnologías que “esperan su primer empleo”, o que han “perdido su empleo”.

Este predominio del saber no es nunca fortuito. De hecho, se encuentra raramente en las praxeologías puntuales. Generalmente, en una institución dada, I, una teoría Θ responde de *varias tecnologías* θ_j, cada una de las cuales a su vez justifica y hace inteligibles *varias técnicas*, $ô_{ij}$, correspondientes a *otros tantos tipos de tareas*, T_{ij}. Las organizaciones puntuales van así a combinarse, en primer lugar, en organizaciones *locales*, [T_i/$ô_i$/θ/Θ], centradas sobre una tecnología θ determinada, y después en organizaciones *regionales*, [T_{ij}/$ô_{ij}$/θ_j/Θ], formadas alrededor de una teoría Θ. (Más allá, se denominará organización global el complejo praxeológico obtenido, [T_{ijk}/$ô_{ijk}$/θ_{jk}/Θ_k], en una institución dada, por la agregación de varias organizaciones regionales correspondientes a varias teorías Θ_k). Ahora bien, el paso de una praxeología puntual [T/ô/θ/Θ] a una praxeología local [T_i/$ô_i$/θ/Θ] pone en marcha la *tecnología* θ, de la misma manera que el paso ulterior a una praxeología regional [T_{ij}/$ô_{ij}$/θ_j/Θ] llevará al primer plano la *teoría*, Θ. En los dos casos, la visibilidad del bloque del saber aumenta, en detrimento del saber-hacer. Este desequilibrio tiene, sin duda, una justificación: pues si es verdad que, en la mayoría de los casos, el tipo de tarea precede *genéticamente* el bloque [θ/Θ] (que aparece entonces como medio de producir y de justificar una técnica ô apropiada a T), no es menos cierto, que, *estructuralmente*, el saber [θ/Θ] permite generar ô (para T dado). Por esta razón, se suele presentar clásicamente, en el texto del saber, al saber-hacer [T/ô] como una simple aplicación del “saber” [θ/Θ].

> En la enseñanza de las matemáticas, un *tema* de estudio, (“Pitágoras”, “Tales”, etc.), se identifica a menudo con una *tecnología* θ determinada (teorema de Pitágoras, teorema de Tales) o, más bien, implícitamente, con el bloque de saber [θ/Θ] correspondiente, dado que esta tecnología permite producir y justificar, a título de aplicaciones, técnicas relativas a distintos tipos de tareas. Se señalará, sin embargo, que otros temas de estudio (“Factorización”, “Desarrollo”, “Resolución de ecuaciones”, etc.) se expresan, muy clásicamente, en términos de tipos de tareas.

Una organización praxeológica, incluso puntual, no resulta en general completamente conforme a los cánones evocados anteriormente. El tipo de tareas alrededor del cual se construye puede permanecer mal identificado, revelándose la técnica asociada como algo casi impracticable. La tecnología podrá a veces reducirse a una pura petición de principios, y la teoría ser perfectamente sibilina. La noción de praxeología aparece así como una noción genérica cuyo estudio conviene profundizar -sobre todo mediante el estudio empírico y el análisis de los datos de observación recogidos.

1.3. Las cuestiones a estudiar

Lo rutinario y lo problemático

Se puede imaginar un mundo institucional en el que las actividades humanas estuviesen regidas por praxeologías bien adaptadas que permitiesen realizar todas las tareas deseadas de una manera a la vez eficaz, segura e inteligible. Pero tal mundo no existe: como se ha sugerido, las instituciones son recorridas por toda una *dinámica* praxeológica, que tan sólo examinaremos aquí brevemente.

Las praxeologías, de hecho, envejecen: sus componentes teóricos y tecnológicos pierden crédito y llegan a ser opacos, al tiempo que emergen nuevas tecnologías que, por contraste, ponen bajo sospecha, por arcaicas, las técnicas establecidas.

> Hasta mediados del siglo XIX, la aritmética escolar contenía, bajo el nombre de *Teoría de razones y proporciones*, una praxeología matemática local que permitía tratar eficazmente los problemas de proporcionalidad directa o inversa: si 8 caramelos cuestan 10 francos, y si se quiere conocer el precio, x francos, de 3 caramelos, se dirá que "*x es a 3 como 10 es a 8*", lo que se traduce por la *proporción* indicada clásicamente por x:3::10:8, en la que se sabe que el producto de los *extremos*, $8 \times x$ es igual al producto de los *medios*, 10×3, igualdad que nos da asimismo $x = 10 \times 3/8$. La reforma de "las matemáticas modernas" alrededor de 1970, expulsó, por obsoletos, numerosos elementos teóricos y tecnológicos de las matemáticas "clásicas", como la teoría de las razones y proporciones, pero sin eliminar al mismo tiempo las técnicas elementales que, de hecho, no fueron inmediatamente reemplazadas, o no lo fueron más que por unas praxeologías más complejas, poco viables en los primeros cursos de la enseñanza secundaria. Desde que se dispone de la noción de *función*, y más particularmente de la noción de función *lineal*, así como de las notaciones funcionales usuales, se puede retomar el problema de los 3 caramelos en estos términos: siendo f lineal, si $f(8)= 10$, entonces, $f(3)= f(3/8 \times 8)= 3/8 \times f(8)= 3/8 \times 10 =$...

Sobre todo, en un universo de tareas rutinarias, surgen en todo momento, aquí y allí, las tareas problemáticas que no se sabe -aún- realizar. Nuevos tipos de tareas, que son entonces los tipos de *problemas*, se asientan así, y nuevas praxeologías vendrán a constituirse a su alrededor.

> A partir del curso 1998/99, los profesores de matemáticas de las clases de Terminal S[3] han debido considerar, en el marco de la enseñanza de especialidad, un tipo de problemas inédito hasta entonces en este tipo de estudios: dados $a, b \in \mathbf{N}^*$ primos entre sí, hallar los enteros x, y tales que $ax+by = c$ (" ecuación de Bézout "). Cuando los enteros a y b son "pequeños" y que

[3]La clase de Terminal S corresponde al último año de secundaria en la especialidad de bachillerato científico-técnico (17-18 años)

se trabaja a mano, es práctico proceder como en el siguiente ejemplo (con a = 151, b = 137, c = 1). Se empieza por escribir la fracción a/b como una fracción continua que se acaba cuando el numerador de la última fracción obtenida es 1 :

$$\frac{151}{137} = 1 + \frac{14}{137} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{137}{14}} = 1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{11}{14}} = 1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{\cfrac{14}{11}}} = 1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{11}}} = 1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{11}{3}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{3}}}} = 1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}}} = 1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}.$$

Se *elimina* entonces esta última fracción (aquí, 1/2), y se opera con la expresión obtenida:

$$1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \approx}}}} = 1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{4}{5}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{49}{5}} = 1 + \frac{5}{49} = \frac{54}{49}$$

Se obtiene así: 49·151–54·137 = 1. Claro está que aún queda por *justificar* esta técnica, y quizá, más todavía, *explicarla*.

Constantemente, en una institución I dada, aparecen nuevas praxeologías que, al menos *una parte* de los actores de I, considera como necesarias para un *mejorar* el funcionamiento de I. Estas praxeologías deberán, en consecuencia, ser *producidas*, o más frecuentemente *re*producidas, en la medida en que *ya* existan en cualquier otra institución I' -a partir de la cual se podrá proponer “importarlas” a I. Las condiciones impuestas por la ecología de I hacen que la praxeología deseada no pueda ser reproducida allí de manera *idéntica*, sino que sufrirá, en esta “transferencia”, determinadas modificaciones adaptativas: se hablará, pues, no de transferencia, sino de *transposición* de I' a I.

Los procesos de transposición institucional no producen necesariamente versiones *degradadas* -inferiores por ejemplo en cuanto a la calidad de su bloque tecnológico-teórico- de las organizaciones praxeológicas transportadas. Más bien al contrario, en materia de transposición *didáctica*, por ejemplo, es decir, cuando I es una institución didáctica (una escuela, una clase...), sucede con frecuencia, sobre todo cuando I' no es una institución *sabia*, que el trabajo transpositivo sea la ocasión de *mejorar* la praxeología así vuelta a trabajar -simplificándola, precisando algunos de sus elementos, etc. En todo caso, la transposición enriquece el mundo de las praxeologías socialmente disponibles -en la medida en la que crea una praxeología adaptada a ciertas condiciones institucionales *inéditas*.

Analizar las prácticas docentes

Comúnmente, la penuria praxeológica se traduce en primer lugar por una falta de *técnicas*. ¿Cómo realizar las tareas del tipo T? Y también, o sobre todo: ¿cómo realizar mejor las tareas de este tipo? Estas interrogaciones exigen una *producción de técnicas* y, por tanto, de *praxeologías*. En general, dado un tipo de tareas, T, se llega así a *(re)estudiar* la cuestión, indicada genéricamente ô$_T$, de una técnica apropiada que permita realizar las tareas t ∈ €T y, más completamente, de la praxeología correspondiente. La cuestión $\hat{o}_T$ -*¿cómo realizar las tareas del tipo T?*- aparece entonces como *generatriz* de la praxeología puntual $O_T = [T/\hat{o}/\theta/\Theta]$ que se trata de (re)construir.

Los desarrollos anteriores y los que siguen manifiestan por ejemplo el deseo de estudiar -o más bien de retomar como una novedad reciente- la cuestión $\hat{o}_T$ relativa a un tipo de tareas *T* cuya denominación puede ser: *Analizar las prácticas docentes*. Esta denominación remite implícitamente a una problemática *más amplia*, que se expresará aquí con un esquema genérico que articula *cuatro* grandes tipos de tareas. Dado un objeto *o* relativo a las prácticas docentes, se tratará en efecto en primer lugar de *observar* el objeto *o* (T_1), después de *describir y analizar* el objeto *o* (T_2), a continuación de *evaluar* el objeto *o* (T_3), y por último, de *desarrollar* el objeto *o* (T_4). Por supuesto, estos tipos de tareas, que se definen por referencia a ciertos géneros de tareas (*observar, describir y analizar, evaluar, desarrollar)* más o menos bien definidos en la cultura común, (¿qué significa *desarrollar*, por ejemplo?), quedan aún por construir, solidariamente con los otros componentes -técnicos, tecnológicos, teóricos- de las praxeologías consideradas.

> En lo que sigue, el tipo de tareas T_1, (la observación) será poco o mucho neutralizado por el recurso a unos corpus simplemente invocados de datos de observación *ya constituidos*. Los tipos de tareas T_3 (la evaluación) y T_4 (el desarrollo), sobre los que volveremos, estarán en el horizonte del trabajo más que en su interior. En el centro del trabajo, se situará, pues el tipo de tareas T_2 -la descripción y el análisis de ciertos objetos *o* relativos a las prácticas de enseñanza.

Los tipos de objetos *o* considerados serán de dos clases: dado un tema de estudio matemático θ, se considerará sucesivamente: a) *la realidad matemática* que puede construirse en una clase de matemáticas donde se estudia el tema θ; b) la *manera* en que puede ser construida esta realidad matemática, es decir la manera como puede realizarse el estudio del tema θ. El primer objeto -“la realidad matemática que...”- no es otra cosa que una *praxeología matemática* u *organización matemática* que se denominará por OM_θ. El segundo objeto -“la manera que...”- es lo que se denominará una *organización didáctica*, que se indicará, de manera análoga por OD_θ. El trabajo de estudio por realizar concierne pues principalmente a los dos tipos de tareas siguientes: *describir y analizar* la organización *matemática* OM_θ que se puede construir en una clase de matemáticas donde se estudia el tema θ (T_{21}); *describir y analizar* la organización *didáctica* OD_θ que puede ser puesta en práctica en una clase de matemáticas donde se estudia el tema θ (T_{22})

Analizar una organización matemática

Fijaremos como primer objetivo *construir*, o al menos *esbozar*, a partir de los elementos teóricos-tecnológicos introducidos hasta aquí, una técnica $\hat{o}_{21}$ de descripción y análisis de una organización matemática OM_θ. A título de introducción, se considerará aquí una *especie* simple de tareasT_{21} escogiendo el tema θ = div de la *división de enteros*:

> t_{div}: Describir y analizar la organización OM_θ que puede ser construida en una clase donde se estudia el tema de la división de enteros.

Se debe distinguir cuidadosamente esta tarea de la tarea, denominada $t_{\partial\text{div}}$, de descripción y de análisis de la organización *didáctica* correspondiente:

> $t_{\partial\text{div}}$: Describir y analizar la organización didáctica $OD_{\text{div}} = \partial OM_{\text{div}}$ que puede ser puesta en práctica en una clase donde se va a estudiar el tema de la división de los enteros.

