

SECUENCIA DIDÁCTICA

FUNCIÓN CUADRÁTICA ECUACION DE SEGUNDO GRADO

Destinatarios: estudiantes de 3^{er} año de la Escuela Secundaria.

Eje: En Relación con las Funciones y el Álgebra.

Fundamentación

En los NAP de Matemática del Campo de Formación General del Ciclo Orientado (Resolución N°180/12 del CFE) se establece un trabajo de modelización de situaciones extra e intramatemáticas mediante funciones cuadráticas y, en consecuencia, los aprendizajes suponen: a) trabajar las nociones de dependencia y variabilidad, b) seleccionar el tipo de representación (tablas, fórmulas, gráficos cartesianos realizados con recursos tecnológicos) adecuado a la situación, la determinación del dominio, codominio, intervalos de crecimiento, máximos o mínimos, y puntos de intersección con los ejes si los hubiere. En este sentido, la utilización de las netbooks entregadas por el Programa Conectar Igualdad es fundamental, ya que cuentan con el software de distribución gratuita de geometría dinámica, GeoGebra, que permite no sólo interpretar mejor la información que brindan los gráficos, sino también, vincular las variaciones de dichos gráficos con las de las fórmulas y establecer la incidencia de tales variaciones en las características de las funciones.

Por otra parte, las funciones cuadráticas también permiten “conectar” a la Matemática con distintos campos del conocimiento como la Física, la Economía, la Biología, etc. y modelizar -como mencionamos al comienzo- situaciones intramatemáticas como las referidas a la Geometría. Desde el punto de vista de la Didáctica de la Matemática, es fundamental la resolución de situaciones didácticas en las que se propicien espacios de tratamiento y conversión de registros de representaciones tales como lenguaje natural y lenguaje algebraico, expresiones equivalentes, representaciones de la variación cuadrática en tablas, gráficos cartesianos y expresiones analíticas de la función. También permiten el trabajo con expresiones algebraicas enteras desde las propiedades de los números reales (cuadrado de un binomio, factor común, diferencia de cuadrados) para el análisis de la equivalencia de las expresiones analíticas de las funciones cuadráticas.

Capacidades

- Modelización de situaciones extra e intramatemáticas vinculadas con funciones cuadráticas.
- Resolución de problemas seleccionando la representación adecuada a la situación.
- Valoración y uso de los recursos tecnológicos para la exploración y formulación de conjeturas, para la resolución de problemas y para el control de resultados.
- Confianza en las propias posibilidades para resolver problemas y formularse interrogantes, reconociendo que con dedicación, trabajo y estudio la Matemática es accesible para todos
- Disposición para defender sus propios puntos de vista, considerar ideas y opiniones de otros, debatirlas y elaborar conclusiones, aceptando que los errores son propios de todo proceso de aprendizaje.

Objetivos

Que los estudiantes:

- Modelicen situaciones extra e intramatemáticas y reconozcan a este proceso como un aspecto esencial de la práctica matemática.
- Interpreten variables, reconozcan dependencia entre variables, dominio, codominio, crecimiento y decrecimiento, puntos de intersección de las gráficas con los ejes x e y.
- Utilicen el Geogebra para explorar e interpretar el comportamiento de las funciones de acuerdo con diferentes variaciones en sus correspondientes fórmulas, tablas y gráficos.
- Confíen en sus propias posibilidades para resolver problemas.
- Debatan, elaboren estrategias y conjeturas y las validen en un trabajo colaborativo.

Tarea

Modelización de situaciones en las que intervienen funciones cuadráticas

Actividad 1

Observación para el docente: En esta primera actividad se pretende que los estudiantes imaginen una situación real y produzcan una fórmula (lineal en este caso) para resolver el problema.

Problema 1. Parte A.

Don Simón, dueño del campo, desea construir un camino de 300 metros de largo que comunique la casa con un camino vecinal. Todavía no decide el ancho que tendrá, ya que debe pagar a peones para que hagan la limpieza previa y éstos le cobran en función del área a limpiar. ¿Lo ayudamos?



Llamaremos “ x ” al ancho del camino y “ A ” al área que se debe limpiar.

