SECUENCIA DIDÁCTICA
CIENCIAS NATURALES
FUNCIÓN EXPONENCIAL

Destinatarios: estudiantes de3^{ro}y 4toaño de la Escuela Secundaria.

Eje: En Relación con las Funciones y el Álgebra.

Fundamentación

En los NAP de Matemática del Campo de Formación General del Ciclo Orientado (Resolución N°180/12 del CFE) se establece un trabajo de modelización de situaciones extra e intramatemáticas mediante funciones exponenciales, lo que supone: a) trabajar las nociones de dependencia y variabilidad, b) seleccionar el tipo de representación (tablas, fórmulas, gráficos cartesianos realizados con recursos tecnológicos) adecuado a la situación, c) la determinación del dominio, codominio, crecimiento, decrecimiento, etc. En este sentido, es fundamental la utilización de las TIC a fin de mejorar y agilizar el diseño de modelización de situaciones reales, haciéndose imprescindible la utilización de las netbooks que son entregadas, a los estudiantes, a través de Conectar Igualdad, ya que cuentan con el software de distribución gratuita de geometría dinámica, GeoGebra, que permite interpretar mejor la información que brindan los gráficos, vincular sus variaciones con las fórmulas y establecer la incidencia de tales variaciones en las características de las funciones. Además esta herramienta tecnológica permite trabajar con software como Excel (planilla de cálculos) y Word (procesador de textos)

Por otra parte, trabajar con funciones exponenciales permite la modelización matemática en distintos campos del saber como las Ciencias Naturales y otras disciplinas pertenecientes al campo de las Ciencias Sociales y de las Humanidades.

Desde el punto de vista de la Didáctica de la Matemática es fundamental que los estudiantes construyan el sentido de los conceptos matemáticos que se trabajan en aula y la modelización apunta en este sentido.

Capacidades

- Modelización de situaciones extra e intramatemáticas vinculadas con funciones cuadráticas.
- Resolución de problemas seleccionando la representación adecuada a la situación.
- Valoración y uso de los recursos tecnológicos para la exploración y formulación de conjeturas, para la resolución de problemas y para el control de resultados.

- Confianza en las propias posibilidades para resolver problemas y formularse interrogantes, reconociendo que con dedicación, trabajo y estudio la Matemática es accesible para todos
- Disposición para defender sus propios puntos de vista, considerar ideas y opiniones de otros, debatirlas y elaborar conclusiones, aceptando que los errores son propios de todo proceso de aprendizaje.

Objetivos

Que los estudiantes:

- Modelicen situaciones extra e intramatemáticas y reconozcan a este proceso como un aspecto esencial de la práctica matemática.
- Interpreten variables, reconozcan dependencia entre variables, dominio, codominio, crecimiento y decrecimiento.
- Utilicen el Geogebra para explorar e interpretar el comportamiento de las funciones de acuerdo con diferentes variaciones de sus parámetros.
- Confíen en sus propias posibilidades para resolver problemas.
- Debatan, conjeturen, elaboren estrategias y las validen en un trabajo colaborativo.

Tarea

Modelización de situaciones en las que intervienen funciones exponenciales

Actividad 1

Que los estudiantes lean el siguiente texto

HISTORIA DEL AJEDREZ

Yo, MALBA TAHAN dedico estas páginas, sin valor, de leyenda y fantasía, en BAGDAD, a 19 lunas de Ramadan de 1321.

Se dice que vivió en la India uno de los monarcas más ricos y generosos de su tiempo llamado Rey Ladava, debido a la guerra se vio el hombre bueno y generoso en obligación de tomar la espada para repeler un brutal ataque del aventurero Varangul, que se decía príncipe de Calián. En la batalla su querido hijo Adjamir terminó con el pecho atravesado por certera flecha, siendo su acción definitiva para la victoria, el dolor que la pérdida de su hijo causó en el monarca fue tanto que suspendió las festividades para celebración de la victoria y encerrado en sus habitaciones sólo salía para atender casos de extremada urgencia que requerían su presencia.