El trabajo requerido es el que, *grosso modo*, se puede esperar de un candidato al CAPES[4] de matemáticas cuando hace *la exposición sobre un tema dado*, primera prueba oral de admisión cuyo tema 08, en la oposición de 1.998, se denominaba, exactamente: *División euclídea en* **Z**, *unicidad del cociente y del resto. Aplicaciones a la aritmética*. El *resultado tecnológico principal de* OM_{div} es evidentemente el siguiente:

> θ_o [*Teorema y definición*] Dados dos enteros relativos a y b, $b>0$, existe una pareja y sólo una de enteros relativos q y r, tales que $a = bq + r$, $0 \le r < b$. Los números a y b se llaman respectivamente el *dividendo* y el *divisor*, los números q y r, el *cociente* y el *resto* de la división de a por b.

Se asegura fácilmente que la afirmación anterior es equivalente a la siguiente:

> θ_o [*Teorema y definición*] Dados dos enteros relativos a y b, $b>0$, existe uno y un solo entero relativo q tal que $bq \le$€$a < b(q+1)$. El número q se llama cociente de la división de a por b. Se llama resto de esta división al entero $r = a - bq$.

De hecho, este enunciado tecnológico no es más que la *conclusión* de un "discurso tecnológico" más amplio, que lo justifica o, como se dice en matemáticas, que lo *demuestra*:

> **División de enteros: resultado fundamental**
>
> Sean dos enteros relativos a y b, $b > 0$.
> 1. Demostremos que existe al menos un entero relativo q tal que: $bq \le a < b\,(q+1)$. Dado que la serie aritmética $(bk)_{k\in Z}$ es estrictamente creciente, si q_1 y q_2 cumpliesen los dos esta doble desigualdad, con por ejemplo $q_1 < q_2$, es decir $q_1 + 1 \le$€q_2, se tendría que $a < b(q_1+1) \le bq_2 \le a$, lo que es imposible. De donde se deduce la unicidad de q.
> 2. Demostremos después la existencia de q. Supongamos en primer lugar que $a \ge$€0. Dado que la serie $(bk)_{k\in Z}$ es estrictamente creciente y no acotada, existe un primer entero $k \in$ **N** tal que $bk > a$, y se tiene en particular $b(k-1) \le$€a. Pongamos $q = k - 1$; se verifica entonces que $bq \le$€$a < b(q+1)$: el entero q conviene. Si, ahora, se tiene $a < 0$, existe q' tal que $bq' \le$€$-a < b(q'+1)$, siendo $b(-q'-1) < a \le$€$b(-q')$. Si $a = b(-q')$, se puede tomar $q = q'$. Si no, se tiene $a < b(-q')$ y $b(-q'-1) < a < b(-q')$; y, tomando $q = q'$, se obtiene también $bq \le a < b(q+1)$; el entero conveniente es q.
> 3. Así, dados dos enteros relativos a y b, $b>0$, existe uno y sólo un entero relativo q tal que $bq \le a < b(q+1)$. El número q se llama el cociente de la división de a por b. Se llama resto de esta división al entero $r = a - bq$.

Los elementos teóricos requeridos para justificar la tecnología anterior son los siguientes:

> **División de enteros: elementos teóricos**
>
> 1. La demostración de la unicidad utiliza esencialmente el hecho de que la sucesión $(bk)_{k\in \mathbf{Z}}$ es estrictamente creciente.
> 1.1. Este hecho se desprende del resultado teórico siguiente:

[4]En Francia, el CAPES (Certificat d'Aptitude Pédagogique pour l'Enseignement Supérieur) es el examen de la oposición para profesor de secundaria de la enseñanza pública.

Θ_0. El orden usual sobre **Z** hace de **Z** un anillo ordenado, es decir que se tiene:
Θ_{01}. $\forall\, k \in \mathbf{Z}, \forall\, n, m \in \mathbf{Z}, n \leq m \Rightarrow n+k \leq m+k$;
Θ_{02}. $\forall\, k \in \mathbf{N}, \forall\, n, m \in \mathbf{Z}, n \leq m \Rightarrow kn \leq km$.
1.2. Se utiliza también la propiedad siguiente, más propia del anillo ordenado discreto **Z**:
Θ_1. $\forall\, n, m \in \mathbf{Z}, n < m \Leftrightarrow n+1 \leq m$.
2. La demostración de existencia se basa en la afirmación siguiente: por ser la sucesión $(bk)_{k\in \mathrm{N}}$ estrictamente creciente y no acotada, existe un primer entero k tal que $bk > a$.
2.1. Acabamos de examinar el hecho de que la sucesión aritmética $(bk)_{k\in \mathbf{N}}$ sea *estrictamente creciente*.
2.2. El hecho de que no esté acotada se desprende de que **Z** es un grupo *arquimediano*:
Θ_2. [propiedad de Eudoxo-Arquímedes] $\forall\, a \geq 0, \forall\, b > 0, \exists k \in \mathbf{N}, bk > a$.
2.3. El hecho de que exista un *primer* entero k, es decir, un *mínimo* entero k, tal que $bk > a$ resulta del hecho que el orden habitual sobre **N** es un *buen orden*:
Θ_3. [*Propiedad de buen orden*] Toda parte no vacía de **N** posee un elemento mínimo.
Sea en efecto F el conjunto de los enteros k tals que $bk > a$: sesgún Θ_2, F no es vacío; por consiguiente, según Θ_3, F tiene un primer elemento.
2.4. Observación. Se tiene: $\Theta_2 \Leftarrow \Theta_3$ [La demostración se deja al lector].

La organización matemática que debemos determinar, OM_{div}, es *a priori* una organización local (y no puntual) que puede pues contener varios tipos de tareas. Por falta de espacio, no se considerará aquí más que el tipo de tareas matemáticas siguiente:

T_q. Dados dos números enteros relativos a y b, $b > 0$, calcular el cociente q de la división a por b.

La finalidad del estudio sería entonces precisar una técnica $\hat{o}_q$ para realizar las tareas de tipo T_q -lo que no se hará aquí más que sobre un punto particular. La observación de OM_{div} en la literatura de los manuales antiguos nos muestra en efecto una "observación" hoy día tan olvidada que parece en primer lugar poco creíble, y sobre la cual nos pararemos un momento. Una primera obra indica así:

Albert Miller, *Arithmétique* (enseñanza primaria superior), Hachette, 1.923, p.84.

Teorema.- Para dividir un número por un producto de varios factores, es suficiente (si las divisiones son exactas) con dividirlo por el primer factor, dividir después el cociente obtenido por el segundo factor, y así hasta el último factor. El último cociente obtenido es el cociente buscado.
OBSERVACIÓN.- Este teorema se aplica a las divisiones con resto. Lo admitiremos sin demostración.
Así, **517**:(**5**×**7**×**4**) puede obtenerse dividendo **517** por **5**, sea **103**; **103** por **7**, sea **14**; **14** por **4**, sea **3**. El cociente de dividir **517** por **5**×**7**×**4**, es decir por **140,** es **3**.

Otros autores -¡y no los menos!- escriben incluso, a propósito del mismo teorema:

Anna y Elie Cartan, *Arithmétique* (clases de 4º y de 3º), Armand Colin, 1.934, p. 54.

92.- Observación.- Si un número no es divisible por un producto de factores, se demuestra que se puede encontrar el cociente del número por el producto aplicando la segunda parte del teorema IV (nº **91**, p 53). La regla dada en el número **78** (p. 47) es una aplicación de esta observación. Para obtener el cociente de 6783 por el producto 100×9, se puede dividir 6783 por 100, que nos da 67 como cociente, y luego 67 por 9.

¿Es eso verdad? Una justificación se impone, que otros manuales aportan, -como la *Arithmétique* de Roland Maillard y de Albert Millet para la clase de Matemáticas (Maillard y Millet 1.954, pp. 39-40). Es interesante constatar que dicha justificación se apoya sobre un resultado tecnológico que es una variante inmediata de los resultados anteriormente establecidos:

> θ_0". [*Teorema*] El cociente q de la división de a por b se caracteriza por las desigualdades:
> $$bq \leq a \text{ y } a+1 \leq b(q+1).$$

Se tiene entonces el siguiente resultado:

> θ_1. [*Teorema*] Sean dos enteros relativos a y b, $b > 0$. Si $b = b'b''$, sea q' el cociente de a por b' y q'' el cociente de q' por b''. Entonces q'' es el cociente de a por b.
> *Demostración*. Se tiene $b'q' \leq a$ y $b''q'' \leq q'$; de donde $bq'' = b'(b''q'') \leq b'q' \leq a$. Se tiene, por lo mismo, $a+1 \leq b'(q'+1)$ y $q'+1 \leq b''(q''+1)$; de donde $b(q''+1) = b'(b''(q''+1)) \geq b'(q'+1) \geq a+1$. A continuación, y según θ_0", se tiene $q = q''$.

Este desarrollo tecnológico asegura que la técnica indicada *funciona*: el cociente de 4225 entre 24 es, así, dado que $24 = 4\times6$, el de 1056 entre 6, y aún, como $6 = 2\times3$, el de 528 entre 3, es decir, 176. Pero esto no permite verdaderamente -¡aunque la cuestión sea eminentemente subjetiva!- *comprender por qué* el fenómeno en cuestión se produce. La función de *explicación*, productora de la *inteligibilidad*, debe ser puesta en marcha por otro desarrollo, como se ve aquí:

> Está claro que si a es divisible por b, entonces q se obtiene dividiendo a por b', después dividendo el cociente q' así obtenido por b''. Supongamos ahora que a sea divisible por b' con $a = b'q'$; está claro entonces -al menos se admitirá aquí- que $q = q''$, donde $q'' = [q'/b'']$ (una demostración de este punto procedería de la observación de que se tiene $a = b'q' = b'(b''q''+r'') = (b'b'')\, q''+b'r''$, con $b'r'' < b'b'' = b$) ¿Por qué entonces se puede, en el caso general, (en el que no se supone que b' divida a a) "olvidar" el resto r' de la división de a por b''? La explicación fundamentalmente se basa en dos hechos generales, de los que conviene en primer lugar persuadirse: (1) el cociente de dividir por b el entero a es también el cociente de dividir por b los enteros a-1, a-2, a-3,... a-r; no cambia el cociente si se reemplaza a por a-k, con 0 ≤€k ≤€r; (2) el resto r (en la división de a por b) es el primer entero k tal que a-k es divisible por b. Se ve entonces que, "olvidando" el resto r', se reemplaza a por $b'q' = a-r'$, el cociente final queda sin cambiar mientras que r' ≤€r (según (1)), lo que es el caso (según (2)) porque a ≤€r (= $bq = b'\, b''q$) es divisible por b'.

Una observación técnica

Aunque apenas esbozado, el ejemplo anterior muestra sobre todo que el componente tecnológico de una organización matemática cambia con los tipos de tareas y las técnicas que se espera en general producir, justificar, explicar.

2. ORGANIZACIONES DIDÁCTICAS Y MOMENTOS DEL ESTUDIO

2.1 La didáctica, dimensión de la realidad social.

Estudiar una cuestión

En la primera sección, se ha evocado una situación *problemática*, es decir, en la que se proponía realizar una tarea *problemática* -describir y analizar cierta praxeología matemática. Se han evocado también otros tipos de tareas *a priori* problemáticas -resolver una "ecuación de Bezout" por ejemplo. Se podrían multiplicar los ejemplos. Todos provienen de un mismo esquema, que se examinará rápidamente a continuación.

En el punto de partida, hay, en la vida social, una simple demanda de información, o como se dirá, *una cuestión en el sentido débil*, que toma generalmente la forma de una interrogación en el sentido gramatical del término:

> ¿Dónde se encuentra la oficina de correos?
> ¿Qué hora es ?
> ¿Cuántos años tienes?
> El tren de las 16 h 17 procedente de Marsella, ¿en qué andén para?
> ¿Cuál es nuestra longitud?
> $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$, ¿es un número irracional, no?
> ¡¿Es verdad que n^3+11n es divisible por 6 para cualquier $n \in \mathbf{N}$?!

Desde el punto de vista del interrogador, cada una de las cuestiones exige una *respuesta en el sentido débil*, bajo la forma de un enunciado aportando la información pedida: "¡Está delante de usted! [la oficina de correos]", "¡Son...las 8h 41m!", etc. La hipótesis es aquí que la persona preguntada *conoce la respuesta*, o al menos *la puede conocer fácilmente* -por ejemplo mirando su reloj, si se trata de la hora. Se señalará sin embargo que, en realidad, esta respuesta procede de la "parte emergente", visible en la vida social ordinaria, de un "iceberg praxeológico" fundido en el paisaje social, pero para cuya construcción se han necesitado a menudo siglos. Así ocurre a propósito de la hora, o de la longitud, o incluso de la edad de la persona interrogada. El juego de preguntas-respuestas *en sentido débil* se juega así en *la superficie de la sociedad y de sus instituciones*, ocultando los resortes profundos, que parece –falsamente- poderse ahorrar.

Las cosas cambian cuando la persona preguntada *no sabe responder* -porque no conoce la longitud del lugar, o porque ignora si el número $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ es irracional o no, etc. En ese momento, *se plantea un problema*. Tanto si consiste en determinar la longitud del lugar o la naturaleza, racional o no, del número $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$, la tarea que se debe realizar para responder a la cuestión propuesta ya no es "inmediata". Para realizarla, y de una manera eventualmente rutinaria (que no significa "algorítmica"), se necesita una praxeología relativa al tipo de tareas considerada.