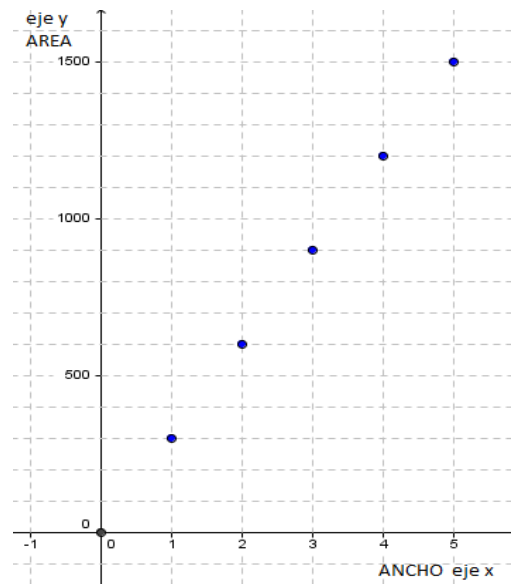
- ¿Cómo sabrá Don Simón el área A que tendrá el camino?
- Calculá los valores de A cuando x es 0, 1, 2, 3, 4 y 5.
- Escribí los valores en una tabla. (los estudiantes deben completar la parte que está en rojo)

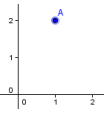
Ancho	Área
0	0
1	300
2	600
3	900
4	1200
5	1500

En Geogebra:


-Ubicá los puntos $(x; A)$ de la tabla.

Para ello se pueden escribir las coordenadas de cada punto desde la “Línea de Entrada”.



Como ejemplo, escribí (1,2) : . El Geogebra devuelve 

Si no se ven los puntos en la pantalla, puede ocurrir que los ejes tengan una escala inadecuada.

Activá la Herramienta “Desplaza Vista Gráfica” . Hacé clic sobre el eje y, sin soltarlo, desplazate. Podrás observar cómo varía la escala. Hacé lo mismo con el eje x. Repetí el procedimiento hasta que puedan verse en la pantalla los puntos que solicita el problema.

Problema 1. Parte B.

Si Don Simón sólo puede pagar la limpieza de 1000 metros cuadrados:

- Averiguá el ancho x del camino. Marcá en la gráfica.
- ¿Y si pudiera pagar sólo 500 metros cuadrados? Marcá en la gráfica.
- ¿Cuántos puntos más se pueden dibujar en la gráfica?
- ¿De qué depende la cantidad de puntos?
- ¿Se puede trazar una línea continua que represente la relación entre las variables?
- ¿Qué tipo de línea se forma?
- Es posible que para un ancho de 2,5 m. el área a limpiar sea 800?

Actividad 2

Observación para el docente: En esta segunda actividad se pretende que los estudiantes imaginen una situación real a fin de producir una fórmula (cuadrática en este caso) para resolver el problema.

Problema 2

Don Simón ahora quiere instalar un boyero (alambre electrificado a batería) para que sus vacas puedan pastar en un solo sector y no se escapen. Para ello, dispone de 140 metros de alambre. Quiere que el sector sea rectangular y desea saber cuánto deben medir los lados para que el área a cubrir sea máxima. ¿Lo ayudamos?



- Construí una tabla de valores donde se especifiquen diferentes medidas de la base y la altura del rectángulo teniendo en cuenta que su perímetro debe ser necesariamente 140 m. y calculá el Área para cada caso.

Observación para el docente: Se sugiere empezar utilizando medidas con bases que varíen su longitud de 10 en 10m.

Por ejemplo, podría resultar:

(los estudiantes deben completar la parte que está en rojo)


Base	Altura	Perímetro	Área
10	60	140	600
20	50	140	1000
30	40	140	1200
40	30	140	1200
50	20	140	1000
60	10	140	600

- ¿Qué tienen en común los rectángulos encontrados? ¿Qué tienen de diferente?
- ¿Cuántos rectángulos tienen la misma área?
- ¿Podemos decirle a Don Simón las medidas del rectángulo de mayor área que puede formar con sus 140 m. de alambre?
- ¿Ese valor de área existe? ¿Es único?
- Si la base midiera 80, ¿se puede construir otros rectángulos que cumplan las condiciones del problema?
- ¿Existe un valor máximo que pueda tomar la base del rectángulo? ¿Y un mínimo?