Con el correr de los días en lugar de apagarse los recuerdos de la penosa campaña, más se agravaban la angustia y la tristeza, que, desde entonces oprimían el corazón del Rey. ¿De qué le podrían servir, en verdad, los ricos palacios, los elefantes de guerra, los tesoros inmensos, si ya no vivía a su lado aquel que fuera siempre la razón de su existencia? ¿Qué valor podrían tener, a los ojos de un padre inconsolable, las riquezas materiales, que no borrarían nunca el recuerdo del hijo desaparecido?

Un día, finalmente, fue informado el rey de que un joven pobre y modesto solicitaba una audiencia. Conducido a la gran sala del trono, fue interpelado el joven por uno de los visires del rey. ¿Quién eres, de dónde vienes y qué deseas del Rey?

Mi nombre –respondió el joven- es Lahur Sessa y vengo de la aldea de Mahir que está a treinta días de marcha de esta bella ciudad. Al recinto en que vivía llegó la noticia de que nuestro bondadoso rey arrastraba los días, en medio de profunda tristeza, amargado por la ausencia del hijo que le robara la guerra, pensé, en inventar un juego que pudiera distraerlo y abrir en su corazón las puertas a nuevas alegrías. Es este el insignificante obsequio que deseo, en este momento ofrecer a nuestro rey Ladava.

Lo que Sessa traía al rey Ladava consistía en un gran tablero cuadrado, dividido en 64 cuadritos iguales; sobre este tablero se colocaban dos colecciones de piezas, que se distinguían unas de otras por el color, blancas y negras, repitiendo simétricamente los motivos y subordinadas a reglas que permitían de varios modos su movimiento. El juego se llamaba Ajedrez.

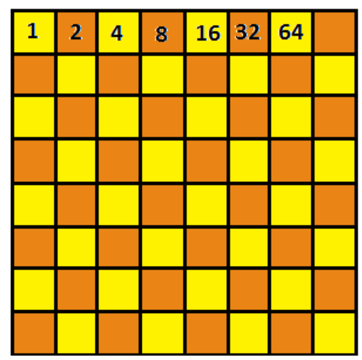
Sessa explicó con paciencia al rey, a los visires y cortesanos que rodeaban al monarca en qué consistía el juego, enseñándole las reglas esenciales

- No creí nunca, que el ingenio humano pudiera producir maravillas como este juego - y dirigiéndose al joven inventor- le dijo: Pide lo que desees para que yo pueda demostrar, una vez más, cómo soy de agradecido con aquellos que son dignos de una recompensa.

Rey poderoso – recriminó el joven con suavidad y altivez -. No deseo, por el presente que hoy os traje, otra recompensa que la satisfacción de haber proporcionado al señor un pasatiempo agradable.

Me causa asombro tanto desamor y desdén por las cosas materiales, joven. Exijo que escojas sin demora una recompensa digna de tu valioso regalo, quieres una bolsa llena de oro, o un arca llena de joyas. Aguardo tu respuesta, ya que mi palabra está ligada a una promesa.

No admitir vuestro ofrecimiento más que descortesía sería desobediencia al rey. Voy pues, a aceptar por el juego que inventé una recompensa, no deseo, sin embargo, ni oro, ni tierras, ni palacios. Deseo mi recompensa en granos de trigo. Dadme un grano de trigo por la primera casilla, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, y así duplicando sucesivamente, hasta la sexagésima cuarta y última casilla del tablero.



¡Granos de trigo! Exclamó el rey. ¿Cómo podré pagarte con tan insignificante moneda? Insensato –declaró el rey- ¿Dónde aprendiste tan grande indiferencia por la fortuna? La recompensa que me pides es ridícula. En fin, ya que mi palabra fue empeñada, ordenaré que mi pago se haga inmediatamente conforme a tu deseo.

Mandó llamar el rey a los algebristas más hábiles de la corte y les ordenó calculasen la porción de trigo que Sessa pretendía. Al cabo de algunas horas de profundos estudios, volvieron al salón para hacer conocer al rey el resultado de sus cálculos.