> Así, un buen alumno de la nueva Terminal S podrá quizá escribir:
> $n^3 + 11n = n^3 - n + 12n = n(n^2-1) + 12n = (n-1)n(n+1) + 12n = 6(\mathrm{V}^3_{n+1}) + 12n = 6(\mathrm{V}^3_{n+1} + 2n)$...

Pero las cosas cambian más aún cuando la persona interrogada no dispone de ninguna técnica para realizar la tarea pedida, que resulta entonces *problemática* para ella. La pregunta se vuelve entonces una cuestión *en el sentido fuerte*: ya no es "¿Cuál es la longitud?", sino "*¿Cómo determinar* la longitud?"; ya no es "¿Es este número irracional?", sino "*¿Cómo determinar* si este número es irracional?". Se pasa así de la petición de realizar una tarea *t* a la necesidad de elaborar una técnica y, más completamente, toda una praxeología relativa a las tareas de tipo *t* -tipo que hay que construir al mismo tiempo como objeto institucional. A cuestión en sentido fuerte, respuesta en sentido fuerte: la respuesta no es ahora una simple información, *es toda una organización praxeológica que está por construir*.

En un gran número de casos, una persona o un colectivo confrontado a una dificultad del tipo anterior -elaborar una praxeología relativa a un tipo de tareas problemáticas- responde ignorándolas, o incluso, *negando* esta problematicidad, por ejemplo, *no realizando* la tarea en cuestión -“haciéndolo de otra manera”.

> He aquí un ejemplo, donde la problematicidad es de naturaleza *matemática*. Tres viajeros deben repartirse la suma de 860 francos que, a la vuelta de sus vacaciones, quedan en la caja común creada para hacer frente a los gastos cotidianos colectivos, y en la que han puesto en total, respectivamente, 1900 francos, 2100 francos, y 2200 francos. Se preguntan cómo deben repartirse la suma restante de manera que cada uno de ellos haya contribuido igualmente a los gastos colectivos. Después deciden en un tono generoso y oportuno (“¡Pero no! Tú pagaste la pizza el otro día, y yo no lo he contado...”) que un determinado reparto, realizado a ojo por “intuición”, es *grosso modo* aceptable, y se atienen a él.

En el caso contrario, la *persona x*, o más generalmente, el *colectivo X*, se va a poner a estudiar la *cuestión propuesta* (“¿Cómo determinar la longitud?”, “¿Cómo determinar si este número es irracional?”), que se puede señalar genéricamente como $ô_T$, donde T es el tipo de tareas considerado (eventualmente reducido a una única especie, t). Se constituye así lo que se denominará aquí un sistema *de estudio* o sistema *didáctico*, denominado $\Sigma = S(X;\tau_T)$ (con, eventualmente, $X = \{x\}$). En algunos casos, el colectivo X se verá *ayudado*, es decir *dirigido*, en su esfuerzo por estudiar, por un *ayudante al estudio* o un *director de estudio*, y; se denominará entonces al sistema didáctico por $\Sigma = S(X;y;ô_T)$ (o $\Sigma = S(X;Y;ô_T)$)(si hay un colectivo Y de ayudas al estudio). En todos los casos, se entra en la dimensión específica de la realidad social: la dimensión *del estudio* o *de la didáctica*, en el sentido fuerte de estos términos.

El estudio, las instituciones, la skholê

La formación, incluso efímera, de un sistema didáctico, por rudimentario que sea, interrumpe el flujo normal de la actividad institucional ordinaria. La actividad de estudio aparece en consecuencia como una fuente permanente de confusión posible en la vida de la institución, pudiendo en cualquier momento alterar el curso de las actividades normales arrastrando a algunos de sus actores hacia vías ajenas a la “razón social” de la institución -pensemos, por ejemplo, ¡en la formación continua de los profesores! Se trata de un hecho fundamental cuyas manifestaciones hay que examinar rápidamente.

Una primera consecuencia ha sido mencionada más arriba *-el rechazo de la problematicidad*, y por tanto el rechazo de lo didáctico que esta problematicidad podría engendrar. Una segunda consecuencia proviene de un fenómeno cercano, sobre el que conviene insistir: el de la *negación de la didáctica*. Las situaciones de la vida cotidiana en el seno de una institución están impregnadas de interacciones didácticas, pero resbaladizas, evanescentes, que se deslizan casi sin ruido en el flujo de la actividad ordinaria -y a las que se hace implícitamente referencia cuando se habla del *aprendizaje del día a día*, o, según la fórmula de John Dewey, del *learning by doing*, del aprendizaje por la práctica “desnuda”. Pero esta dimensión didáctica se encuentra en general no reconocida por la institución, porque, para defenderse contra una invasión siempre amenazante, se define una frontera que separa, entre todas las formas de actividad que pueden tener lugar, las que -generalmente poco numerosas y fuertemente estereotipadas- se acepta mirar como didácticas, y aquellas -mayoritarias y muy variadas- que son reputadas como *no didácticas*, y cuya didacticidad potencial se encuentra, pues, *negada*.

> Ninguna situación es *intrínsecamente* didáctica o no didáctica. Por consiguiente, negando la didacticidad *potencial* de una situación dada, imponiéndola a sus sujetos como irrebatiblemente *no didáctica*, la institución borra la posibilidad de su funcionamiento

> *adidáctico* (Brousseau, 1.996), y cierra así algunas vías de aprendizaje *a priori* posibles para los sujetos de la institución. Cada vez que estos aprendizajes aparecen como objetivamente exigidos para el buen funcionamiento de la institución, es decir, como respondiendo a las necesidades cognitivas institucionalmente generadas, se puede decir que la institución niega las *necesidades didácticas* de sus sujetos, necesidades que estos últimos deberán pues eventualmente encargarse de satisfacer, tomándolas entonces a título personal, y no como sujetos de la institución.

El adjetivo *didáctico*, asociado aquí al sustantivo *estudio* (y al verbo *estudiar*) es, en francés, una préstamo del griego *didaktikos* , "propio para *instruir*", "relativo a la enseñanza", de *didaktos*, adjetivo verbal de *didaskein*, "enseñar, hacer saber". En francés corriente, se aplica a *lo referente a la instrucción*. La idea de didáctica, la idea de estudio, es decir, fundamentalmente, la idea de hacer cualquier cosa con el fin de aprender cualquier cosa ("saber") o de aprender *a hacer* cualquier cosa ("saber-hacer"), parece en fin consustancial a las sociedades humanas. ¿Cómo, sin embargo, limitar los efectos perturbadores de la didáctica sobre la vida de las instituciones? Hay una respuesta que ha tomado en nuestras sociedades modernas una importancia extrema, al punto de que tiende a absorber en su sombra cualquier otra manera distinta de gestionar los aprendizajes: se trata de la *escuela*, o más precisamente de la *skholê* de los antiguos griegos -este *Otium Graecum*, este "ocio griego" que estigmatizaron Catón y los antiguos romanos, y que se puede definir como *el tiempo descontado sobre el tiempo del trabajo, o más allá de la vida "ordinaria", para ser consagrado al estudio.*

La fórmula es genérica, universal, y puede *a priori* aplicarse a toda institución: a su lado, pero distinta de ella, toda institución puede crear su propia *escuela*, donde podrá entregarse al estudio de cuestiones propuestas para la vida de la institución, en el marco de sistemas didácticos institucionalizados, $\Sigma_k = S(\{x_i\};\{y_j\}; P_k)$, donde los x_i serán los *alumnos*, los y_j los *profesores*, y P_k un *programa de estudio* que precisa las cuestiones que se deben de estudiar. Este proceso histórico de "escolarización" de las instituciones está hoy muy avanzado: nada o casi nada se le escapa u olvida, ¡tanto de hecho como de derecho! De la ausencia de la *skholê*, pasando por la *skholê* integrada en el flujo de la vida, se llega así a la *skholê* omnipresente, concebida y vivida como separada de la actividad cuyas praxeologías tiene, sin embargo, por misión de cuestionar, a través de su estudio.

Se observará, sin embargo que, cualquiera que sea el hábitat institucional ofrecido a lo didáctico -desde la integración vivida en lo cotidiano de la institución, hasta la escolarización en una institución escolar asociada pero distinta-, se imponen unas obligaciones que van a permitir e, incluso, imponer algunos tipos de *praxeologías didácticas* y prohibir otros tipos, mientras que, incluso en el mismo ámbito de la *skholê*, incluso en el marco de la Escuela de la República (al que se restringirá en lo sucesivo el empleo del adjetivo *escolar*), algunas prácticas didácticas, "negadas", permanecerán viables, y vivas, aunque sin ser siempre asumidas como tales. Cada institución, cada institución didáctica sobre todo, define así, en acto, al menos negativamente, su propia noción de estudio. De ahí que esta noción no pueda ser definida de manera intrínseca, universal, absoluta, más allá de la "definición" minimalista según la cual hay estudio cuando hay *cuidado, aplicación y atención* en el acceso a cualquier realidad *problemática* -la realidad "estudiada".

Estudiar una obra

Estudiar una cuestión del tipo $\hat{o}_T$, donde T es un determinado tipo de tareas, conduce

-como ocurre en principio en el mundo sabio- *a crear* una respuesta, es decir, a elaborar una organización praxeológica $O = [T/\hat{o}/\theta/\Theta]$ *inédita*. Pero, en el mundo ordinario de la *skholê*, estudiar una cuestión es casi siempre *recrear*, para sí mismo y sus compañeros de estudio, una respuesta O ya producida en cualquier otra institución. Estudiar es pues estudiar una *respuesta* -en el sentido fuerte- que se tiene por válida. Es estudiar una *obra* existente en otra parte de la sociedad, para reconstruirla, *transportarla* a la institución que sirve de hábitat al estudio. El pasaje del estudio de una cuestión al estudio de una respuesta -de una obra- no se hace sin algunas modificaciones en la noción misma de estudio.

Al comienzo, como se ha sugerido, la obra O se estudia -es decir, se reconstruye, transporta- *como* respuesta a la cuestión $\hat{o}_T$ que se plantea. Si, por ejemplo, se plantea la cuestión de la representación plana del espacio de tres dimensiones, se estudiará la *perspectiva*; si se plantea la cuestión de encriptar y de desencriptar los mensajes, se estudiará la *criptografía*; etc. Se trabaja entonces sobre obras que tienen la forma de organizaciones praxeológicas *puntuales*, es decir, constituidas alrededor de un único tipo de tareas considerado como *generador* de la obra estudiada.

Dos ejemplos de técnicas

1. Cómo demostrar, por ejemplo, que $\alpha = 4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ es irracional? Una técnica simple, cuya tecnología y teoría dejamos para el lector, consiste en formar una expresión racional de α igual a un número conocido por ser irracional. Aquí se tiene: $\alpha = 4\sqrt{3}-3\sqrt{2} \Rightarrow \alpha^2 = 66-24\sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{66-\alpha^2}{24} = \sqrt{6}$. Se concluye entonces por un pequeño razonamiento: si α fuera racional, también lo sería $\frac{66-\alpha^2}{24} = \sqrt{6}$, lo que no es cierto.

2. ¿Cómo determinar el máximo (o el mínimo) de una función sobre un intervalo? Se trata de un problema muy antiguo, que se estudiaba antaño, en el instituto, bajo el nombre *de cuestiones de máximo y mínimo*. La técnica elemental utilizada en la ausencia del cálculo infinitesimal se fundamentaba sobre el resultado tecnológico siguiente: si $x_1, x_2, ..., x_n$ son reales $\geq$ cuya suma es constante e igual a a, entonces el producto $x_1x_2...x_n$ es máximo cuando $x_1 = x_2 = ... = x_n = a/n$. Así el área de un rectángulo de perímetro $2p$, que se escribe xy, con $x+y = p$, es máxima cuando $x = y = p/2$, es decir cuando el rectángulo es un cuadrado. Por lo mismo, el área de un cercado rectangular formado con una empalizada de longitud ℓ y uno de cuyos lados es un muro, que se escribe xy con $2x+y = \ell$, es máxima al mismo tiempo que la expresión $2xy$, que alcanza su máximo cuando $2x = y = \ell/2$, es decir para $x = \ell/4$ y para $y = \ell/2$.

La agregación de obras “puntuales” en una organización *local* (*la división de los enteros*, por ejemplo) bajo una *tecnología* común θ, es decir, su integración en el seno de una organización regional (*la aritmética*, por ejemplo) regida por una misma *teoría* Θ, tiende a impulsar hacia la periferia, bajo el nombre de *aplicaciones*, a los tipos de tareas que son en principio generadores de la obra, por el hecho de que se trata de una obra abierta, cuya tecnología es potencialmente productora de tecnologías inéditas, y que no se sabría pues encerrar en algunas “aplicaciones” definidas *a priori*. La relación entre cuestión y respuesta tiende así a invertirse. Primero es la respuesta, y luego viene la cuestión. Así, en la organización OM_{div} vista anteriormente, se puede hacer figurar *o no* un desarrollo relativo a los *cocientes aproximados* (ver aquí abajo).Entonces, según el caso, OM_{div}, aparecerá *o no* como respondiendo (en el sentido fuerte) a la cuestión “¿Cómo determinar el cociente aproximado por defecto a 10^{-n} al dividir un entero a por un entero b?”