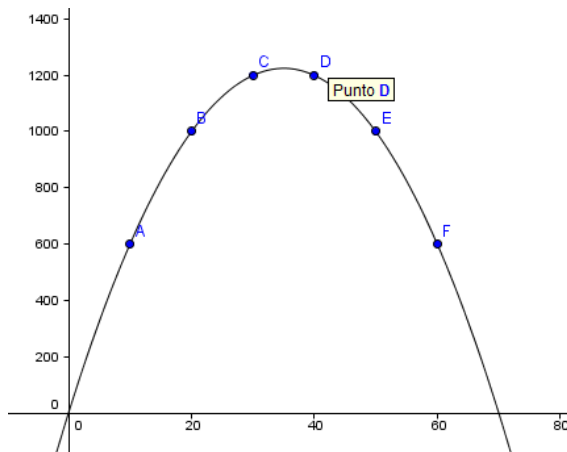
En una Hoja de Papel:

- Dibujá un Plano Cartesiano.
- Representá los puntos (x ; A) de la tabla y unilos con una línea.
- ¿Qué tipo de línea se forma?
- ¿Cómo es la gráfica entre los valores 30 y 40 de x?
- ¿Hay un punto máximo en el área?

En Geogebra:

- Ubicá los puntos (x ; A) de la tabla, introduciendo cada par de valores desde la “Línea de Entrada”.
- Utilizá la herramienta “Cónica por 5 puntos” .
- Hacé clic en cinco de los puntos graficados.

La gráfica debería ser similar a la siguiente:



- ¿Qué tipo de línea se forma?
- Ahora, ¿cómo es la gráfica entre los valores 30 y 40?
- ¿Hay un punto máximo?
- ¿Se pueden agregar valores a nuestra tabla para poder encontrar a que valor de x le corresponde ese máximo? ¿Cuáles?

La curva dibujada se denomina **parábola** y en este caso, representa la relación funcional entre dos variables. Esta función tiene intervalos de crecimiento y de decrecimiento, posee máximo o mínimo, su gráfica tiene un eje de simetría y un vértice, y puede tener puntos de intersección con los ejes.

Observación para el docente: En este punto es recomendable analizar los conceptos de *vértice* y *raíces*.

Actividad 3

Observación para el docente: En esta tercera actividad se pretende que los estudiantes construyan la fórmula de la función cuadrática para resolver el problema. En este caso, utilizaremos la ecuación explícita.

Problema 3

Don Simón quiere comenzar a utilizar su campo como un destino de Turismo Rural para que la gente de la ciudad pueda conocer los animales, las instalaciones, cómo se trabaja, qué se produce, etc. Estima que si cobra \$50 por persona, podría recibir unas 100 personas por mes. Además, cree que por cada \$1 que baje al precio, recibiría 5 personas más.



- Completá la tabla y calculá el ingreso de dinero en función del número de bajadas de precio (los estudiantes deben completar la parte que está en rojo).

Pesos de descuento	0	1	2	X
Precio	50	50 - 1	50 - 2	50 - x
Nro de Turistas	100	100 + 5.1	100 + 5.2	100 + 5.x
Ingresos	50.100	(50- 1).(100 + 5.1)	(50- 2).(100 + 5.2)	(50- x).(100 + 5.x)

- Escribí la fórmula que permita calcular el dinero obtenido en función de las bajadas de precio.

La fórmula sería la siguiente: $y = - 5.x^2 + 150.x + 5000$

Donde x es el número de pesos de descuento para el precio de la entrada

- ¿Cuánto recaudaría si baja \$5 del precio? ¿Y si baja \$30?
- ¿Cuánto debería rebajar para que la recaudación sea la máxima posible?
- ¿Podría recaudar 0 pesos?
- Construí el gráfico correspondiente a la situación en GeoGebra, ingresando la fórmula en la Barra de Entrada.

Recordá que si no se ve la gráfica en la pantalla, se debe activar la Herramienta




“Desplaza Vista Gráfica” y hacer clic sobre los ejes, uno por vez. Sin soltarlo, desplazarse de modo que vaya cambiando la escala hasta que puedan verse en la pantalla los puntos involucrados en el problema.

Observación para el docente: Se sugiere retomar, reforzar, profundizar, etc. los conceptos de crecimiento y decrecimiento, eje de simetría, vértice, intersección con los ejes, dominio y codominio, etc.

Para generalizar la forma de la fórmula trabajada, se sugiere introducir el concepto de función cuadrática:

Una **función cuadrática** es toda función que puede escribirse de la forma $f(x) = a x^2 + b x + c$, donde **a**, **b** y **c** son números cualesquiera, con la condición de que **a** sea distinto de 0.