Rey magnánimo –declaró el más sabio de los geómetras-: calculamos el número de granos de trigo que constituirá la recompensa elegida por Sessa, y obtuvimos un número cuya magnitud es inconcebible para la imaginación humana, la cantidad de trigo que debe entregarse a Lahur Sessa equivale a una montaña que teniendo por base nuestra ciudad, fuese cien veces más alta que el Himalaya. La India entera sembrados todos sus campos y destruidas todas sus ciudades, no produciría en un siglo la cantidad de trigo que, por vuestra promesa, debe entregarse al joven Sessa.

El soberano Indú se veía, por primera vez, en la imposibilidad de cumplir una promesa. Lahur Sessa como buen súbdito no quiso dejar afligido a su monarca y públicamente renunció a lo que había pedido. El rey, asombrado por la modestia de Sessa, y olvidando la montaña de trigo que, sin querer, prometiera al joven brahmán, lo nombró su primer ministro y Lahur Sessa, distrayendo al rey con ingeniosas partidas de ajedrez y orientándolo con sabios y prudentes consejos, prestó los más señalados servicios a su pueblo y a su país, para mayor seguridad del trono y mayor gloria de su patria.

Actividad 2

Leer el siguiente problema. Analizarlo. Contextualizarlo. Encontrar una fórmula que modelice la situación.

Hoy, Juan, se enteró de algo y no ve la hora de contárselo a alguien. Dicen que el chisme corre rápido, ¿será cierto? ¿Me ayudás a calcularlo? Antes, vamos a establecer una condición: “el que conoce el chisme, solamente le puede contar a una sola persona por hora”

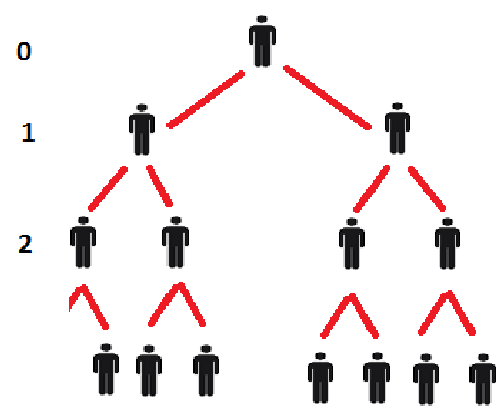
Entonces, en la primera hora, Juan sólo le pudo contar el chisme a una sola persona, de modo que ahora ya son 2 las personas que lo saben.

- ¿Cuántas personas conocen el chisme a las 2hs?
- ¿Cuántas personas sabrán el chisme en la 4ta hora?
- Dibujá un esquema que te ayude con el problema
- ¿Cuántas personas sabrán el chisme en la 8va hora?
- ¿Podés escribir una fórmula que te permita calcular la cantidad de personas que conocen el chisme a las x hs desde que Juan se enteró?
- El pueblo de Juan tiene 65.536 habitantes ¿Cuántas horas deben pasar para que todos estén enterados del chisme?

Observación para el docente: La idea es que los estudiantes puedan dibujar un diagrama similar al siguiente a partir del cual puedan deducir la fórmula que calcula el total de personas en función de las horas.

x= n° de horas

$2^0 = 1$ - $2^1 = 2$ - $2^2 = 4$ - $2^3 = 8$ … $2^x = f(x)$



- En Geogebra, desde la línea de entradas escribir la expresión **y = 2ˆx** y observar la gráfica

Institucionalizar que este tipo de función se denomina “función exponencial”

Se llama función exponencial de base **a**, siendo **a** un número real positivo y distinto de 1, a la función **$f(x) = a^x$**

Propiedades de la función exponencial $y = a^x$

- Para x = 0, la función toma el valor 1: $f(0) = a^0 = 1$
- Para x = 1, la función toma el valor a: $f(1) = a^1 = a$
- La función es positiva para cualquier valor de x: $f(x) > 0$.

Esto es debido a que la base de la potencia "**a**" es positiva, y cualquier potencia de base positiva da como resultado un número positivo.

- Si la base de la potencia es mayor que 1, $a>1$, la función es creciente.
- Si la base de la potencia es menor que 1, $a<1$, la función es decreciente.