Cocientes aproximados

1. *Teorema y definición*. Dados dos enteros relativos a y b, $b > 0$, existe un único entero

relativo q tal que $b(q/10^n) \leq a < b((q+1)/10^n)$. El decimal $q_n = q \cdot 10^{-n}$ es el cociente aproximado a 10^{-n} más cercano por defecto a la división de a por b.

Demostración. La doble desigualdad $b(q/10^n) \leq a < b(q+1)/(10^n)$ equivale a $bq \leq a \cdot 10^n < b(q+1)$, lo que muestra que el entero q es el cociente de la división euclídea de $a \cdot 10^n$ por b. De donde se tiene la existencia y unicidad de q.

2. *Observación*. El cociente q de la división euclídea de a por b, que se llama también cociente *entero* de a por b, se obtiene cuando n=0. Se dice que $q(=q_o)$ es el cociente de a por b con una aproximación por defecto de *una unidad* ($=10^0$). El cociente entero es así, en general, un cociente *aproximado*: no es un cociente exacto más que si a es divisible por b.

3. *Corolario*. Para calcular el cociente q_n aproximado a 10^{-n} por defecto de la división de a por b, se calcula el cociente entero q de $a \cdot 10^n$ por b y se toma $q_n = q \cdot 10^{-n}$.

4. *Ejemplo*. Consideremos el cálculo del cociente q_2 de 743 por 56 con una aproximación de 10^{-2} (= 0.01) por defecto. Se busca el cociente entero q de 74300 entre 56, sea q = 1326. Se tiene pues q_2 = 13,26.

5...

Un paso más, y se acaba en una franca desconexión con el "corazón" teórico-tecnológico de la obra, con sus "aplicaciones" que, de *genéticamente necesarias*, llegan a ser *institucionalmente contingentes*. El estudio de la obra tiende así a crear una organización del saber que parece no existir más que por sí misma -las tecnologías no desembocan más que aleatoriamente sobre técnicas efectivas, por ejemplo-, según la lógica de todos los fetichismos culturales. Al mismo tiempo, las *razones de ser* de la obra tienden a perderse, en derecho, si no de hecho. Se navega desde ese momento entre lo estético y lo arbitrariamente cultural.

¿Cuáles son por ejemplo las razones de esta "obrita" matemática, aún estudiada hoy día en Secundaria (en 4º de la ESO sobre todo), sobre la noción de *expresión numérica con un radical*, y que permite escribir una expresión tal como $\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}$ bajo la forma $-(1+\sqrt{2})$? Sea, en una base ortonormal, los puntos A(4;2), B($3\sqrt{2}$;$\sqrt{2}$), C($1+2\sqrt{2}$;$1+\sqrt{2}$). Para comprobar que estos puntos están alineados, se pueden calcular las pendientes de las rectas (AB) y (AC), es decir, $p_{(AB)} = \frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4}$ y $p_{(AC)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}$, para determinar si estas pendientes son o no iguales. Pero, a la vista de las expresiones obtenidas, la cosa no parece fácil. Conviene pues volverlas a escribir bajo una forma *canónica*, en la que toda expresión del tipo considerado tenga una escritura y *sólo una*, lo que permite comparar dos expresiones dadas con un simple vistazo. En este caso, se obtiene $\frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3} = -1-\sqrt{2}$: las dos pendeintes son iguales y los puntos A, B, C están alineados. Notemos que, si hubiéramos calculado la pendiente de (BC), hubiéramos obtenido otra expresión distinta: $p_{(BC)} = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$. La razón de ser así identificada es genérica: dado un sistema de objetos matemáticos, es muy útil, cada vez que sea posible, dotarse de un sistema de escritura canónica de estos objetos, con la finalidad de poder comparar sin ambigüedad esos dos objetos. De esta manera, dos vectores se expresan en una misma base donde tienen una escritura única, dos puntos del plano con un mismo sistema de referencia, etc. Esta exigencia prevalece desde los primeros aprendizajes matemáticos. Las expresiones $3\times7+5\times2$ y $7\times8-5\times5$ son iguales, pero la cuestión no es evidente más que si se escriben separadamente bajo forma canónica, es decir, si se "efectúan los cálculos": $3\times7+5\times2$ =31 y $7\times8-5\times5$ =31. Por esta misma razón se aprenderá ampliamente a desarrollar y a ordenar las expresiones algebraicas, o a simplificar las fracciones: para identificarlas en un simple vistazo. Así las fracciones 168/252 y 252/378 representan un mismo número cuya escritura canónica es 2/3; pero la cuestión no es *a priori* evidente, y sólo un trabajo de "simplificación", es decir, de *reescritura canónica*, permite no pasar al lado de la verdad.

2.2 Organizaciones didácticas

Genericidad y especificidad

Las praxeologías didácticas u *organizaciones didácticas* son respuestas (en el sentido fuerte) a las cuestiones del tipo "¿Cómo estudiar la cuestión $q = \tau_T$?" o "¿Cómo estudiar la obra *O*?" -respuestas que se indicarán aquí, genéricamente, ∂q y ∂O, de manera que será, por ejemplo: $OD_\theta = \partial OM_\theta$. Precisado esto, la cuestión que se plantea es saber qué tipos de tareas constituyen una praxeología *didáctica*; o por decirlo de otra manera, qué "gestos" pueden ser mirados como *didácticos*.

La *cuestión* "¿cómo estudiar ♥?" depende evidentemente del *contenido didáctico*[5] ♥. Una *respuesta* a esta cuestión, es decir, una organización didáctica ∂♥, dependerá igualmente de ♥: a partir de cierto nivel de organización del estudio, ya no se estudia la cuestión *q* de la *perspectiva* como se estudiaría la cuestión *q'* de la *criptografía*, por ejemplo. Pero tampoco se puede decir que no haya nada en común entre una organización didáctica ∂q y otra organización didáctica $\partial q'$. De hecho, tal como se ha indicado, en una institución dada, sólo ciertos tipos de praxeologías didácticas que satisfacen determinadas restricciones, son ecológicamente viables: en consecuencia, todas las praxeologías ∂♥ cumplen estas restricciones, *sea cual sea* ♥, sin que se pueda afirmar *a priori* que estas restricciones no pesan, ecológicamente, sobre los niveles más específicos de la organización del estudio.

La distinción entre lo que sería específico de ♥ y lo que no lo sería aparece así, en la perspectiva anterior, como *relativo*. La oposición genérico-específico tiene, si se puede decir, una estructura *fractal*, que se vuelve a encontrar en los diferentes niveles de análisis de lo didáctico. Así, sea cual sea el objeto de estudio, hay una especificidad de la actividad *didáctica* entre el conjunto de actividades humanas, especificidad que, precisamente, fundamenta el *género* didáctico y, más allá, sus diferentes *especies* que, claramente, determinan los *grandes tipos de obras* -matemáticas, físicas, literarias, plásticas, etc. De ahí que el estudio *escolar* de las matemáticas no esté aislado institucionalmente: se relaciona, en un determinado nivel de generalidad, con el *conjunto* de todo lo didáctico existente en la sociedad y, en primer lugar, con lo didáctico escolar. Desde distintos puntos de vista, por supuesto, el estudio de las matemáticas posee rasgos *específicos* que lo distinguen del estudio escolar de otras disciplinas. Pero esta oposición permanece relativa: ¿qué es, de verdad, matemático?. La frontera entre lo matemático y lo no-matemático es indecisa, y en todo caso, históricamente evolutiva. Además, en un momento dado, las matemáticas, es decir, las diferentes *organizaciones* matemáticas, son a su vez diversas y, por ejemplo, no se estudiará el álgebra como se ha hecho con la geometría. Se hablará, pues, del estudio del álgebra, de la geometría, de la estadística, etc. En este descender hacia objetos de estudio cada vez *más específicos*, la oposición de lo genérico y de lo específico *se vuelve a encontrar cada vez*, aunque sin que se anulen las oposiciones de niveles superiores. Habrá así una especificidad del estudio de tal ámbito matemático, que se dejará a su vez declinar en niveles más finos de especificación, hasta llegar al nivel "molecular" de organizaciones matemáticas puntuales constituidas alrededor de un único tipo de tareas.

Por organización didáctica se entenderá pues, *a priori*, el conjunto de los tipos de

[5]"Enjeu didactique" en el original.

tareas, de técnicas, de tecnologías, etc., *movilizadas para el estudio concreto en una institución concreta*. El enfoque clásico en didáctica de las matemáticas ha ignorado en general los aspectos más *genéricos* de la organización del estudio de un tipo dado de sistemas didácticos. (Ésta es por ejemplo la actitud clásicamente adoptada, tratándose de los sistemas didácticos escolares, a propósito de la cuestión de *la evaluación*, *del trabajo fuera de clase*, de su evaluación, etc.) Por contraste, la *problemática ecológica*, que es uno de los principales motores de la TAD, conduce a examinar cuestiones que pueden situarse en un punto cualquiera del eje genericidad-especificidad, porque los problemas *específicos* del estudio de una organización matemática local particular permanecen en general mal planteados mientras no se analicen las "elecciones" didácticas, conscientes o no, hechas a niveles organizativos de *menor especificidad*. En consecuencia, el enfoque antropológico contempla aspectos de la organización del estudio generalmente vistos como relevantes de elecciones "pedagógicas", es decir "políticas", exteriores al campo de cuestionamiento de la didáctica de las matemáticas.

> Una organización didáctica ∂O comporta pues múltiples niveles de especificación, de los cuales ninguno debería ser descuidado y que dependen, en algunos aspectos al menos, de la didáctica. Así, en un primer nivel, se sitúan las condiciones y restricciones propias de un *sistema de enseñanza* y *de sus centros*, que se aplican poco o mucho a todas las materias que allí se estudian: para el sistema escolar francés, se situará aquí, sobre todo, la existencia de cursos de estudios estrictamente definidos, de programas nacionales, la distribución de alumnos de un nivel de estudios dado (6º,5º,4º, etc.) entre varias comunidades de estudio casi autónomas -las *clases* de nivel considerado-, la importancia concedida a los profesores en relación con otras posibles ayudas al estudio, la existencia de sistemas y dispositivos didácticos auxiliares (clases de verano, módulos, etc.) En un segundo nivel, se situarán los determinantes *específicos de tal materia* que figuran en tal curso de estudios: se situarán aquí, por ejemplo, las formas didácticas que tienen sentido *a priori* para el conjunto de la materia estudiada -como el tratamiento de la experimentación o de la demostración, en sus aspectos generales, en matemáticas. Del mismo modo, los niveles siguientes de especificación concernirán los aspectos propios de cada uno de los niveles de organización de la materia estudiada -global, regional, local, puntual.

El topos del alumno y la otra escena

En el marco de los sistemas didácticos *escolares* $\Sigma = S(X;y;P)$, a los que nos limitaremos en lo sucesivo, los tipos de tareas integrados en una praxeología matemática son, tradicionalmente, realizados por un individuo solo. El alumno $x \in X$ debe aprender a factorizar, *solo*, sin la ayuda de otro, algunos tipos de expresiones algebraicas; a calcular, *por sus propios medios*, la suma de fracciones 4/7 + 8/21, etc. En cambio, no tiene que aprenderlo solo: oficialmente él recibe para ello, al menos, la ayuda del profesor y.

Las tareas didácticas, en efecto, son, en cierto número de contextos, *cooperativas*, en el sentido que deben ser realizadas en concierto por *varias* personas $x_1, x_2, ..., x_n$, que son los *actores* de la tarea. Se dirá que cada uno de los actores x_i debe en este caso efectuar algunos *gestos*, cuyo conjunto constituye entonces su *papel* en el cumplimiento de la tarea cooperativa t, gestos que están a su vez diferenciados (según los actores) y coordinados entre ellos por la técnica ô puesta en marcha colectivamente. Algunos de estos gestos serán vistos como tareas completas, t', para cuya realización x_i actuará (momentáneamente) en *autonomía relativa* en relación a los otros actores de la tarea. El conjunto de estas tareas, subconjunto del papel de x_i cuando *se realiza t* según ô, es denominado el *topos* de x_i en t.

> El griego *topos* significa "lugar": el *topos* de x_i es el "lugar de x_i", su "sitio", el lugar donde, psicológicamente, x_i experimenta la sensación de desempeñar, en la realización de t, "un papel a gusto para él". En el caso de una clase, se hablará así del *topos* del alumno y del *topos* del profesor. De esta manera, mientras una clase de matemáticas "hace un ejercicio", lo que es una tarea eminentemente cooperativa, la subtarea consistente en construir el enunciado del ejercicio recae generalmente en el profesor: pertenece a su *topos*. La tarea consistente en producir -por ejemplo por escrito- una solución del ejercicio pertenece al *topos* del alumno, mientras que la tarea consistente, a continuación, en construir una corrección, pertenece de nuevo al *topos* del profesor. Si, en el curso de la resolución del ejercicio, un alumno plantea una pregunta al profesor, efectúa también lo que está visto ordinariamente como un simple gesto, que reclama un gesto homólogo por parte del profesor -gesto que puede consistir, algunas veces, en... negarse a responder.

Una de las dificultades didácticas más comunes y más presentes para un profesor es la que encuentra para "dar un lugar a los alumnos", es decir para crear, según su intención, y a propósito de cada uno de los temas estudiados, un *topos* apropiado, que dé al alumno el sentimiento de tener un "verdadero papel que desempañar". Así, en lo que se puede llamar la enseñanza-espectáculo, que algunas modas pedagógicas han podido potenciar en los últimos decenios, los alumnos son incitados a intervenir frecuentemente, pero no intervienen en general más que como figurantes sin un verdadero papel. En la mayor parte de los casos, sin embargo, una tarea didáctica tiene como actores el profesor y los alumnos: cuando el profesor actúa en una tarea donde él opera en autonomía relativa, esta tarea aparece generalmente como una sub-tarea en el seno de una tarea más amplia, donde él coopera con el alumno. El estudio del sistema de las tareas y gestos del profesor y, más generalmente, de cualquier otra ayuda al estudio (padres, etc.), no se debe realizar de manera aislada: detrás de la actividad del profesor, se debe percibir sin cesar la actividad del alumno.

Un punto esencial de esta visión consiste en examinar, en toda organización didáctica escolar, la *calidad* y la *cantidad* del trabajo autónomo exigido a los alumnos x_i (para asegurar un buen rendimiento en términos de aprendizaje) y que es *invisible* (oficialmente) para el profesor y.(Existe también, por supuesto, todo un trabajo exigido por y e invisible para x, que cuenta por igual en la viabilidad de una organización didáctica...) Sucede a veces que este trabajo invisible, cumplido por el alumno en *otra escena*, que el profesor puede en principio ignorar, tiende a ocupar lo esencial del espacio de estudio, como en el ejemplo que aparece a continuación.

> **El estudio y la clase: el curso H, un caso extremo**
>
> ...a los cinco años, fui inscrito en el curso H. Este establecimiento debía su reputación a un dispositivo muy particular, que comportaba varios elementos. Ignoro si, en el espíritu de sus creadores -quizá valdría mejor decir, de sus ingenieros-, los diversos elementos del dispositivo eran deliberadamente combinados. Para mí, lo fueron, y lo siguen siendo.
> 1. Sólo nos convocaban una vez por semana, por la mañana, para una sesión de dos horas.
> 2. Al final de la sesión, nos entregaban un breve documento mimografiado, llamado la "hoja", que prescribía con una impecable precisión los deberes, ejercicios, lecciones, lecturas que debíamos hacer en casa durante el intervalo, guiados, supervisados, instruidos por nuestras repetidoras o, para los menos afortunados, por nuestras madres.
> 3. Las madres y las repetidoras asistían al curso, separadas de los alumnos por una delgada barrera. No estaban autorizadas a intervenir pero a veces se manifestaban ruidosamente por los suspiros, las exclamaciones, quejosas o indignadas, ante nuestros desfallecimientos, nuestros despistes [...].
> 4. Una misma institutriz, -para nosotros, Mlle. Haussoye- nos regentaba desde la undécima clase a la séptima inclusive.

> 5 Durante el curso, nada nos era enseñado (es por ello por que me resisto a llamarlo curso). Lo que aprendíamos, lo aprendíamos en casa, con la condición de seguir al pie de la letra las prescripciones de la "hoja". La sesión semanal era en realidad un examen e incluso una especie de oposición. Éramos en efecto clasificados al final de cada sesión [...]. Nos separábamos después de la entrega de los resultados para volvernos a ver la semana siguiente. Nuestros amigos se reclutaban en otra parte. Allí no teníamos más que competidores.
>
> J.B. Pontalis, *L'amour des commencements*, Gallimard, Paris, 1.994, pp. 11-12.

Por regla general, sin embargo, el espacio del estudio tiende desde hace tres decenios a restringirse -en principio- a la escena oficial de la clase. Es sin embargo mediante el trabajo *oculto*, invisible, que responde a las necesidades de estudio generadas por el trabajo en clase sin ser asumidas por la organización didáctica oficial, por el que se crean o se refuerzan, silenciosamente, las desigualdades de éxito entre los alumnos. Lo recordaremos, más adelante, a la hora de evaluar una organización didáctica.

El problema del *topos* del alumno comporta un aspecto en cierto sentido inverso al anterior. El alumno puede ser su propio director de estudio, *y lo es necesariamente en algunas cosas*. Por el contrario, no sabría enseñarse a sí mismo, desde el principio, lo que precisamente él debe aún "aprender": entre el alumno y el profesor, la separación es clara. La consecuencia de este estado de hecho no debe ser subestimada: si la aparición del profesor-director del estudio puede empobrecer la cultura *didáctica* del alumno-estudiante, el mal uso de la función de enseñanza conduce más radicalmente a invalidar *el aprendizaje matemático en sí mismo*.

> Hay una situación de la que Guy Brousseau ha señalado con fuerza el carácter eminentemente problemático: el contrato didáctico, observa él, "coloca al profesor delante de una verdadera conminación paradójica. Todo lo que él hace para conseguir del alumno los comportamientos que él espera tienden a privar a este último de las condiciones necesarias para la comprensión y el aprendizaje de la noción que se persigue: si el maestro dice lo que quiere, no lo puede obtener (primera paradoja didáctica). Pero el alumno está también delante de una conminación paradójica: si él acepta que, según el contrato, el maestro le enseñe los resultados, él no los establece por sí mismo, y, así, no aprende las matemáticas, no se las apropia. Aprender implica para él rechazar el contrato pero también aceptar hacerse cargo de él. El aprendizaje va pues a reposar, no sobre el buen funcionamiento del contrato, sino sobre sus *rupturas*".

El alumno debe aceptar al profesor como director del estudio y, al mismo tiempo, renunciar casi violentamente a las engañosas facilidades que le ofrece como profesor -y esto, en principio, a propósito de *cada uno* de los momentos del estudio, evaluación e institucionalización comprendidos. El "drama didáctico" que la palabra *topos* resume se anuda así alrededor del juego del maestro: siempre sutilmente presente, aunque *en ausencia*, éste debe saberse ausentar incluso *en presencia*, a fin de dejar al alumno libre para conquistar una independencia que la figura tutelar del profesor hace a la vez posible e incierta.

Los momentos didácticos

Como toda organización praxeológica, una organización didáctica se articula en tipos de tareas (generalmente cooperativas), en técnicas, en tecnologías, en teorías. ¿Pero cómo describir tal organización? ¿Cuáles son por ejemplo los principales tipos de tareas? No hay que esperar que la (re)construcción, en el curso de un proceso de estudio, de una organización matemática dada se organice ella misma de una manera única. Pero se constata sin embargo que, cualquiera que sea el camino de estudio, ciertos *tipos de situaciones* están necesariamente presentes, incluso si lo están de manera muy variable, tanto en el plano cualitativo como en el plano cuantitativo. Llamaremos a estos tipos de situaciones *momentos de estudio* o *momentos didácticos* porque se puede decir que, sea cual sea el camino seguido, se *llega forzosamente a un momento* donde tal o cual "gesto del estudio" deberá ser cumplido: donde por ejemplo, el alumno deberá "fijar" los elementos elaborados (momento de la institucionalización); donde deberá preguntarse "qué vale" lo que se ha construido hasta entonces (momento de la evaluación); etc.

> La noción de momento no remite más que en apariencia a la estructura temporal del proceso de estudio. Un momento, en el sentido dado a la palabra aquí, es en primer lugar una *dimensión* en un espacio multidimensional, un *factor* en un proceso multifactorial. Bien entendido, una sana gestión del estudio exige que cada uno de los momentos didácticos se realice en *el buen momento*, o más exactamente, en *los buenos momentos*: pues un momento de estudio se realiza generalmente *en varias veces*, bajo la forma de una multiplicidad de episodios que prorrumpen en el tiempo. En esta visión, se indicará que el orden puesto, después, sobre los diferentes momentos didácticos es de hecho ampliamente arbitrario, porque los momentos didácticos son en primer lugar una realidad *funcional* del estudio, antes de ser una realidad cronológica.

El *primer momento* del estudio es el del *primer encuentro* con la organización O que está en juego. Un tal encuentro puede tener lugar de varias maneras, pero un modo de encuentro -o de "reencuentro"- inevitable, a menos que uno se quede en la superficie de la obra O, es el que consiste en encontrar O a través de al menos uno de los tipos de tareas T_i constitutivas de O. Este "primer encuentro" con el tipo de tareas T_i puede tener lugar *en varias veces*, en función sobre todo de los entornos matemáticos y didácticos en los que se produce: se puede *volver a descubrir* un tipo de tareas como se vuelve a descubrir una persona que se creía conocer.

1. ¿Qué es lo que se encuentra en un primer encuentro con una organización matemática O? La cuestión de la identidad del *objeto* así encontrado por primera vez merece examinarse. Si existen en efecto primeros encuentros *anunciados* -"Mañana comenzaremos el coseno de un ángulo agudo", indica por ejemplo el profesor- existen también, en el otro extremo, primeros encuentros verdaderos que, sin embargo, pasan casi enteramente *desapercibidos* porque, en la institución donde se producen, el objeto encontrado es en cierta manera un personaje de segundo, incluso a veces de tercer rango, que sólo se encuentra porque está en estrecha relación con el objeto verdadero del encuentro. Esta observación nos conduce pues a distinguir el punto de vista del *organizador del estudio* -ya se trate del alumno, del profesor o del ingeniero didáctico- y el punto de vista del *observador*. Para el primero, sólo *algunos* objetos requieren una puesta en escena introductoria, mientras los otros se introducen sin previos, como silenciosamente, en la organización matemática que se construye. Para el segundo, la cuestión del primer encuentro se podrá plantear a propósito de *cada uno* de los objetos que se introducen en la organización matemática en construcción, y ello por ejemplo en una perspectiva de reorganización curricular, con la intención de otorgar mayor relieve a un objeto culturalmente y didácticamente secundario que se desea "promocionar".

2. ¿Cuáles son las *formas posibles* del primer encuentro? Cuando está expresamente organizado, parece que apenas aparecen más de dos grandes formas, cuyas múltiples combinaciones, en sus variantes desarrolladas o, al contrario, degradadas, agotarían entonces el espacio de lo posible. El primer encuentro puede inscribirse en una problemática *cultural-mimética*. En este caso, mediante una narración con valor de informe a partir de una indagación sobre el mundo, el objeto encontrado aparece en primer lugar como existiendo *por otra parte*, en algunas prácticas sociales. A este submomento "cultural", donde el objeto no existe más que *en efigie*, de manera que el estudiante sólo tiene con él relaciones *ficticias*, le sigue un submomento "mimético"

donde, mediante la manipulación *efectiva* del objeto, se supone que estudiante imita la práctica -“jugando” por ejemplo, al matemático, al geógrafo, al crítico literario, etc.

3. En la versión más exigente, el encuentro cultural-mimético conduce en principio a buscar y explicitar -bajo el modo discursivo- las *razones de ser* de los objetos así encontrados, es decir, los motivos por los que este objeto ha sido construido o aquellos por los que, al menos, persiste en la cultura. Pero las “razones de las cosas” no afloran siempre claramente en la cultura. Por ello el encuentro cultural-mimético puede degradarse en una parodia de la práctica, que oculta las *razones* de la práctica.

4. Por reacción, y en el lado opuesto, se puede querer descartar toda referencia a una realidad preexistente que se trataría de reproducir imitándola, en beneficio de una realidad *sui géneris*, identificada para un sistema de situaciones llamadas *fundamentales* (que se pueden denominar *umbilicales*), cuyo actor principal, si no único, es el alumno, solo o en equipo, y que hacen nacer el objeto, ante sus ojos, como aquello que permite fabricar una *respuesta* a una serie de *cuestiones* determinadas. El encuentro *en situación* conduce así a proponer, *de hecho,* y quizá incluso *de derecho*, una “definición” del objeto encontrado que no quiere reducirse a una simple copia de las definiciones depositadas en la cultura, sino que, en muchos casos, aparece *a priori* como un verdadero *añadido a la cultura* -añadido del que conviene entonces mostrar la compatibilidad con las definiciones conocidas, en la medida en que, al menos, esta “definición en situación” no esté *ya* integrada en el patrimonio cultural.

5. Como ocurre con el encuentro cultural-mimético, el encuentro en situación incluye también un submomento *cultural* -cuya forma más espectacular es el efecto Jourdain.[6] Es preciso, en efecto, que toda situación de primer encuentro efectivo sea una situación “umbilical”. En muchos casos, la definición del objeto por un sistema de situaciones fundamentales se encuentra subrepticiamente descartada en beneficio de una puesta en escena del objeto en unas “actividades“ que, a pesar de algunos rasgos culturales conservados, no tienen más que una relación bastante alejada con sus razones de ser más esenciales. De una manera más general, existe en las prácticas didácticas corrientes una amplia gama de formas híbridas de primeros encuentros, donde una referencia cultural incompletamente asumida se alía en grados variables con una introducción “en situación” más o menos adecuada en los planos epistemológico y cognitivo.

6. Se señalará por fin que si, como es evidente, el primer encuentro no determina enteramente la relación al objeto -el cual se construye y se modifica a lo largo del proceso de estudio-, sí juega sin embargo un papel importante en la economía del aprendizaje, porque, dado el coste institucional y personal que impone (en el doble plano cognitivo y de deseo), orienta en general fuertemente el desarrollo ulterior de las relaciones institucional y personal al objeto encontrado.

El *segundo momento* es el de la *exploración* del tipo de tareas T_i y de la *elaboración* de una *técnica* τ_i relativa a este tipo de tareas. Se señalará que, contra cierta visión heroica de la actividad matemática, que la presenta como una serie errática de enfrentamientos singulares con dificultades siempre nuevas, lo que está en el corazón de la actividad matemática es más la *elaboración de técnicas* que no la resolución de problemas aislados. A la ilusión moderna del alumno-héroe que supera sin necesidad de lucha toda dificultad posible, se opone también la realidad indispensable del alumno-artesano laborioso que, con sus condiscípulos, bajo la conducción reflexiva del profesor, elabora pacientemente sus

---

[6]Guy Brousseau introdujo, dentro de los llamados “efectos del contrato didáctico” (Brousseau, 1998), el efecto Jourdain para referirse a aquellas situaciones didácticas en las que “el alumno consigue la respuesta correcta mediante un conocimiento banal y el profesor da fe del valor de la actividad mediante un discurso matemático y epistemológico sabio”. En la obra de Molière *Le bourgeois gentilhomme*, el profesor descubre al alumno Sr. Jourdain que éste habla en prosa. *N. de los T.*

técnicas matemáticas. En realidad, el estudio y la resolución de un problema de un tipo determinado va siempre a la par con la constitución de al menos un embrión de técnica, a partir del cual una técnica más desarrollada podrá eventualmente emerger: el estudio de un problema *particular,* espécimen de un tipo estudiado, aparecería así, no como un fin en sí mismo, sino como un *medio* para la constitución de una técnica de resolución. Se trama así una dialéctica fundamental: estudiar problemas es un medio que permite crear y poner en marcha una técnica relativa a los problemas del mismo tipo, técnica que será a continuación el medio para resolver de manera casi rutinaria los problemas de este tipo.

El *tercer momento* del estudio es el de la *constitución del entorno tecnológico-teórico* [θ/Θ] relativo a $\hat{o}_i$. De una manera general, este momento está en interrelación estrecha con *cada uno* de los otros momentos. Así, desde el primer encuentro con un tipo de tareas, hay generalmente una puesta en relación con un entorno tecnológico-teórico anteriormente elaborado, o con gérmenes de un entorno por crear, que se precisará en una relación dialéctica con la emergencia de la técnica. Por razones de economía didáctica global, a veces las estrategias de dirección de estudio tradicionales hacen en general de este tercer momento la *primera* etapa del estudio, etapa que es entonces común al estudio de *varios* tipos de problemas T_i -todos los que, entre los tipos de problemas a estudiar, aparecen como relativos al mismo entorno tecnológico-teórico [θ/Θ]. El estudio de estos tipos de problemas se presenta entonces, clásicamente, como una serie de *aplicaciones* del bloque tecnológico-teórico así puesto en marcha.

El *cuarto momento* es el del *trabajo de la técnica*, que debe a la vez mejorar la técnica volviéndola más eficaz y más fiable (lo que exige generalmente retocar la tecnología elaborada hasta entonces), y acrecentar la maestría que se tiene de ella: este momento de puesta a prueba de la técnica supone en particular uno o unos corpus de tareas adecuados tanto cualitativamente como cuantitativamente.

La técnica utilizada más arriba para determinar el máximo de una función algebraica elemental no ha sido trabajada más que sobre *dos* especímenes. Un trabajo más avanzado es necesario, aunque sea solamente para explorar el *alcance* de esta técnica -¿ no será que sólo funciona precisamente para esos dos especímenes? Consideremos así el problema siguiente: *determinar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un círculo de radio r*. Si x es la medida de uno de los lados del rectángulo, el otro lado tiene por medida $y = \sqrt{(2r)^2 - x^2}$, y el área del rectángulo se escribe xy. Este área es máxima al mismo tiempo que la expresión $(xy)^2$, que es igual a $x^2 \cdot (4r^2 - x^2)$, expresión que alcanza su máximo cuando $x^2 = 4r^2 - x^2 = 2r^2$, *i.e.* para $x = y = r\sqrt{2}$. Como se verá más adelante, se puede extender el alcance de esta técnica para resolver, por ejemplo, el problema siguiente: *En un rectángulo de cartón de 50 cm por 80 cm, se quiere construir una caja sin tapadera, recortando en cada uno de los rincones un cuadrado de lado x cm. Determinar x para que la caja obtenida tenga una capacidad máxima*.

El *quinto momento* es el de la institucionalización, que tiene por objeto precisar lo que es “exactamente” la organización matemática elaborada, distinguiendo claramente, por una parte, los elementos que, habiendo concurrido a su construcción, no le hayan sido integrados y, por otra parte, los elementos que entrarán de manera definitiva en la organización matemática considerada -distinción que buscan precisar los alumnos cuando le preguntan al profesor, a propósito de tal resultado o tal procedimiento, si hay o no “que saberlo”.

1. Los otros momentos del estudio, en efecto, sólo nos libran una organización matemática *en obras*, donde el trabajo realizado, que se quiere duradero, se mezcla necesariamente con los “relieves” de una construcción elaborada por ensayos, retoques, paradas y

avances. Ahora bien, lo que merece durar, lo que quiere ser perenne no se impone nunca por sí mismo y con toda seguridad. Tal ejemplo, cuyo examen ha servido para el proyecto de construcción, revelando unas perspectivas a priori desconocidas, tal estado de tal técnica, que se habrá empleado mucho tiempo para rebasarla, tal teorema, en sí mismo insuficiente pero que fue el primer resultado *demostrado*, ¿se integrarán en la organización matemática definitiva, o bien se descartarán? El momento de la institucionalización es pues, en primer lugar, el que, en la construcción en "bruto" que poco a poco, ha emergido del estudio, van a separar, por un movimiento que compromete el porvenir, lo "matemáticamente necesario", que será conservado, y lo "matemáticamente contingente" que, pronto, será olvidado. En este submomento de *oficialización*, una praxeología matemática separada ya de la historia singular que la hizo nacer, hace su entrada en la cultura de la institución que ha albergado su génesis.

2. Es necesario sin embargo que esta entrada en la cultura determine completamente el devenir institucional de la praxeología matemática así oficializada. En un segundo submomento, el de la institucionalización *strictus sensu*, los objetos y las relaciones *oficiales*, ingredientes declarados de la organización en construcción, van a ser activados en grados diversos y, por ello, van a "trabajar". Algunos objetos raros, oficializados en buena y debida manera, no tendrán de hecho, una vida ulterior. (Así, al principio del Libro I de los Elementos, Euclides introduce la noción de romboide, que no será utilizada en el resto de la obra). Pero esa no es la ley general: el "roce institucional" provoca normalmente la evolución de las relaciones oficiales hacia formas estables no degeneradas, las relaciones *institucionales* que, aunque se constituyen solidariamente con las relaciones *personales* de los actores del estudio, parecen pronto emanciparse hasta el punto de parecer gobernarlas.

3. Normalmente, es la fase de institucionalización la que *relanza el estudio* contribuyendo a poner en evidencia tal o cual tipo de problema que, aunque relevante de la organización matemática local $[T_i/\hat{o}_i/\theta/\Theta]$, no ha sido todavía estudiado o no lo ha sido más que insuficientemente. De una manera más general, el estudio completo de O puede ser descrito así. Sean T_1, ..., T_n la serie de tipos de problemas asociados a la tecnología θ, supuestamente estudiados *en este orden*. Para todo i, $1 \leq i \leq n$, una organización puntual $[T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i]$ (constituida alrededor del tipo de problemas T_i) se construye y viene a integrarse a la organización *local* ya elaborada parcialmente, $[T_j/\tau_j/\theta^{(j)}/\Theta^{(j)}]_{1 \leq j \leq i-1}$, para producir la organización local $[T_j/\tau_j/\theta^{(j)}/\Theta^{(j)}]_{1 \leq j \leq i}$. Cuando $i = n$, se debe tener $[T_j/\tau_j/\theta^{(j)}/\Theta^{(j)}]_{1 \leq j \leq n} = [T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{1 \leq i \leq n}$, es decir, la organización matemática local "aludida". Ésta, a su vez, deberá integrarse en la organización *global* construida en ese momento. El proceso de estudio va así cada vez a "reabrir" la organización matemática existente, para modificarla enriqueciéndola, simplificándola, etc.

El *sexto momento* es el de la *evaluación*, que se articula con el momento de la institucionalización: la suposición de relaciones institucionales transcendentes a las personas, en efecto, fundamenta razonablemente el proyecto de evaluar las relaciones *personales* refiriéndolas a la *norma* que el momento de la institucionalización habrá "hipostasiado". En la práctica, se llega a un momento en el que se debe "hacer balance": porque este momento de reflexividad donde, cualquiera que sea el criterio y el juez, se examina lo que *vale* lo que se ha aprendido, este momento de verificación que, a pesar de los recuerdos de infancia, no es en absoluto invención de la Escuela, participa de hecho de la "respiración" misma de toda actividad humana.

La operación de evaluación debe ser entendida así en un sentido más amplio: detrás de la evaluación clásica de relaciones *personales*, es decir, detrás de la evaluación de "las personas", se perfila la evaluación de la *norma misma* –de la relación institucional que sirve de patrón. ¿Cuánto vale, de hecho, la organización matemática que se ha construido e institucionalizado? Más allá de la interrogación sobre el dominio, por cualquier persona, de tal o cual técnica, encontramos entonces la interrogación sobre la *técnica en sí misma* -¿es

> potente, manejable, segura, robusta también? Esta evaluación -a la que los usos escolares conceden, es verdad, una muy pequeña parte- es aquí formadora, no de una persona, sino de una praxeología: desde este punto de vista, participa de la institucionalización. Como elemento reformador, permite relanzar el estudio, suscitar la reposición de tal o cual momento, y quizá del conjunto del trayecto didáctico.

Una observación técnica

El modelo de los momentos del estudio tiene, para el profesor, dos grandes tipos de empleos. En primer lugar, constituye una rejilla para el análisis de los procesos didácticos. Después, permite plantear claramente el problema de la *realización* de los diferentes momentos del estudio. Por ejemplo, ¿cómo realizar concretamente el primer encuentro con tal organización matemática? ¿Con tal tipo de tareas? ¿Cómo conducir el estudio exploratorio de un tipo de tareas dado? ¿Cómo llevar a cabo la institucionalización? ¿Cómo realizar el momento de la evaluación? Son cuestiones que se plantean al profesor y a las que se puede responder con una fórmula genérica: *creando las situaciones didácticas adecuadas*. Esta exigencia, que sólo indicamos aquí, es de hecho tanto más compleja cuanto que el profesor es a la vez el *director* y el *actor* de situaciones didácticas de las que, las más de las veces, es además el *diseñador*.

3. EVALUAR, DESARROLLAR: ALGUNAS OBSERVACIONES

3.1. Evaluar

Un esquema universal, un gesto fundamental

En numerosas situaciones, tenemos que operar según el esquema de cuatro tiempos ($T_1 \to T_2 \to T_3 \to T_4$) indicado más arriba. Frente a la obligación de actuar, en efecto, comenzamos en general por *observar* y *analizar* (T_1 y T_2) la manera de hacer de cualquier otro. (“Y ellos, ¿qué hacen? ¿Cómo lo hacen exactamente?”) Después evaluamos lo que la observación y el análisis han revelado (¿Para qué sirve todo eso, al fin y al cabo?...”) antes de *desarrollar* nuestra propia “solución”, intentando mejorar, sobre ciertos puntos juzgados negativamente, la “solución” observada. Así actúa, muy banalmente, un profesor cualquiera cada vez que, reponiendo su obra sobre la materia, se decide a “observar” uno o varios manuales (de manera más o menos sistemática), a “analizar” (quizá superficialmente) su contenido, a “evaluar” (de manera a veces poco matizada) este contenido, por fin a “desarrollar” (a veces rápidamente) sobre esta base, su propio “producto”, su “lección”.

Es de señalar que el esquema anterior se aplica igual de bien al profesor que toma por objeto *o*, no algún “modelo” para “preparar su clase”, sino las soluciones producidas por sus alumnos, soluciones que, a su vez, el profesor observará (exigiendo por ejemplo que cada alumno le remita una “copia”), que él analizará (corrigiendo sus copias), que él evaluará (por la nota atribuida y las anotaciones llevadas sobre la copia), antes de desarrollar su propia solución (bajo la forma de una “corrección” presentada a los alumnos de forma oral o escrita). Un poco de reflexión muestra aún que, en la fabricación de su “solución”, cada alumno habrá puesto en marcha el mismo esquema a cuatro tiempos, observando (en clase y en el manual) algunas “maneras de hacer”, analizándolas pero también *evaluándolas* (por ejemplo rechazando tal elemento -manera de decir, etc.- que verá como un “truco del profesor" que él no puede asumir, valorando al contrario tal elemento que él considerará -quizá equivocadamente- como emblemático de lo que del profesor espera de él, etc.), antes y con el fin de "desarrollar" su propia solución. A fin de cuentas, se le reconocerá al esquema propuesto, en el marco del enfoque antropológico, un valor universal: en una forma más o menos desarrollada, cualquiera que proyecte una acción lo vuelve a encontrar espontáneamente.

En este esquema de acción, la etapa de la evaluación *constituye un gesto fundamental*, que requiere algunas observaciones muy generales. Señalemos en primer lugar que la evaluación de la que estamos hablando aquí no debe ser considerada como la evaluación escolar, tal como la asume el profesor al analizar la producción de los alumnos. Lo verdadero es de hecho lo contrario: es mejor considerar la evaluación escolar como una especificación de la noción genérica de la evaluación. ¿Pero qué es entonces esta noción "genérica"? Estimar el *valor* de un objeto *o*, atribuirle un valor (de una manera o de otra), en resumen, *evaluar* es una actividad que, *a priori*, puede afectar a *cualquier objeto*, puede ser el hecho de *cualquiera* -de cualquiera que tenga "un poco de juicio"-, puede realizarse en cualquier *institución* -aunque sea verdad que todas las combinaciones de un objeto *o*, de una persona *x* y de una institución *I* no estén necesariamente "permitidas". Se señalará sobre todo que la vida de una institución resulta frecuentemente plagada de actos de evaluación, hasta el punto de que estas prácticas, en parte "salvajes", se consideran a veces como una auténtica molestia, cuya importancia debe ser controlada.

> Algunos filósofos antiguos -como Pyrron (365-275 antes de C.) del que Montaigne se hará discípulo- han hecho del *rechazo de juzgar* el fundamento de la vida feliz: ".. los juicios que los hombres llevan sobre el valor de tal o cual cosa no están fundamentados más que sobre convenciones. De hecho, es imposible saber si tal cosa es, en sí, buena o mala. Y la desdicha de los hombres viene en efecto de que quieren obtener lo que creen ser un bien o huir de lo que creen ser un mal". (Hadot, 1.995, p. 176)

Si no es cuestión evidentemente de adoptar una problemática del rechazo de juzgar, es sin embargo siempre necesario reflexionar sobre el buen uso de la *suspensión de juicio* -la *epoché* de los estoicos. En particular, el análisis (y, antes del mismo, la observación) no debe llevar, subrepticiamente, a la evaluación. Es verdad, sin duda, que el estado de suspensión de juicio constituye normalmente el fondo de toda vía institucional, sobre el que se eleva entonces el susurro de los juicios de valor. Pero repitamos aquí que hay que saber asignar un tiempo -el de la observación y análisis- a la suspensión del juicio; y un tiempo propio -el de la evaluación- a la necesidad casi vital de juzgar.

Ante esta necesidad, lo importante es entonces recordar que la actividad de evaluación es siempre y necesariamente, *relativa*. El valor reconocido a un objeto, en efecto, no es nunca intrínseco, absoluto, porque la atribución de valor se refiere siempre, implícitamente o no, a cierto *uso social* del objeto evaluado: se evalúa siempre desde *un determinado punto de vista*.

> Como indica un diccionario de psicología en lengua inglesa (Reber, 1.995), el valor es "la calidad o propiedad de una cosa que la hace útil, deseada o estimada". El autor añade entonces: "Se indica el aspecto pragmático implicado en esta definición: el valor de una cosa es dado por su papel en una transacción (social), la cosa por sí misma no posee valor".

Es desde esta perspectiva que consideraremos aquí el problema más específico de la evaluación -en una clase *I*, por un alumno *x*, o un profesor *y*, o un observador *z*- de un objeto *o* que será una *organización matemática* OM_θ, o una *organización didáctica* OD_θ, asociadas a cierto tema de estudio matemático θ. Para simplificar y clarificar el propósito, nos limitaremos a considerar el caso de la evaluación *a priori*, por un profesor *y*, de organizaciones matemáticas y didácticas OM_θ y OD_θ previamente observadas en la literatura (manuales, etc.) y analizadas por *y* con la intención de desarrollar en su clase unas organizaciones "a su aire", OM'_θ y OD'_θ.

Evaluar los tipos de tareas

Nos referimos aquí a una organización ya sea *puntual* (de la forma $[T/\tau/\theta/\Theta]$), ya sea *local* (de la forma $[T_i/\hat{o}_i/\theta/\Theta]$). En todos los casos, ya sea cuando el tema de estudio impuesto θ se identifica con cierto tipo de tareas matemáticas *T* (organización puntual), o cuando remite al "núcleo generador" de un bloque tecnológico-teórico (organización local), la evaluación se apoyará sobre criterios explícitos, por precisar y justificar, cuyo análisis previo deberá permitir decir en qué medida los satisface la organización matemática que se va a evaluar. En función de las consideraciones anteriores, y a título de ejemplo, se mencionará aquí la siguiente lista evidentemente no exhaustiva:

- *criterio de identificación*: los tipos de tareas *T*, ¿están claramente *despejados* y bien identificados? En particular, ¿están representadas por los corpus K_i efectivamente disponibles de especímenes suficientemente numerosos y adecuadamente calibrados? ¿O, al contrario, no son conocidos más que por algunos especímenes poco representativos?

- *criterio de las razones de ser*: las *razones de ser* de los tipos de tareas T_i ,¿están explicitadas? ¿O al contrario, estos tipos de tareas aparecen desmotivados?

- *criterio de pertinencia*: los tipos de tareas considerados ¿proporcionan una buena muestra de las situaciones matemáticas encontradas? ¿Son pertinentes en la visión de las necesidades matemáticas de los alumnos, para hoy en día? ¿Para mañana? ¿O al contrario aparecen como "aisladas" sin relación verdadera -o explícita- con el resto de la actividad (matemática y extramatemática) de los alumnos?

Para ilustrar el tercer criterio, consideremos un *género* de tareas –*comprobar un cálculo*- cuya pertinencia parece genéricamente evidente, pero cuya concreción bajo la forma de *tipos de tareas determinadas* es en general mal puesta en práctica en el currículum secundario francés.

1. Un tipo de tareas que se puede considerar al respecto es la relativa al tema θ_i de las escrituras fraccionarias: *comprobar el resultado de un cálculo de fracciones* -como por ejemplo la igualdad 7/9 + 4/6 = 13/9. En este caso, una técnica puede consistir en comprobar, *con la ayuda de una calculadora*, la igualdad del producto de cada uno de los dos miembros de la igualdad obtenida mediante el producto de los denominadores de las fracciones: así, se tendrá: $(9\times6)\ (7/9+4/6) =_c 78$ y $(9\times6)13/9 =_c 78$

2. Un segundo tipo de tareas consiste *en comprobar el resultado de un cálculo algebraico* -por ejemplo la igualdad $(x\text{-}3)(2x+1) = 2x^2 - 5x - 3$. En este caso se puede verificar la igualdad obtenida, a mano o mentalmente, para dos valores sencillos de *x* (0, ± 1, ± 2, etc.); se puede también, con ayuda de una calculadora, verificar la igualdad para $x = \pi$ o $x = \sqrt{2}$, etc. Se obtiene así: $(x-3)(2x+1)_{|x=0} = -3$ y $2x^2-5x-3_{|x=0} = -3$; $(x-3)(2x+1)_{|x=3} = 0$ y $2x^2-5x-3_{|x=3} = 18-15-3$; $(x-3)(2x+1)_{|x=\pi} =_c 1{,}031245534$ y $2x^2-5x-3_{|x=\pi} =_c 1{,}031245534$. Otra técnica consiste en escoger un valor *c* para *x*, y reemplazar algunos valores de *x* por este valor, antes de resolver la ecuación así obtenida para verificar si admite la solución

$x = c$. Así se tendrá, para x=4, $2x + 1 = 29 - 5x \Leftrightarrow 7x = 28 \Leftrightarrow x = 4$; para x=2, $-2(x+1) = 5 - 5x \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$.

3. Un tercer tipo de tareas consiste en verificar el resultado de un cálculo con radical -como la igualdad $\frac{(3+\sqrt{5})^2}{3-\sqrt{5}} = 18+8\sqrt{5}$. Se puede aquí sustituir el radical $\sqrt{c}$ por x y resolver la ecuación obtenida para comprobar que admite la solución $x = \sqrt{c}$. Se tiene así: $\frac{(3+x)^2}{3-x} = 18+8x \Leftrightarrow (3+x)^2 = (3-x)(18+8x) \Leftrightarrow x^2+6x+9 = -8x^2+6x+54 \Leftrightarrow 9x^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

Evaluar las técnicas

La evaluación de las técnicas supone los mismos criterios, de los que sólo evocaremos uno aquí. Así, las técnicas propuestas ¿se elaboran efectivamente, o solamente se bosquejan? ¿Son fáciles de utilizar? ¿Su *alcance* es satisfactorio? ¿Su *fiabilidad* es aceptable dadas unas condiciones de empleo? ¿Son suficientemente inteligibles? ¿Tienen futuro y pueden evolucionar de manera conveniente? Daremos ahora, tratando estos criterios, algunos ejemplos ilustrativos.

1. Una técnica propuesta puede *ser insuficientemente* trabajada y *puesta a punto*, de manera que, no sólo su alcance sea indudablemente limitado, sino que su *inteligibilidad* se vea oscurecida. Intentemos así poner en marcha la técnica de optimización elemental vista anteriormente (a propósito del problema siguiente: Determinar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un círculo de radio r) sobre el problema siguiente: *En un rectángulo de cartón de 50 cm por 80 cm, se quiere construir una caja sin tapadera, recortando en cada uno de los rincones un cuadrado de lado x cm; determinar x para que la caja obtenida tenga una capacidad V máxima*. Esta técnica conduce aquí a la constatación siguiente: $V = (50-2x)(80-2x)x$ máximo $\Leftrightarrow 4V = (50-2x)(80-2x)(4x)$ máximo $\Leftrightarrow 50-2x = 80-2x = 4x = 130/3$. La igualdad imposible $50-2x = 80-2x$ parece indicar que no tiene solución. ¿Dónde está el fallo?...

2. Una técnica puede ser insuficientemente fiable. Así el cálculo, tradicional en Francia, *no sobre las cantidades de magnitud* (como 5 km, 32 cm^2, 18 m/s^2, 12 g/dm^3, etc.) sino sólo sobre las *medidas de estas magnitudes* (5, 32, 18, 12, etc.), es decir, excluyendo las unidades del cálculo para volverlas a introducir solamente al final, constituye una técnica poco fiable, si se la compara con la técnica, sin duda más “pesada”, consistente en calcular directamente sobre las cantidades, es decir, con las unidades. Así, para calcular la masa lineal M en g/cm de una barra de acero de sección constante, de 4 dm de longitud y de masa 2,85 kg; se tiene: $M = \frac{2{,}85\ \text{kg}}{4\ \text{dm}} = \frac{2{,}85\ (10^3\ \text{g})}{4\ (10\ \text{cm})} = \frac{285\ \text{g}}{4\ \text{cm}} = \frac{285}{4}\ \text{g/cm} = 71{,}25\ \text{g/cm}$. Del mismo modo, para determinar la masa M, en gramos, de 9 cm^3 de zinc, sabiendo que la densidad del zinc es de 7,29 kg/dm^3; se tiene : $M = (7{,}29\ \text{kg/dm}^3)(9\ \text{cm}^3) = (7{,}29\text{kg}\cdot\text{dm}^{-3})(9\text{cm}^3) = 7{,}29(10^3\text{g})(10\text{cm})^{-3}(9\text{cm}^3) = 7{,}29\cdot 9\ \text{g} \approx 65{,}6\ \text{g}$.

3. Se pueden citar otros casos para ilustrar el carácter defectuoso de ciertas técnicas puestas en manos de los alumnos, que revelan sobre todo la ausencia de técnicas adecuadas, a veces perfectamente disponibles “en teoría”, (o más bien, “en tecnología”) pero que la tradición de la enseñanza ignora. En geometría elemental, así, los resultados (disponibles hoy en el último curso de la Secundaria Obligatoria)[7] que expresan el hecho de que el plano de puntos es un espacio vectorial de dimensión 2, no son empleados para fabricar una técnica de uso más fiable, fundada en la noción de representación del plano. A título de ejemplo, consideremos el problema siguiente: *Sea un triángulo ABC y sean I, J, K, los puntos medios de [BC], [CA] y [AB]. ¿Es verdad que los segmentos [AI], [JK] se cortan*

[7] 15-16 años. *N. de los T.*

siempre en el punto medio?

Llamemos M el punto medio de [AI] y N el de [JK], y expresemos $\overrightarrow{AM}$ y $\overrightarrow{AN}$ en el sistema de referencia $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Se tiene: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Por lo tanto : M = N. Se notará que una variante ("baricéntrica") de esta técnica haría ganar en fiabilidad además de aliviar los cálculos. Se puede, en efecto, escribir, por un lado:

$$M = \frac{1}{2}(A+I) = \frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{2}(B+C)\right) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C,$$

y por otro: $$N = \frac{1}{2}(J+K) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(C+A) + \frac{1}{2}(A+B)\right) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C.$$

De donde M = N. Podemos ir aún más allá escribiendo ("vectorialmente"):

$4(M–N) = 2(A+I)–2(J+K) = 2A+2I–2J–2K = 2A+(B+C)–(C+A)–(A+B) = 0$: de donde…

4. Algunas de las técnicas anteriores tienen más porvenir que otras, porque satisfacen más las necesidades matemáticas de los alumnos, para hoy y, llegado el caso, para mañana. De manera parecida, la técnica del principiante que consiste "en poner flechas" para desarrollar una expresión como $(x\text{-}3)(2x+1)$ no tiene apenas porvenir, a menos, en todo caso, que la técnica consistiese en "plantear" $y = 2x+1$ y en escribir $(x\text{-}3)(2x+1) = (x\text{-}3)y = xy\text{-}3y = x(2x+1)\text{-}3(2x+1) = 2x^2+x\text{-}(6x+3) = 2x^2\text{-}5x\text{-}3$. Incluso si, en efecto, llegará (en principio) rápidamente a ser inútil recurrir a una y otra técnica en los tipos de cálculo revisados aquí, la segunda técnica, en efecto, es la que se empleará cada vez que un cálculo sea localmente demasiado complejo.

Evaluar tecnologías

Se pueden hacer observaciones análogas a las anteriores a propósito del bloque tecnológico-teórico. Así, dado un enunciado, ¿se *plantea* únicamente el problema de su justificación? ¿O bien se considera tácitamente este enunciado como evidente, natural, o incluso bien conocido ("folclórico")? Las formas de justificación utilizadas, ¿son parecidas a las formas canónicas en matemáticas? ¿Se adaptan a sus condiciones de utilización? ¿Se favorecen las justificaciones *explicativas*? ¿Se explotan efectivamente y de forma óptima los resultados tecnológicos disponibles? Daremos algunos ejemplos.

1. Un resultado efectivamente utilizado puede ni siquiera haber sido objeto de una pregunta. El caso es frecuente tratándose de la unicidad de las escrituras canónicas utilizadas, por ejemplo, cuando se debe escribir bajo la forma $u+v\sqrt{e}$ una expresión del tipo $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}}$ (donde $a, b, c, d, u, v \in \mathbf{Q}$ y donde $e \in \mathbf{N}$ no es un cuadrado perfecto). La unicidad es, aquí, como en otros casos, pragmáticamente implicada por el "postulado pedagógico" según el cual existe *una* buena respuesta -lo que justifica por sí solo que el profesor rechace como necesariamente errónea la respuesta del alumno que ha obtenido *alguna otra expresión*. En el caso evocado, la justificación es de hecho relativamente poco costosa: si $u+v\sqrt{e} = s+t\sqrt{e}$ y si $v \neq t$, entonces $\sqrt{e} = \frac{u-s}{t-v} \in \mathbf{Q}$, etc.

2. La justificación de un "teorema en acto" en clase[8] puede además poner en juego unos elementos tecnológicos, no sólo disponibles, sino que están también en el corazón mismo de las matemáticas

[8]La noción de "teorema en acto" refiere a propiedades o relaciones matemáticas que los alumnos no encuentran bajo su forma matemática real pero que manejan implícitamente en la resolución de problemas. Ver, para más detalles, Vergnaud (1982) o (1994). N. de los T.

estudiadas. Ése es el caso del “postulado implícito” según el cual, para cualesquiera a, b, c, $d \in \mathbf{Q}$ y $e \in \mathbf{N}$ que no sea un cuadrado perfecto, *existen* x, $y \in \mathbf{Q}$ tales que $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}} = x+y\sqrt{e}$. Tenemos aquí: $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}} = x+y\sqrt{e} \Leftrightarrow a+b\sqrt{e} = (c+d\sqrt{e})(x+y\sqrt{e}) \Leftrightarrow cx + dey = a$ y $dx+cy = b$. El sistema obtenido tiene determinante $c^2-d^2e \neq 0$. El sistema posee pues una solución (x,y). Como en el caso anterior, la clave de la demostración radica en el hecho que $\sqrt{e} \notin \mathbf{Q}$ –un hecho al que se deberá por lo tanto hacer un (pequeño) lugar en la clase...

3. El resultado tecnológico evocado anteriormente -la existencia y la unicidad de una determinada escritura canónica- no tiene por única función la de justificar las prácticas existentes. Puede explotarse para producir nuevas técnicas. Se puede así considerar el problema de determinar la escritura canónica de una expresión de la forma $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}}$ por la técnica utilizada aquí: $\frac{(3+\sqrt{5})^2}{3-\sqrt{5}} = x+y\sqrt{5} \Leftrightarrow (3+\sqrt{5})^2 = (3-\sqrt{5})(x+y\sqrt{5}) \Leftrightarrow 14+6\sqrt{5} = (3x-5y) + (-x+3y)\sqrt{5} \Leftarrow 3x-5y = 14$ y $-x+3y = 6 \Leftrightarrow x = 18$ e $y = 8$.

Cuestiones análogas deberán plantearse por supuesto a propósito de los elementos teóricos de la organización matemática examinada: ¿Existen elementos teóricos explícitos? ¿Implícitos? ¿Qué permiten aclarar? ¿Justificar? Etc.

¿Evaluar una organización didáctica?

La cuestión de la evaluación de una organización didáctica OD_θ constituye un punto de convergencia del conjunto de estudios en didáctica de las matemáticas, al mismo tiempo que es, de manera explícita o implícita, uno de los motores del progreso de las investigaciones didácticas. Un tratamiento incluso resumido de esta cuestión requeriría un amplio desarrollo, que no puede encontrar lugar en el marco de este artículo: otro artículo sería más que necesario. A falta de proponer algo mejor, se dejará pues al lector inspirarse en algunos desarrollos consagrados más arriba al análisis de una organización didáctica (existencia de un *topos* para el alumno, puesta en marcha de diferentes momentos del estudio, etc.).

3.2 Desarrollar

Más todavía sin duda que en la etapa de la evaluación, la cuestión del *desarrollo* debe situarse en una prolongación del trabajo condensado en las anotaciones que preceden. Acerca de esta cuestión, nos contentaremos con enunciar aquí dos principios “teóricos” susceptibles de aclarar el trabajo tecnológico-teórico posterior.

El primer principio es el de la *heterogeneidad histórica e institucional* de los “materiales” constitutivos de una praxeología existente o por construir. Desde este punto de vista, no existe por ejemplo una organización didáctica que se pueda decir que es de una *época*, totalmente *fechada*, o, en el otro extremo, completamente *moderna* en cada una de sus componentes. Las actividades de desarrollo deben tomar en cuenta la necesidad de un “mestizaje histórico” de toda producción posible; toda “innovación” es parcialmente conservadora, dado que utiliza nuevamente -de manera a veces inédita- los materiales antiguos que de otro modo se podrían tildar de “obsoletos”.

Como señala Michel Serres, ninguna creación es verdaderamente de *tal* época: “Considerad un coche de un modelo reciente: forma un agregado disparatado de soluciones científicas y técnicas de años diferentes; se puede datar pieza a pieza: tal órgano fue inventado al principio de siglo, el otro hace diez años y el ciclo de Carnot tiene cerca de doscientos años. Sin contar que la rueda se remonta al neolítico. El conjunto no es contemporáneo más que por el montaje, el diseño, la preparación, a veces sólo por la vanidad de la publicidad". (Serres, 1.992, p. 72)

Esta observación se aplica evidentemente a las organizaciones matemáticas -tal resultado data de fin del siglo XVII, tal otro no aparece públicamente hasta 1.821, tal otro no se ha demostrado hasta 1.965, etc. Pero el penacho histórico es más evidente aún tratándose de la didáctica: la solución de ayer, que ha sido hoy olvidada, será mañana quizá parcialmente retomada, en una combinación nueva, innovadora. En consecuencia, las actividades de desarrollo deben, en la materia, reposar sobre una *investigación cualitativamente amplia*, tanto en *diacronía* como en *sincronía*, investigación a la que el desarrollo reciente de los medios de comunicación y de información avanzados pueden dar hoy un nuevo vigor.

El segundo principio que se enunciará aquí introduce la noción de *desarrollo próximo*, refiriéndose con ello a la *problemática ecológica* constitutiva del enfoque antropológico en didáctica. De una manera general, la problemática ecológica -¿Por qué esto?¿Por qué esto otro?, etc.- conduce a cuestionar la realidad observable de la evidencia del hecho establecido, visto como natural. La ilusión de "naturalidad" del orden institucional es, en el registro de la acción, la raíz de muchos conservadurismos y el precursor de muchas impotencias: si las cosas son como son porque se conforman a un orden natural, toda modificación que se le quiera imprimir aparece como una subversión de este orden del mundo, lo que justifica tanto el conformismo de lo cotidiano que es el premio de la mayoría, como la religión de lo excepcional de la que algunos se hacen los grandes sacerdotes.

Por contraste, el cuestionamiento ecológico permite interrogarse sobre el orden de cosas existente: si es verdad que, en general, la realidad es como es porque tiene fuertes restricciones, siempre se puede proponer examinar las modificaciones que, *para un costo aceptable*, por ejemplo, dejando intacto lo esencial de las condiciones prevalecientes, podría crear *un nuevo estado estable*, considerado más apropiado. El conjunto de estos estados "próximos" (y viables) de la realidad constituye *la zona de desarrollo próximo* de esta realidad.

La problemática ecológica aparece así como el fundamento de un *arte de lo posible*. La realidad observada puede ser de hecho inestable, débilmente robusta, y no perdurar porque ciertas condiciones raramente realizadas se encuentran localmente satisfechas. A la inversa, lo "simplemente posible" puede a veces acaecer y persistir, por un cambio limitado en las condiciones prevalecientes. Al lado, pues, de estados ecológicos muy improbables, existe toda una zona donde lo virtual puede actualizarse y lo actual volverse virtual en un grado de variaciones de escasa amplitud. Configuraciones sólo imaginadas pueden ser mañana una trivialidad de lo cotidiano, mientras que otras, desde siempre inscritas en el paisaje institucional familiar, pueden en un momento desaparecer sin retorno. De ahí que se borre la frontera entre lo existente y lo posible, y que se abra una zona bastante amplia donde se pase, sin discontinuidad marcada, de lo virtual a lo real, y a la inversa –una zona "de desarrollo próximo" que es en sí misma una invitación a trabajar.

Agradecimiento.

Los traductores agradecen a la Dra. Dª . Marianna Bosch Casabò la revisión de la traducción.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage.
Brousseau, G. (1996): *Les déséquilibres des systèmes didactiques*. Sevilla: en prensa.
Cartan, A. y Cartan, E. (1974): *Arithmétique* (Classes de 4º y 3º). Paris: Armand Colin.
Chevallard Y. (1997): "Familière et problématique, la figure du professeur", *Recherches en didactique des mathématiques*, 17 (3), 17-54.
Chevallard, Y, Bosch, M. et Gascon, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.
Hadot, P (1995): *Qu'est-ce que la philosophie antique?* Paris: Gallimard.
Maillard, R et Millet A. (1954): *Arithmétique* (classe de Mathématiques), Paris: Hachette.
Millet, A. (1902): *La science et l'hypothèse* (1.968): Paris: Flammarion.
Pontalis, J-B (1994): *L'amour des commencements,* Paris: Gallimard.
Reber, A. S. (1985): *The Penguin Dictionary of Psychology*. New York: Penguin Books.
Serres, M. (1992): *Éclaircissements* (entrevistas con B. Latour), Paris: François Bourin.
Vergnaud, G. (1982): Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: Some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics*, 3,2, 31–41.
Vergnaud, G. (1994):Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel, en Artigue, M. *et al.* (eds.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*. Grenoble: La Pensée Sauvage.