- Abrí un nuevo archivo de GeoGebra. Con la herramienta “deslizador”  y haciendo clic sobre la Vista Gráfica, creá 3 deslizadores, para cada una de las variables **a**, **b** y **c**. (por defecto el GeoGebra establece los valores mínimo y máximo -5 y 5, respectivamente, como límites de cada variable y 0,1 para la variación de cada uno de sus valores. Se pueden modificar según el criterio del docente.
- Escribí en la línea de entrada la expresión $f(x) = a x^2 + b x + c$. La gráfica de la parábola se corresponderá con los valores iniciales de las variables **a**, **b** y **c**.
- Hacé clic en el punto del deslizador “a” y movelo de izquierda a derecha. Anotá qué relación existe entre su valor y la forma de la gráfica. Hacé lo mismo con los valores de **b** y **c**. Anotá qué efecto produce la variación de cada coeficiente en el gráfico.

Observación para el docente: Para trabajar con el Eje de Simetría, el Vértice y las Raíces (o ceros) de la función se sugiere introducir las fórmulas:

Ecuación del eje de Simetría:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Fórmulas para hallar las coordenadas del Vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad y_v = f(x_v)$$

Fórmula para hallar las Raíces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dada una ecuación cuadrática cualquiera, por ejemplo: $y = 2x^2 - 3x - 1$

- Reescribí la fórmula a fin de que la parábola esté 2 unidades hacia arriba.
- Reescribí la fórmula a fin de que la parábola esté 3 unidades hacia abajo.
- Reescribí la fórmula a fin de que la parábola tenga las "ramas hacia arriba".
- Reescribí la fórmula a fin de que la parábola tenga las "ramas hacia abajo".
- Reescribí la fórmula a fin de que la parábola tenga las "ramas más juntas".
- Reescribí la fórmula a fin de que la parábola tenga las "ramas más abiertas".
- Reescribí la fórmula a fin de que la parábola tenga las ramas hacia abajo, muy abiertas y que esté desplazada 4 unidades hacia arriba.
- Comprobá los casos anteriores en el Geogebra.

Actividad 4

En esta cuarta actividad, se pretende que los estudiantes analicen una fórmula cuadrática. En este caso tiene la forma de la expresión canónica.

Problema 4

Carlos, el hijo de Don Simón, es un ingeniero agrónomo recién recibido y pretende asesorar a los productores de campos vecinos. Para decidir cuánto debería cobrar por hora de trabajo, le pidió ayuda a un amigo economista. Su amigo, teniendo en cuenta los costos fijos que tendría Carlos y la relación entre el precio por hora y la cantidad de trabajo, le presentó la siguiente fórmula que permite calcular la ganancia mensual en función del precio por hora trabajada:



$$G(p) = 3200 - 2(p - 80)^2$$

- Si Carlos cobra \$56 la hora, ¿cuánto ganaría en el mes?
- Y si quisiera aumentar la ganancia, ¿cuánto podría cobrar por hora?
- ¿Habrá otro valor del precio por hora que también le permita ganar \$2.048? ¿Cuál?
- ¿Es posible obtener una ganancia de \$1.400? ¿y de 3.500?
- ¿Cuál es la máxima ganancia que Carlos puede obtener? ¿Qué precio debería cobrar por hora trabajada para obtener la máxima ganancia?
- ¿Para qué valores la ganancia es 0?
- Construí una tabla de valores.

En Geogebra:

- En la línea de entrada, escribí la ecuación y graficá.

Observación para el docente: La idea es que los estudiantes puedan:

- ▶ trabajar con una función cuadrática contextualizada y analizar los valores en relación con dicho contexto.
- ▶ reconocer que no siempre que se aumenta el precio por hora trabajada, se puede ganar más. Este modelo matemático responde a una situación concreta, pero nada dice si conviene trabajar más horas o menos horas para ganar lo mismo. También permite analizar el sentido de ganar 0, porqué se puede no ganar y recordar que los factores implicados en la fórmula son múltiples.
- ▶ Relacionar los parámetros de la ecuación con algún punto de la gráfica (por ejemplo, el vértice). El docente puede inducir a los estudiantes a “detectar” el par de valores de x que se corresponden con cada valor de y . Además de observar su distancia respecto del valor de x que hace máxima la función, se puede apreciar la simetría de la función.