Actividad 3

3.1 En el siguiente video, de 4.30 minutos del programa "Alterados por Pi", Adrián Paenza nos muestra un ejemplo de crecimiento exponencial

Crecimiento Exponencial - AXPi - Adrian Paenza

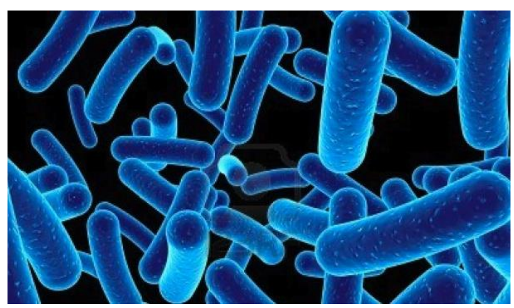
3.2 El siguiente video, de no más de 40 segundos, muestra el crecimiento exponencial de las bacterias. Al verlo, los estudiantes podrán tener una mejor idea de la velocidad de este crecimiento

Crecimiento exponencial de Bacterias

Actividad 4

Existen Bacterias que son nocivas para el ser humano. Provocan enfermedades como cólera, tuberculosis, botulismo, lepra, meningitis bacteriana, neumonía bacteriana, tétanos, etc.

En un laboratorio se realizó un experimento con una población inicial de 100 individuos de cierto tipo de bacterias y se pudo comprobar que la población de éstas se triplica cada 2 horas. Se desea conocer en cuánto tiempo la población de bacterias llegará a los 50.000.000 de individuos ya que se sabe que este es un nivel crítico y que, superado el mismo, se puede convertir en un serio problema para el ser humano.



- Escribir una fórmula que modelice la situación
- Hacer una tabla de valores
- Graficar en Geogebra

Observación para el docente: Al tener una cantidad inicial, la fórmula quedará $\mathbf{f(x) = 100.\ 3^x}$
Si ya se dio el tema, pueden agregarse consignas para la resolución aplicando logaritmos

Actividad 5

5.1 Que los estudiantes lean el siguiente texto:

BEBIDAS ALCOHOLICAS Y ALCOHOLISMO

Las bebidas alcohólicas contienen porcentajes variables de alcohol en peso, según indica su etiqueta: las **cervezas**, del 4% al 10%; los **vinos**, del 10% al 18%; los **aperitivos y licores suaves**, del 20% al 25%; y los **licores fuertes**, del 35% al 45% (es decir, 100 ml de whisky contienen aproximadamente 40 gramos de etanol).

Una vez ingerido, el alcohol pasa a la circulación sanguínea. Su absorción se realiza sobre todo a nivel del intestino delgado y es mayor cuando la persona está en ayunas.

Hasta un 10% del alcohol presente en la sangre se elimina por la orina, el sudor y la evaporación a través de los alveolos pulmonares. Esto último permite realizar mediciones en el aire espirado (alcoholímetros de espiración). El 90% restante se metaboliza en el hígado a razón de 10 gramos por hora.

El **control de alcoholemia** o **test de alcoholemia** mide la concentración de alcohol en sangre. Por ejemplo, un nivel de **0,2** de alcohol en sangre significa **0,2 g** de alcohol por cada **100 ml** de sangre.

En Argentina el límite legal de alcohol en sangre para conducir un automóvil es de 0,5 gr/litro de sangre, para conductores de motos es de 0,2 gr/litro. En el caso de conductores de transporte de carga o pasajeros, la tolerancia es 0 (cero).

Efectos del Alcohol en la Conducción			
Alcoholemia gr/lts de sangre	**Nivel de Dificultad para actuar en el tránsito**	**Efectos que se perciben en los individuos**	**Nivel de Riesgo**
0	Sin dificultad	Dominio pleno de las facultades	Nulo
0,2	Moderado	Se siente bien. Minimo o nulo efecto	Medio
0,4	Moderado a Severo	Capaz de "dejarse ir" socialmente, se siente a tope. Disminuye la atención. Ligeramente peligroso si conduce	Medio Alto
0,5	Severo	El juicio queda disminuido. Incapaz de adoptar decisiones importantes. Se reduce la visión. La conducción se hace temeraria	Alto
0,8	Crítico no puede conducir	Pérdida definitiva de la coordinación. Conducción peligrosa a cualquier velocidad	Alto
1	Crítico no puede conducir	Tendencia a perder el control sexual si no está demasiado adormilado. Torpeza de movimientos. Manejo agresivo y temerario	Alto
1,6	Crítico no puede conducir	Embriagado. Posiblemente agresivo. Reflejos alterados. Incontrolado. Puede sufrir de pérdida posterior de memoria de los acontecimiento	Muy Alto
3	Crítico no puede conducir	A menudo, incontinencia espontánea. Mínima capacidad de excitación sexual. Puede caer en coma.	Severo
5	Crítico no puede conducir	Susceptible de morir si no recibe atención médica	Extremo

5.2 Problema

El sábado pasado Juan volvía de una fiesta. En el camino fue interceptado por inspectores de tránsito quienes le hicieron una prueba de alcoholemia. La prueba le dio como resultado 1.60 g/litro de sangre. El inspector, además de hacerle una multa le dijo que debía quedarse 4 horas antes de permitirle volver a conducir. ¿Está bien lo dicho por el inspector?

Si suponemos que cada hora se elimina un 30% de alcohol en sangre. Partiendo de 1.60 g/litro de sangre ¿cuánto tardará en descender la cantidad de alcohol por debajo de los 0.5 g/litro que es el límite permitido?

- Escribir una ecuación que modelice la situación
- Hacer una tabla de valores
- Introducir la ecuación en Geogebra

Observación para el docente: Como cada hora se reduce 30% del alcohol en sangre, lo que queda para la hora siguiente es el 70%, de modo que en Geogebra se pueden introducir la ecuación **y=1.60*0.7ˆx** que modeliza el descenso del nivel de alcohol en sangre y la ecuación **y = 0.5** que modeliza el límite permitido de alcohol en sangre. La intersección de ambas funciones mostrará el valor exacto de horas necesarias a esperar, sin necesidad de hacer tablas ni cálculos de aproximación. Si ya se dio el tema, pueden agregarse consignas para la resolución aplicando logaritmos

Actividad 6

En Geogebra

- crear 4 deslizadores que representarán a las variables **a b c** y **k**
- en la línea de entradas introducir la función $\mathbf{y = k.a^{x+b} + c}$
- hacer clic en el punto de cada deslizador y moverlo y anotar la variación gráfica en relación a la variación del parámetro
- ¿qué conclusiones se pueden sacar respecto a lo que representa cada parámetro?

Contenidos disciplinares

- Función exponencial. Variaciones.
- Variables, dependencia e independencia, dominio, codominio, crecimiento y decrecimiento
- Expresiones analíticas de la función exponencial: general y canónica.
- Variación de los parámetros de la función. Incidencia de las variaciones en las distintas representaciones.

Saberes previos

- Diseño de fórmulas.
- Gráficos en el eje cartesiano.
- Utilización de las herramientas básicas del GeoGebra.

Bibliografía

- https://es.wikipedia.org/wiki/Poblaci%C3%B3n_mundial. Visto el día 01/07/2015
- http://www.fisicanet.com.ar/matematica/funciones/ap05_funciones.php. Visto el día 01/07/2015
- http://www.padresenlaruta.org.ar/ALCOHOLEMIA.htm. Visto el día 01/07/2015
- https://es.wikipedia.org/wiki/Control_de_alcoholemia. Visto el día 01/07/2015

ANEXO

A.1.

El Carbono 14. Decrecimiento exponencial

Una técnica para descubrir la antigüedad de un objeto antiguo (como un hueso, un mueble, una tabla), es medir la cantidad de Carbono 14 que contiene.

Mientras están vivos, los animales y plantas tienen una cantidad constante de Carbono 14, pero cuando mueren disminuye por la radioactividad.

El valor de esta cantidad viene dada por $R(t) = R_0\, e^{-kt}$, donde R_0 es la cantidad en un ser vivo y $R(t)$ la hallada en una muestra fósil al cabo de años de su muerte y es una constante.

El periodo de semidesintegración del C14 es de 5730 años. Veamos la evolución de 1g de C14.

Dentro de 5730 años ese gramo se habrá reducido a la mitad:

$$\frac{1}{2} = e^{-5730k} \rightarrow \ln\frac{1}{2} = -5370k \rightarrow k = 0.00012$$

Por tanto, para el C14 tenemos la fórmula: $R(t) = R_0\, e^{-0.00012t}$

Supongamos que un hueso hallado en un yacimiento arqueológico contiene el 20% del C14 que contenía en vida del animal. Vamos a estimar su antigüedad:

Según la fórmula anterior $0.2R_0 = R_0\, e^{-0.00012t} \rightarrow 0.2 = e^{-0.00012t}$

Tomando logaritmos neperianos: $ln 0.2 = -0.00012t \rightarrow t = 13412$ años, aproximadamente.

A.2 El siguiente video, de 2.30 minutos, muestra el crecimiento poblacional, sus causas y consecuencias. Se lo puede tratar como un tema transversal, una problemática social y económica para luego tratarlo matemáticamente como una función exponencial. Que los estudiantes encuentren cuál es la base de la función exponencial de acuerdo a la información brindada en el video.

Crecimiento Poblacional

La siguiente tabla muestra la evolución de la población mundial discriminada por continente

Los estudiantes pueden hacer los gráficos correspondientes para analizar las diversas curvas

Año	Total	África	Asia	Europa	América	Oceanía	Creci-miento (%)	Crecimiento anual medio (%)
10000 a. C.	100 - 1 000 000							
8000 a. C.	8 000 000							
1000 a. C.	50 000 000							
500 a. C.	100 000 000							
1 d.C.	200 000 000							
1000	310 000 000							
1750	791 000 000	106 000 000	502 000 000	163 000 000	18 000 000	2 000 000		
1800	978 000 000	107 000 000	635 000 000	203 000 000	31 000 000	2 000 000	23,64%	0,43%
1850	1 262 000 000	111 000 000	809 000 000	276 000 000	64 000 000	2 000 000	29,04%	0,51%
1900	1 650 000 000	133 000 000	947 000 000	408 000 000	156 000 000	6 000 000	30,74%	0,54%
1950	2 518 630 000	221 214 000	1 398 488 000	547 403 000	338 713 000	12 812 000	52,64%	0,85%
1955	2 755 823 000	246 746 000	1 542 000 000	575 184 000	377 681 000	14 265 000	9,42%	1,82%
1960	2 982 142 000	277 398 000	1 674 000 000	601 401 000	413 455 000	15 888 000	8,21%	1,59%
1965	3 334 874 000	313 744 000	1 899 424 000	634 026 000	470 022 000	17 657 000	11,83%	2,26%
1970	3 692 492 000	357 283 000	2 143 118 000	655 855 000	516 793 000	19 443 000	10,72%	2,06%
1975	4 068 109 000	408 160 000	2 397 512 000	675 542 000	565 331 000	21 564 000	10,17%	1,96%
1980	4 434 682 000	469 618 000	2 632 335 000	692 431 000	617 469 000	22 828 000	9,01%	1,74%
1985	4 830 978 000	541 814 000	2 887 552 000	706 009 000	670 925 000	24 678 000	8,94%	1,73%
1990	5 263 593 000	622 443 000	3 167 807 000	721 582 000	725 074 000	26 687 000	8,96%	1,73%
1995	5 674 328 000	707 462 000	3 430 000 000	727 405 000	780 537 000	28 924 000	7,80%	1,51%
2000	6 070 581 000	795 671 000	3 679 737 000	727 986 000	836 144 000	31 043 000	6,98%*	1,36%
2005	6 453 628 000	887 964 000	3 917 508 000	724 722 000	890 437 000	32 998 000	6,31%	1,23%
2008	6 709 132 764	972 752 377	4 053 868 076	731 682 934	916 454 284	34 375 093	3,93%	1,29%
2010	6 863 879 342	1 004 491 200	4 118 200 004	735 689 998	970 998 140	34 500 000	2,16%	1,08%
2011	7 082 354 087	1 050 311 998	4 240 900 000	750 000 000	1 005 098 001	36 044 088	3,08%	2,54%
2015	7 376 471 981	1 113 301 100	4 366 689 881	788 881 900	1 070 099 100	37 500 000	2,16%	1,18%

Tabla extraída de https://es.wikipedia.org/wiki/Poblaci%C3%B3n_mundial.