Para obtener los ceros de la función, el profesor debería inducir a sus estudiantes a despejar p cuando $G(p) = 0$ ó acompañar a sus estudiantes en el tratamiento de la ecuación

$$G(p) = 3200 - 2(p - 80)^2$$

Así, se verifica:

$$3200 - 2(p - 80)^2 = 0$$

$$-2(p - 80)^2 = -3200$$

$$(p - 80)^2 = -3200 / -2$$

$$p - 80 = \sqrt[2]{1600}$$

$$p = 40 + 80 \quad \text{ó} \quad p = -40 + 80$$

$$p = 120 \quad \text{ó} \quad p = 40$$

Lo siguiente es trabajar sobre fórmulas no contextualizadas (problemas intramatemáticos)

Dada la siguiente función: $f(x) = 2(x-1)^2 - 3$

- Determiná $f(1) = \dots$ $f(-2) = \dots$ $f(0) = \dots$
- Además de $x=-1$, ¿hay otro valor con el cual $f(x)=5$?
- ¿Cuáles son los valores del dominio para los cuales su imagen es $f(x) = 29$?
- ¿Hay más valores del dominio que compartan una misma imagen $f(x)$?
- ¿Todos los valores del dominio tienen dos imágenes?
- ¿Es posible obtener como imagen $f(x) = -4$?
- ¿Cuáles el mínimo valor de $f(x)$? a que valor del dominio le corresponde?
- ¿Cuál es el máximo valor de $f(x)$? a que valor del dominio le corresponde?
- ¿Existe algún valor del dominio para el cual la imagen $f(x) = 0$?

En Geogebra:

- Graficá la función.
- Trazá el eje de simetría
- Ubicá el vértice y relacioná sus coordenadas con los parámetros de la fórmula.
- Ubicá los puntos del dominio que hacen 0 a la función.

Para generalizar

La ecuación canónica de una parábola de eje vertical y vértice $(u ; v)$ tiene la forma

$$y = a (x - u)^2 + v$$

En Geogebra:

- Creá 3 deslizadores para las variables **a, u, v**.
- Escribí en la barra de entrada la expresión **$y = a (x - u)^2 + v$**
- Hacé clic en el punto de cada deslizador y, sin soltar, movelo para hacer variar los valores de **a, u, v**. Luego, anotá qué efecto produce la variación de cada parámetro en el gráfico.
-

Observación para el docente: Se sugiere generalizar una fórmula que permita obtener los ceros de la función, a partir de despejar la ecuación **$y = a (x - u)^2 + v$**

$$y = a. (x - u)^2 + v$$

$$a. (x - u)^2 + v = 0$$

$$a. (x - u)^2 = -v$$

$$(x - u)^2 = \frac{-v}{a}$$

$$x - u = \pm \sqrt{\frac{-v}{a}}$$

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-v}{a}} + u \quad \text{ó} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-v}{a}} + u$$

Dada una ecuación cuadrática cualquiera, por ejemplo: $y = 2(x-3)^2 + 1$

- Reescribí la fórmula a fin de que la parábola esté 2 unidades hacia arriba.
- Reescribí la fórmula a fin de que la parábola esté 3 unidades hacia abajo.
- Reescribí la fórmula a fin de que la parábola se desplace 1 unidad a la derecha.
- Reescribí la fórmula a fin de que la parábola se desplace 4 unidades a la izquierda.
- Reescribí la fórmula a fin de que la parábola tenga las ramas hacia abajo, muy cerradas y que esté desplazada 2 unidades hacia arriba y 3 unidades hacia la derecha.
- Comprobá todo con el Geogebra.
- Determiná las raíces de la función.

Enlaces de Interés

- [Ecuación de 2^{do} grado](#) . Visto el 24 de junio de 2015.(Para la correcta visualización de esta página se debe tener instalado y actualizado Java)

Contenidos disciplinares

- Función cuadrática. Ecuación de 2^{do} grado. Variaciones cuadráticas.
- Variables, dependencia e independencia, dominio, codominio, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de una función
- Eje de simetría. Vértice. Raíces o ceros.
- Expresiones analíticas de la función cuadrática: explícita, canónica y factorizada.
- Variación de los parámetros de la función. Incidencia de las variaciones en las distintas representaciones.

Saberes previos

- Área y perímetro de rectángulos.
- Gráficos en el eje cartesiano.
- Función lineal. Raíz de una función lineal.
- Factorización de expresiones algebraicas enteras: factor común, trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados.
- Utilización de las herramientas básicas del GeoGebra.

Bibliografía

- Illuzi, A; Sessa, C; Azar, G. (2014). *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*. 1ª ed. – Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires.